

9th EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY
ON THE HISTORY AND EPISTEMOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION

ESU-9

*Workshop: Starting from the history of mathematics in Late Modern Italy (XVIII-XX centuries):
From primary sources to mathematical concepts*

The science of waters as the main field of applied mathematics

Maria Giulia Lugaresi (Università di Ferrara)



**Dipartimento
di Matematica
e Informatica**

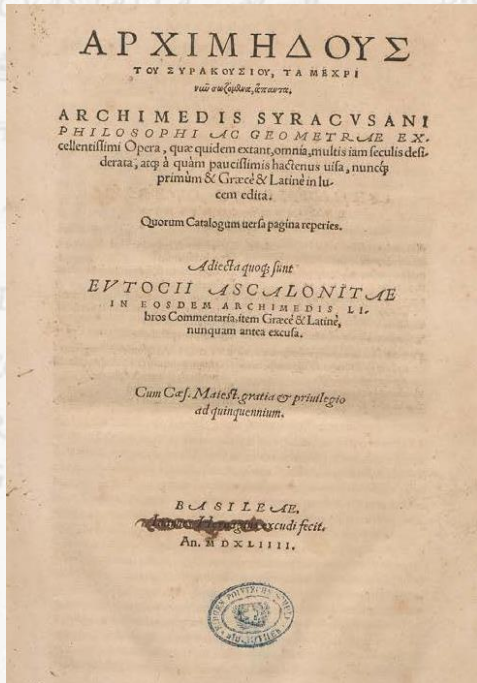


Archimedes' hydrostatic work

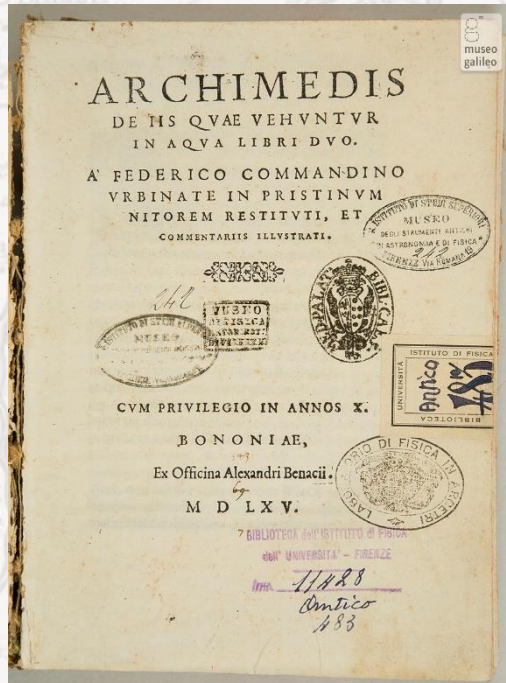
On floating bodies – main hydrostatic principles, Archimedes' law.



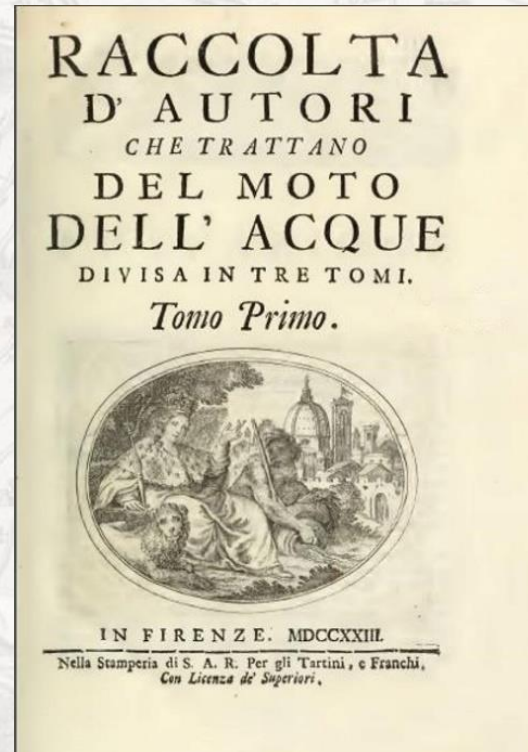
Archimedes
(287- 212 a.C.)



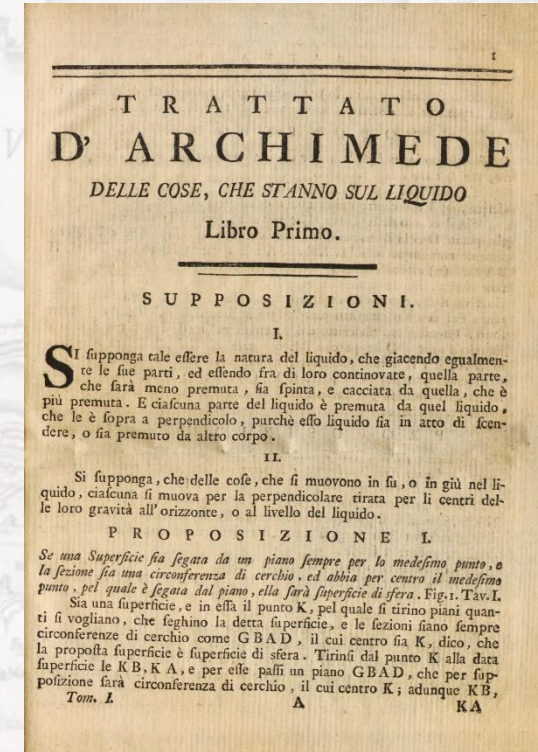
1544 (Editio princeps)



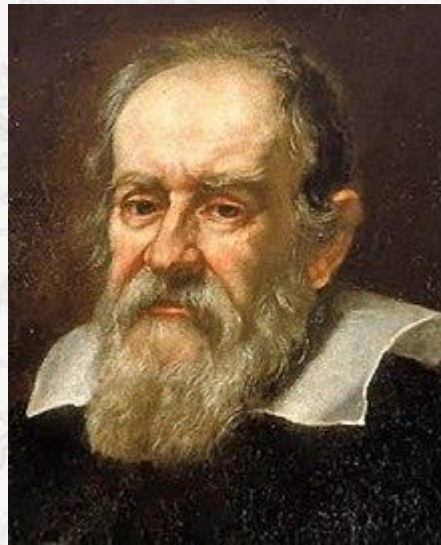
1558 (Latin ed., Commandino)



1723 (Italian ed.)



The Galilean school



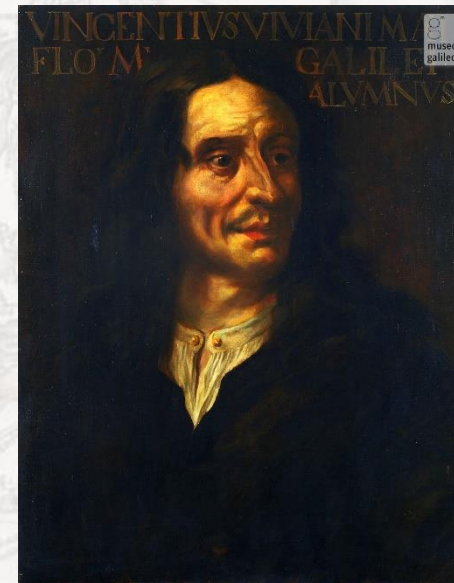
Galileo Galilei
(1564-1642)



Benedetto Castelli
(1577-1643)



Evangelista Torricelli
(1608-1647)



Vincenzo Viviani
(1622-1703)

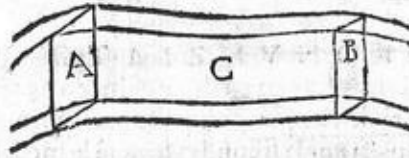
Benedetto Castelli, *Della misura dell'acque correnti* (1628)



62 DELLA MISURA

PROPOSIZIONE I
 Le sezioni del medesimo Fiume scaricano uguali quantità d'acqua in tempi eguali, ancorche le sezioni medesime siano disuguali.

Siano due sezioni A, e B, nel Fiume C, corrente da A, verso B, dico che scaricaranno uguali quantità



d'acqua in tempi uguali; imperocché, se maggiore quantità d'acqua passasse per A, di quello che passa per B, ne seguirebbe, che l'acqua nello spazio intermedio del Fiume C, crescerebbe continuamente, il che è manifestamente falso; mà se più quantità di acqua vicisse per la sezione B, di quello che entra per la sezione A, l'acqua nello spazio intermedio C, andrebbe continuamente scemando, e si abbasserebbe sempre, il che pure è falso: adunque la quantità dell'acqua che passa per la sezione B, è eguale alla quantità dell'acqua, che passa per la sezione A, e però le sezioni del medesimo fiume scaricano, &c. Che si douea dimostrare,

PRO-

CONSIDERAZIONI INTORNO ALLA LAGUNA DI VENEZIA DI D. BENEDETTO CASTELLI

Abate di S. Benedetto Aloisio, Mattematico di Papa Urbano VIII.
 e Professore dello Studio di Roma.

Ancorchè una sola sia la cagione principale, dalla quale per mio parere, si minaccia rovina irreparabile alla Laguna di Venezia nel presente stato, nel quale si ritrova; contuttociò mi pare, che si possano considerare due capi; e questa considerazione per avventura ci potrà servire per facilità, ed esplicazione de' rimedj opportuni, non già per rendere assolutamente immutabile, ed eterno lo stato delle cose, impresa impossibile, ed in tutto quello, che avendo avuto qualche principio dee ancora necessariamente avere il suo fine; ma almeno per allorfe intanto si

CONSIDERAZIONE SOPRA LA BONIFICAZIONE DELLE PALUDI PONTINE DI D. BENEDETTO CASTELLI

Abate di S. Benedetto Aloisio, Mattematico di Papa Urbano VIII.
 e Professore dello Studio di Roma.

Fra l'impresè reputate da me, se non impossibili assolutamente, almeno difficilissime, una fu quella famosa del rasciugare le Paludi Pontine, e però stava risolutissimo di non applicarci mai l'animo mio, ancorchè da Padroni mi fusse stato comandato: stimando, che fusse occasione più presto di disprezzo di reputazione non riuscendo l'impresa, che di guadagnar termine di quello, che for passati riconosciuto il paese eque, dopo aver fatta qualche fatica, e non si sono confermati tanto più scritto geometricamente nel ti, in modo, che discorrendo mare, che questa Bonificazione stato.

CONSIDERAZIONE SOPRA LA BONIFICAZIONE DEL BOLOGNESE, FERRARESE, E ROMAGNOLA DI D. BENEDETTO CASTELLI

Abate di S. Benedetto Aloisio, Mattematico di Papa Urbano VIII.
 e Professore dello Studio di Roma.

Essendo stato rappresentato puntualissimamente il gravissimo negozio della Bonificazione del Bolognese, Ferrarese, e Romagnola, e disceso con scrittura della buona memoria dell' Illustrissimo, e Reverendissimo Monsignor Corsini, che fu già deputato Commissario generale, e Visitatore di quell' acque; io non potendo far sopra la medesima materia un' istesso discorso, solamente dirò alcune cose per maggior confermazione di quel tanto, che io ho detto in questo libro sopra la Laguna di Venezia, sopra le Paludi Pontine, e sopra la Bonificazione di quei piani di Pisa, posti tra il fiume Arno, ed il Serchio, dove si conosce chiaro, che in tutti li suddetti casi, e nel presente che abbiamo per le mani; si sono per lo passato commessi gravissimi errori, per non essere mai stata intesa bene la vera Misura dell' Acque Correnti, e qui è di nota-

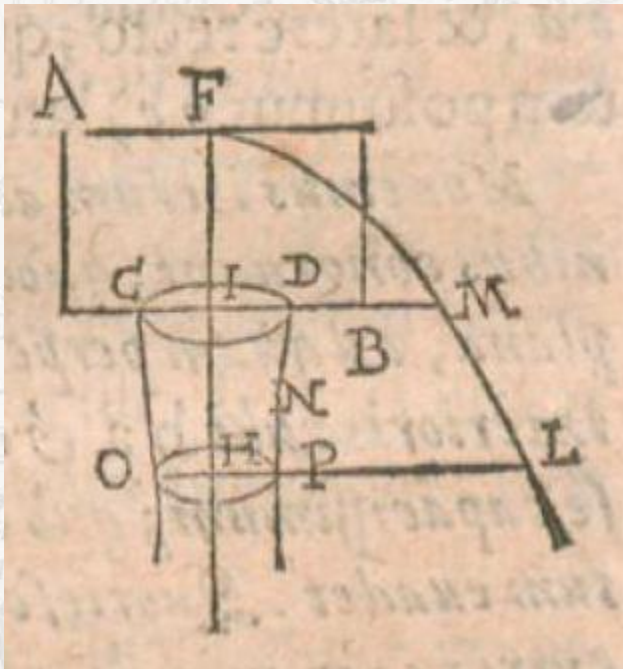
Torricelli's law: the efflux from an opening

Torricelli's contributions to the science of waters: *De motu gravium naturaliter descendentium, et proiectorum libri duo*, in *Opera geometrica* (1644).

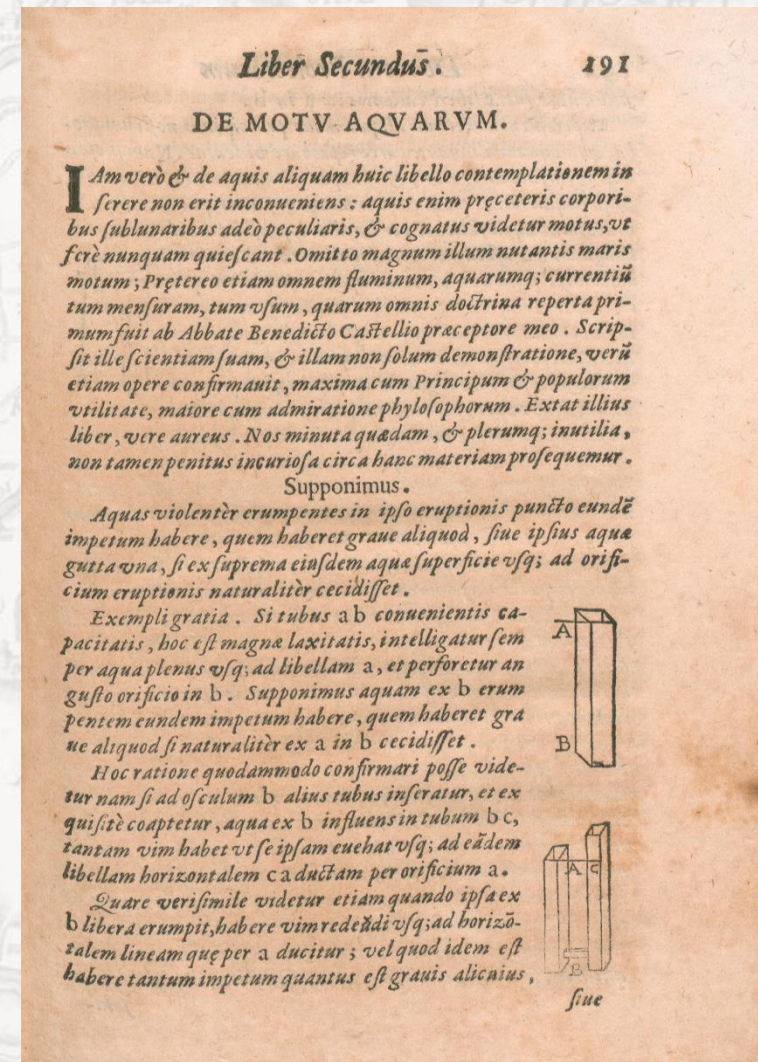
According to Torricelli, the law of the efflux can also be applied to rivers and canals. Thanks to the analogy with «free fall», Torricelli finds a useful model to explain the relationship between speed, pressure and depth.

$$v = \sqrt{2gh}$$

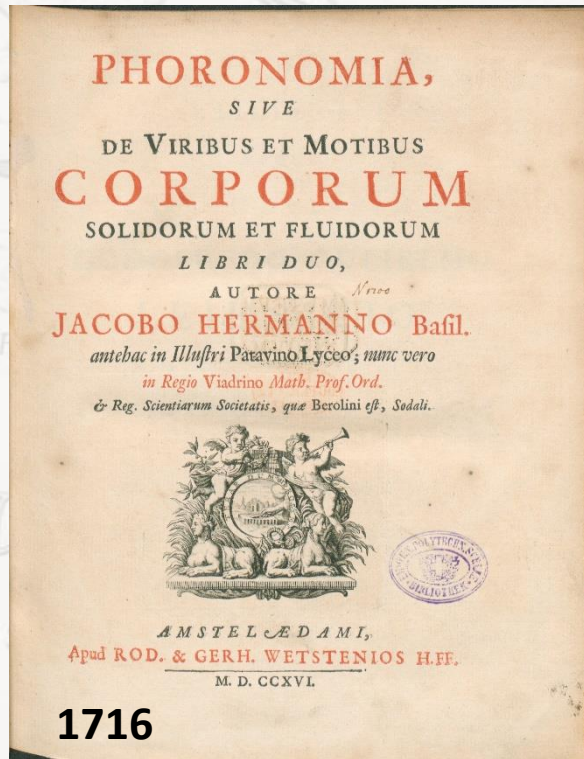
v represents the speed of a liquid flowing under the force of gravity out of an opening in a tank.



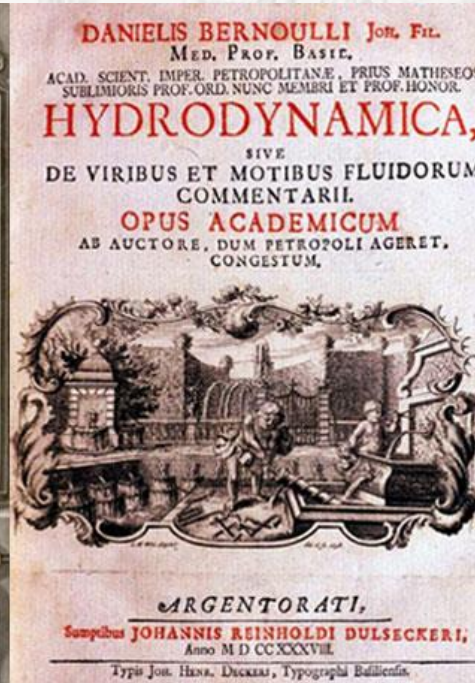
The solid **OCDP** describes the water falling from the opening CD, placed at the bottom of the tank.



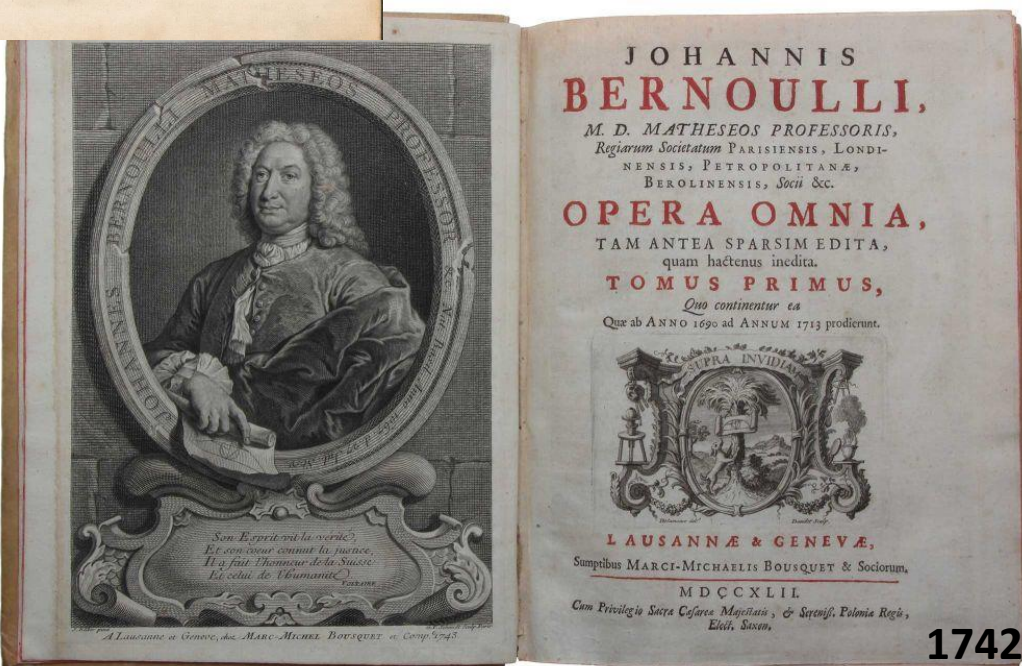
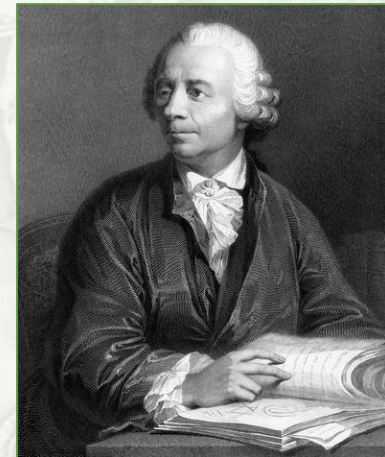
Outside Italy



1716



1738



1742

- *Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide* (1757)
- *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757)
- *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides* (1757)

Mathematicians and science of waters in Italy between XVII and XVIII century

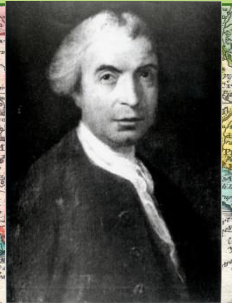
Kingdom of Sardinia –
University of Turin
Francesco Domenico Michelotti

Hapsburg Empire -
University of Pavia

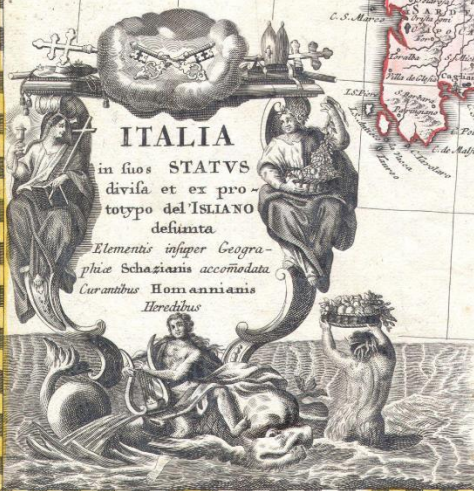
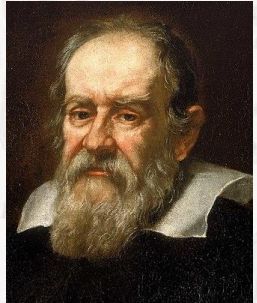
Republic of Venice -
University of Padua

Granduchy of Tuscany -
University of Pisa

Papal State - University of
Rome, Bologna, Ferrara



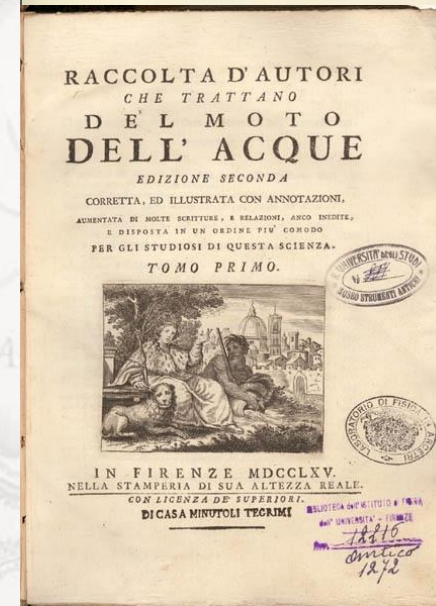
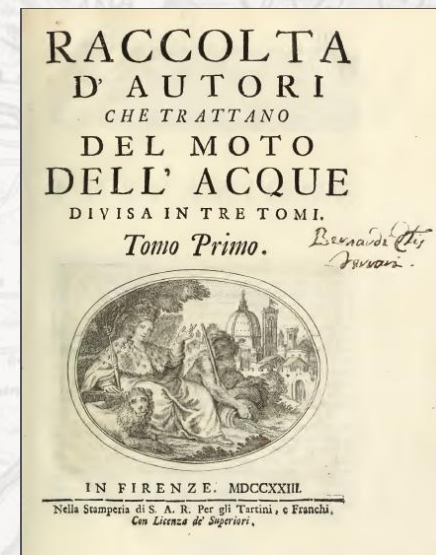
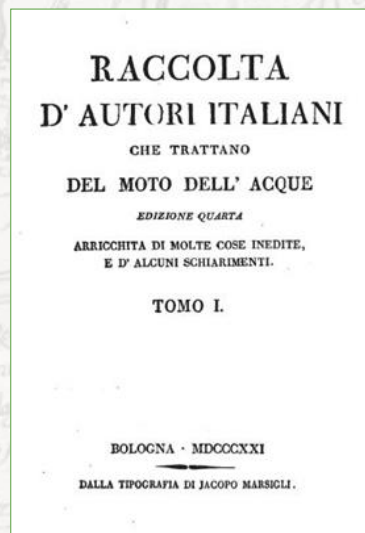
Tommaso Perelli



The problem of the river Reno inside the *Raccolte sul moto delle acque*

Altro esempio a mio proposito illustre, e famoso si è quello della diversione del Reno di Bologna dall'antico usato suo corso, e posto nella valle della S. Martina col fine, e pretesto di colmarla, e bonificarla, per iscavare in questo mentre il Po di Ferrara, e poi riporlo nel primiero suo letto. Il che riescì opera vana, e di sommo, immenso, irreparabil danno alla città di Bologna, ed al suo ampio, e fertil territorio, e diede occasione per un secolo a grandi spese, e liti, e controversie fra essa città, e quella di Ferrara: la qual lite dopo tante contrarietà, e litigi restò poco anzi terminata, e composta dalla giustizia, e clemenza del Sommo Pontefice Clemente XI e dalla Congregazione a ciò da lui eretta, e deputata. Questa controversia ha dato occasione a bellissime scritture, e ricerche sopra la nostra materia dell'acque; alcune delle quali si vedranno nella presente raccolta per documento, ed insegnamento utilissimo in somiglianti avvenimenti. E sono in essa stati adoperati i primi Mattematici dell'età nostra; le ragioni de' quali dimostrano la differenza, che è infra essi, e li volgari ingegneri, e fra la scienza, e l'ignoranza.

Raccolta d'autori che trattano del moto dell'acque, Prefazione, 1723.





*The science of waters as the main field
of applied mathematics*

A didactic proposal

Disegno Topografico ed Idrografico del Reno, sue
Valli, Siti, e Stati adiacenti. fatto l'Anno 1715
In Spiegazione della Relazione data dagli Eminentissimi
Cardinali Adda e Barbentini l'Anno 1694.

Matematica. Linee generali e competenze

*Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i **concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni**, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una **visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico**. [...]*

*Importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton. Si tratterà soprattutto di **comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura**.*

Indicazioni Nazionali (Liceo Scientifico).

Mathematics. General guidelines and skills

*At the end of scientific high school students are familiar with the **concepts and elementary methods of mathematics, both internal to the discipline and relevant for the description and prediction of phenomena**, especially of the world of physics [...]*

*Students will learn a **historical-critical point of view of the relationships between the main items of mathematical thinking and the philosophical, scientific and technological background**.*

[...]

*Students should learn **the role of infinitesimal calculus as a fundamental conceptual instrument in the description and modelization of physical phenomena**.*

Indicazioni Nazionali (Scientific high school)

Fisica. Linee generali e competenze

*Lo studente avrà acquisito le seguenti competenze: osservare e identificare fenomeni; formulare ipotesi esplicative utilizzando modelli, analogie e leggi; **formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione**; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo sperimentale*

*Lo studio della meccanica riguarderà **problemi relativi all'equilibrio dei corpi e dei fluidi**; i moti saranno affrontati innanzitutto dal punto di vista cinematico giungendo alla dinamica con una prima esposizione delle leggi di Newton, con particolare attenzione alla seconda legge (1° biennio).*

*L'approfondimento del **principio di conservazione dell'energia meccanica, applicato anche al moto dei fluidi** (2° biennio).*

Indicazioni Nazionali (Liceo Scientifico).

Physics. General lines and knowledge

Students will acquire the ability to: observe and recognise phenomena; formulate hypotheses by using models, analogies and laws; **formulate a physical problem and apply the relevant mathematical instruments for its resolution**; practise and validate the meaning of different aspects of the experimental method.

The study of mechanics will deal with **problems related to equilibrium of bodies and fluids**; the motions will be studied from a kinematic point of view (1st two-year period). [...]

A detailed study of the **law of conservation of mechanical energy will also be applied to the motion of fluids** (2nd two-year period).

National Programme (Scientific high school)

Destinatari: Primo biennio

Materie coinvolte: Matematica, Fisica, Storia, Italiano, Latino (se previsto)

Tempi: 4/6 ore

Meccanica dei fluidi: Statica e Dinamica

The concept of fluid

Physical quantities involved and their definitions: density, pressure, flow rate, speed

Statica dei fluidi (Idrostatica)

Stevin's law

Pascal's principle

Archimedes' principle

Dinamica dei fluidi (Idrodinamica)

Continuity equation

Bernoulli's theorem and its applications

Torricelli's law

Idraulica e Idrometria

Devices for the measurement of speed

Target audience: first two-year period

Subjects involved: Maths, Physics, History, Italian, Latin (if provided)

Time: 4/6 hours

Fluid mechanics: Statics and Dynamics

The concept of fluid

Physical quantities and their definitions: density, pressure, flow rate, speed

Statics of fluids (Hydrostatics)

Stevin's law

Pascal's principle

Archimedes' principle

Dynamics of fluids (Hydrodynamics)

Continuity equation

Bernoulli's theorem and its applications

Torricelli's law

Hydraulics and Hydrometry

Devices for the measurement of speed

Some primary historical sources:

- Archimede, *Sui galleggianti (On Floating Bodies)* – Archimedes' principle
- Vitruvio, *De Architectura*, libro IX – Archimedes and the problem of the crown
- G. Galilei, *La bilancetta* – Experiment of the crown of Archimedes
- B. Castelli, *Dimostrazioni geometriche della misura dell'acque correnti* – Conservation law

Definition of flow rate:

- B. Castelli, *Copia di lettera al Sig. Galileo Galilei (Copy of a letter to Galileo Galilei)*
- D. Guglielmini, *Misura delle acque correnti (Measure of running water)*
- D. Guglielmini, *Della natura dei fiumi (On the nature of rivers)*
- B. Zandrini, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti (Laws and phenomena, regulation and use of running water)*

Torricelli's law:

- E. Torricelli, *Opera geometrica, De motu aquarum (1644)*

Fluid: definition and properties

Definition of **absolute density**:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Relative density

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}}$$

Specific weight

$$p_{spec} = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g$$

Pressure

$$p = \frac{F}{S}$$

Stevin's law (1586)

$$p = p_0 + \rho gh$$

p_0 represents the value of the pressure on the free surface of a liquid, while p is the value at the depth h .

The term ρgh represents the **hydrostatic pressure**.



Pascal's principle

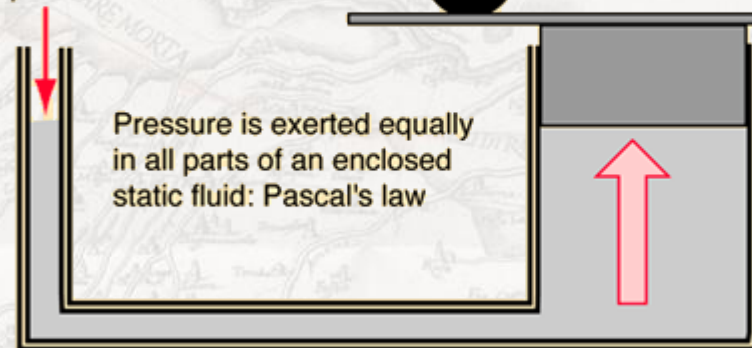
In a fluid at rest in a closed container, a pressure change in one part is transmitted without loss to every portion of the fluid and to the walls of the container. The pressure at a point in a fluid at rest is the same in all directions



Some applications of Pascal's principle:

- hydraulic press,
- hydraulic brakes.

Pressure is exerted on fluid in small cylinder, usually by a compressor.



Though the pressure is the same, it is exerted over a much larger area, giving a multiplication of force that lifts the car.

The force in the small cylinder must be exerted over a much larger distance. A small force exerted over a large distance is traded for a large force over a small distance.

The experiment by Evangelista Torricelli for the measurement of atmospheric pressure



<https://catalogo.museogalileo.it/approfondimento/EsperimentoTorricelli.html>

Torricelli's experiment (mercury)

<http://www.imss.fi.it/multi/torricel/le110644.html>

Letter from Torricelli to Michelangelo Ricci, 11 June 1644

Archimede's principle and its consequences (some propositions of the treatise *On Floating Bodies*)

Prop. 3. *Le grandezze solide, che avendo equal mole hanno equal gravità del liquido, poste nel liquido talmente s'immergono, che niente resta fuori della superficie del liquido, ma non però vanno a fondo.*

Prop. 4. *Delle grandezze solide, qualunque è più leggieri del liquido, nel liquido posta non tutta si immerge, ma una parte di essa sovrasterà alla superficie del liquido.*

Prop. 5. *Delle grandezze solide la più leggieri del liquido, posta nel liquido, fino a tanto vi si immerge, che tanta mole di liquido, quanto la parte sommersa, abbia la stessa gravità, che tutta la grandezza.*

For the Italian translation see: A. Frajese (ed.), *Opere di Archimede*, UTET.

Prop. 3. *Of solids those which, size for size, are of equal weight with a fluid, if let down into the fluid, be immersed so that they do not project above the surface but do not sink lower.*

Prop. 4. *A solid lighter than a fluid will not, if immersed in it, be completely submerged, but part of it will project above the surface.*

Prop. 5. *Any solid lighter than a fluid will, if placed in the fluid, be so far immersed that the weight of the solid will be equal to the weight of the fluid displaced.*

For the English translation see: T. L. Heath (ed.), *The works of Archimedes*.

Archimede's principle and its consequences (lettura di alcune proposizioni del trattato *Sui galleggianti*)

Prop. 6. *Qualunque delle solide grandezze più leggieri del liquido, dentro al liquido spinta, si porta in su con tanta forza, quanto un liquido di mole eguale alla grandezza è più grave della stessa grandezza.*

Prop. 7. *Le grandezze solide più gravi del liquido, nel liquido poste, anderanno in giù finché possano scendere, e nel liquido saranno tanto più leggier, quanto è la gravità del liquido, che abbia mole eguale alla grandezza.*

For the Italian translation see: A. Frajese (ed.), *Opere di Archimede*, UTET.

Prop. 6. *If a solid lighter than a fluid be forcibly immersed in it, the solid will be driven upwards by a force equal to the difference between its weight and the weight of the fluid displaced.*

Prop. 7. *A solid heavier than a fluid will, if placed in it, descend to the bottom of the fluid, and the solid will, when weighed in the fluid, be lighter than its true weight by the weight of the fluid displaced.*

For the English translation see: T. L. Heath (ed.), *The works of Archimedes*.

«Origins» of Archimedes' principle

The report by Vitruvius: Reading of an extract from *De architectura*, libro IX – Archimedes and the problem of the crown.

<https://www.e-rara.ch/oec/content/zoom/6154719>

Reading and comment of *La bilancetta* by Galileo Galilei (Bologna, 1656).

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2500627>

Galileo proposes using the so-called “bilancetta”, an instrument that allows us to directly weigh the bodies in the water, using the Archimedean concept of specific weight.



The Hydrostatic «bilancetta»

Buoyancy conditions in the water

$\rho_{\text{corpo}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow$ the body is in balance

$\rho_{\text{corpo}} < \rho_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow$ the body floats

$\rho_{\text{corpo}} > \rho_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow$ the body sinks

What happens in the air?

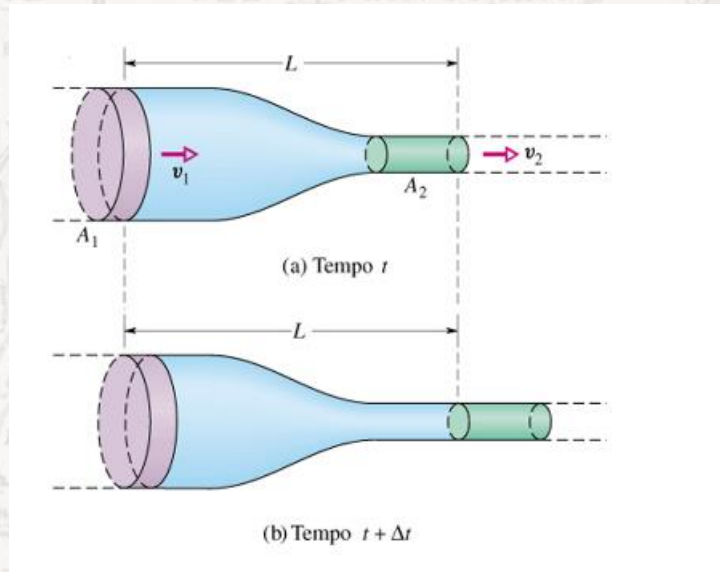
Aerostatic balloons use Archimedes' principle in the air:

- Heated air comes up inside the balloon, because its density is less than the external one. The weight of the entire system decreases, thanks to Archimedes' principle the balloon lifts up
- When we open the valve under the balloon, the heated air goes out and is replaced by the cold air that comes in from underneath. In this case the balloon goes down.



Hydrodynamics

Continuity equation: for an ideal and steady motion fluid

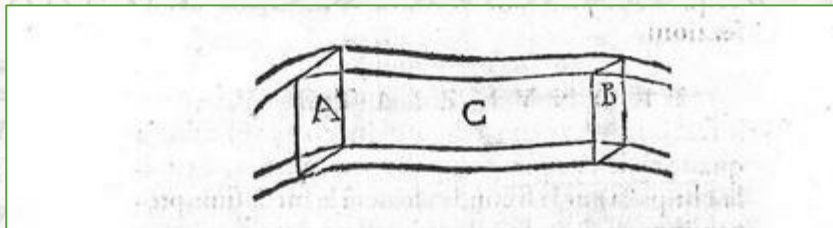


$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = \text{constant}$$



$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constant (for incompressible fluids)}$$

The quantity $A\mathbf{v}$ is the **(volumetric) flow rate** and represents the volume of fluid that crosses the section in a unit of time.



Flow rate conservation law (B. Castelli)
 $Q = A\mathbf{v} = \text{constant}$

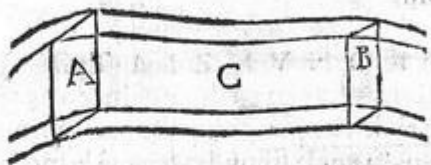
Flow rate conservation law

62 DELLA MISURA

PROPOSIZIONE II

Le sezioni del medesimo Fiume scaricano vguale quantità d'acqua in tempi eguali, ancorche le sezioni medesime siano disuguali.

Siano due sezioni A, e B, nel Fiume C, corrente da A, verso B, dico che scaricaranno vguale quantità



d'acqua in tempi vguali; imperoche, se maggiore quantità d'acqua passasse per A, di quello che passa per B, ne seguirebbe, che l'acqua nello spazio intermedio del Fiume C, crescerebbe continuamente, il che è manifestamente falso; mà se più quantità di acqua vlcisse per la sezione B, di quello che entra per la sezione A, l'acqua nello spazio intermedio C, andrebbe continuamente scemando, e si abbassarebbe sempre, il che pure è falso; adunque la quantità dell'acqua che passa per la sezione B, è eguale alla quantità dell'acqua, che passa per la sezione A, e però le sezioni del medesimo fiume scaricano, &c. Che si douea dimostrare,

PRO-

Le sezioni del medesimo fiume scaricano uguali quantità d'acqua in tempi eguali, ancorché le sezioni medesime siano disuguali.

Continuity equation

For a steady fluid, the flow rate of the canal (Q) is constant along its length, so the average speed of water (v) is inversely proportional to the area (A) of the section of the canal:

$$Q = A \cdot v$$

Moltissime notizie ancora si possono dedurre dalla medesima dottrina, le quali tralascio, perchè ciascheduno da se stesso le potrà facilmente intendere, fermata bene, che averà questa massima; che non è possibile pronunziare niente di certo intorno alla **quantità dell'acqua** corrente, con considerate solo la semplice misura volgare dell'acqua senza la velocità, siccome per lo contrario; chi tenesse conto solamente della velocità senza la misura commetterebbe errori grandissimi; imperocchè trattandosi della misura dell'acqua corrente, è necessario, essendo l'acqua corpo, per formare concetto della sua quantità, considerare in essa tutte tre le dimensioni, cioè, larghezza, profondità, e lunghezza; le prime due dimensioni sono osservate da tutti nel modo comune, ed ordinario di misurare le acque correnti; ma viene tralasciata la terza dimensione della lunghezza, e forse tal mancamento è stato commesso, per essere riputata la lunghezza dell'acqua corrente in un certo modo infinita, mentre non finisce mai di passare, e come infinita è stata giudicata incomprendibile, e tale, che non se ne possa avere determinata notizia, e pertanto non è stato di essa tenuto conto alcuno; ma se noi più attentamente faremo riflessione alla considerazione nostra della velocità dell'

Tom. I.

L

...

acqua,

*As water is a body, in order to get an idea of its **quantity** all three of its dimensions must be taken into account, i.e. width, depth and length.*

Definition of **flow rate** in Guglielmini, *Misura delle acque correnti*, libro I

XI. *Quantità d'acqua* intendiamo tutta la mole dell'acqua, che in un dato tempo scorre per una data fezione.

Quantity of water is all the amount of water that in a given time flows through a given section.

Definition of **flow rate** in Guglielmini, *Della natura dei fiumi*, capitolo IV, regola III

R E G O L A I I I .

Dalla medesima ragione facilmente si può dedurre, che (a) la velocità di un fiume allora sarà maggiore, quando più grande sarà il corpo d'acqua, che porterà; posciachè, (supposto il medesimo pendio, e le medesime resistenze) avrà più forza di superar queste, la copia più grande dell'acqua, come più grave, che la minore: e perciò i fiumi nelle loro piene, corrono con maggiore velocità, che ne' tempi, ne' quali sono più magri di acqua; il che è vero ancora per un'altra ragione, cioè, perchè l'acqua più alta, e per conseguenza maggiormente lontana dal fondo, più si scosta dalle resistenze di esso. Bisogna però avvertire di non lasciarsi ingannare dall'apparenza, che ordinariamente lusinga gli uomini a giudicare della portata dell'acqua di un fiume.

As regards the **flow rate of a river**, both the section and the speed of it have to be taken into account.

DELLA NATURA DE' FIUMI. 287

fiume, dalla grandezza della fezione di esso, senza considerazione della velocità; poichè può darsi il caso, che l'altezza maggiore dell'acqua dipenda dal ritardamento della velocità, non dall'accrescimento di acqua nel fiume; e che in vece, che dall'altezza maggiore si possa arguire maggior velocità, piuttosto si riscontri minore; ma ciò non succederà ne' nostri supposti.

Definition of **flow rate** in Zendrini, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti*, capitolo I, scolio XVI

XVI.

Scolio. Si chiami in grazia di esempio la quantità dell'acqua scaricata da una sezione di un fiume Q; la velocità, larghezza, ed altezza dell'acqua nella sezione rispettivamente V, L, A, il tempo in cui segue lo scarico T; Parimenti la quantità scaricata da un'altra sezione o del medesimo, o di un altro fiume sia q, e gli elementi predetti u, l, a, t; farà l'analogia per il numero precedente Q. q :: ALVT. alut, onde se Q = q, farà ancora ALVT = alut, e se inoltre V = u farà LAT = lat, ovvero T. t :: al. AL, vale a dire, che i tempi dello scarico saranno nella ragione inversa delle sezioni. In oltre, tenendosi la medesima ipotesi di Q = q, se farà T = t, s'averà LAV = lau, e però V. u :: la. LA, cioè le velocità in ragione contraria delle sezioni; e se L = l farà AVT = aut, ovvero T. t :: au. AV; che però date le larghezze delle sezioni eguali, saranno i tempi in ragione reciproca del prodotto dell'altezza viva, e della velocità, e così in qualunque altro modo, supposti i dati, nascono altre analogie come resta manifesto, senza immorar di vantaggio in cosa da se stessa assai facile.

$$Q:q = ALVT:alut$$

- Q, q: quantity of water
- V, u: speed of water in two different sections
- L, l: width of the water in two different sections
- T, t: time of discharge in two different sections

It means that, if $Q = q$, times of discharge are inversely proportional to the sections. But also that, if $Q = q$, speeds of discharge are inversely proportional to the sections.

Bernoulli's theorem

Bernoulli's theorem is valid for ideal incompressible, irrotational, steady and non-viscous fluids.

We consider a pipe of generic shape, where an ideal fluid flows in permanent motion between two sections. We suppose that the fluid does not receive energy from outside and does not lose energy.

The forces that make it work are gravity and the forces due to the pressure exerted by the fluid.

$$L_{\text{pressione}} = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = (p_1 - p_2) \cdot \frac{\Delta m}{\rho}$$

$$L_{\text{gravità}} = -\Delta V_g = -\Delta m g (h_2 - h_1)$$

The **theorem of live forces** establishes that

$$L_{\text{pressione}} + L_{\text{gravità}} = \text{variation of kinetic energy}$$

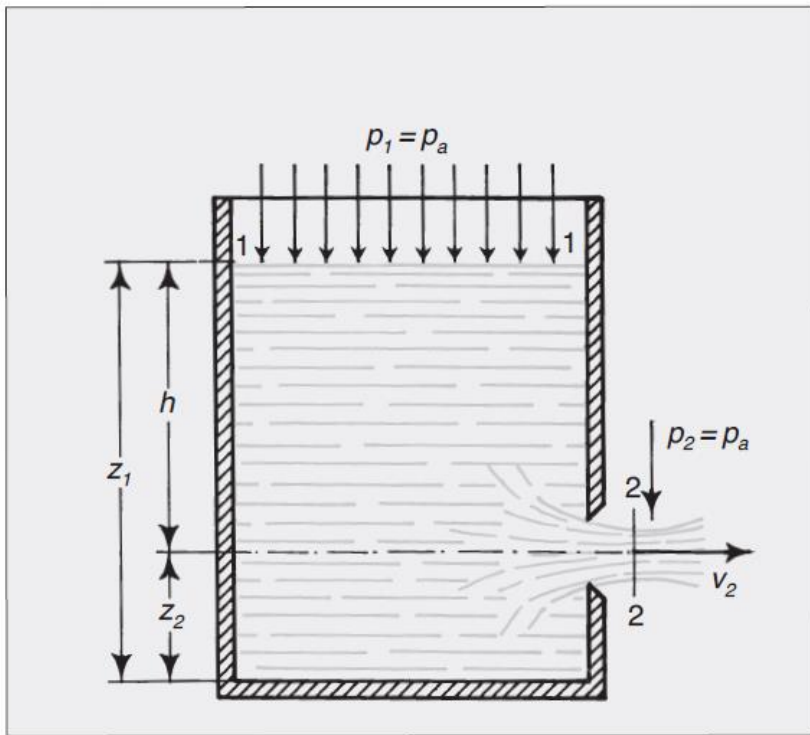
$$(p_1 - p_2) \cdot \frac{\Delta m}{\rho} - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2$$

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 = \text{constant}$$

Bernoulli's theorem

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g h = \text{constant}$$

Consequences of Bernoulli's theorem



Suppose the vessel has a very large volume so that the level of water does not change because of the efflux from the hole in the inside.

We apply Bernoulli's theorem to section 1 and 2, with the hypothesis:

$$p_1 = p_2 = \text{atmospheric pressure}; \quad v_1 = 0$$

So we have that:

$$z_1 = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Suppose $z_1 - z_2 = h$. The speed of the fluid is:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Torricelli's law

Consequences of Bernoulli's theorem

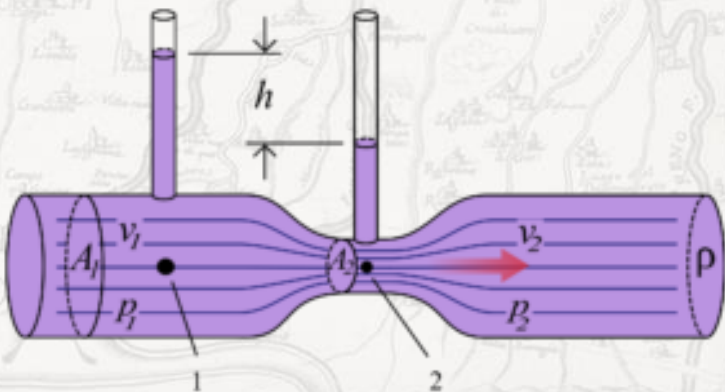
- If $v_1 = v_2 = 0$ (equilibrium), Bernoulli's theorem contains Stevin's law as a special case.

$$\frac{p}{\rho} + gh = \text{constant}$$

- If $h_1 = h_2$, an increase in speed corresponds to a decrease in pressure.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{constant}$$

- **Venturi tube** (or venturimeter): device for measuring the speed (incompressible fluid)



It is a tube with an entrance section of A_1 that gets smaller until the value A_2 . We can establish the value of Q (flow rate) and v (speed):

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_{A_1} - p_{A_2})A_1^2 A_2^2}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}; v = 2g \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2} \sqrt{h_{A_1} - h_{A_2}}$$

Focus on Venturi tube

A decrease in the section of the pipeline crossed by a fluid in permanent motion causes an increase in the local speed and a corresponding decrease in the pressure, which is in a given relationship with the speed and therefore with the flow rate. (G. Venturi, Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, appliqué à l'explication de différens phénomènes hydrauliques, 1797)

If we apply an incompressible fluid continuity equation and Bernoulli's theorem, we obtain that:

$$A_1 v_{A_1} = A_2 v_{A_2}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_{A_1}^2 + p_{A_1} = \frac{1}{2} \rho v_{A_2}^2 + p_{A_2}$$

So

$$\frac{1}{2} \rho (v_{A_1}^2 - v_{A_2}^2) + p_{A_1} - p_{A_2} = 0$$

Since $Q = A_1 v_{A_1} = A_2 v_{A_2}$

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{Q^2}{A_1^2} - \frac{Q^2}{A_2^2} \right) + p_{A_1} - p_{A_2} = 0$$

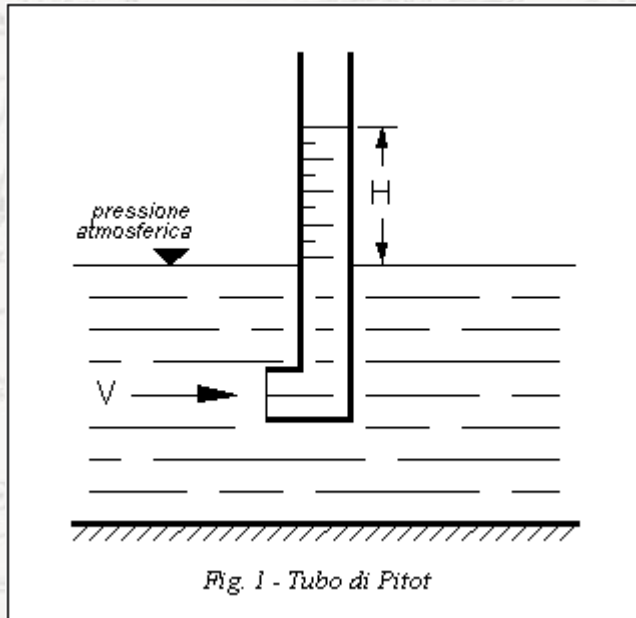
From this equation we can obtain the values of Q (flow rate) and v (speed).

A focus on the Pitot tube

Another way to measure the speed of a fluid is to determine the pressure necessary to stop its motion.

The Pitot tube was used for the first time to measure the speed of the River Seine (Henri Pitot, 1732).

It is an L-shaped tube, a branch of which is immersed in the moving fluid with the axis aligned with the fluid threads and the mouth placed against the current. The other branch, that is vertically posed, emerges from water.



The fluid that enters the tube stops, while the remaining part of the fluid continues its motion. If the tube is horizontally positioned, for Bernoulli's theorem we have:

$$\frac{p_{est}}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{v_{est}^2}{g} = \frac{p_{int}}{\rho g}$$

Since $H = \frac{p_{int}}{\rho g} - \frac{p_{est}}{\rho g}$ represents the gap (directly measurable), we obtain

$$v = \sqrt{2gH}$$

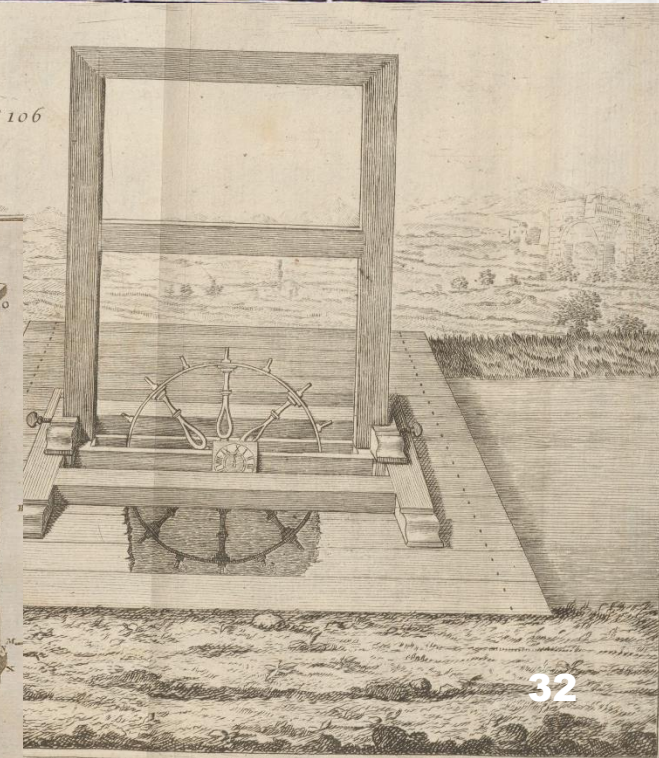
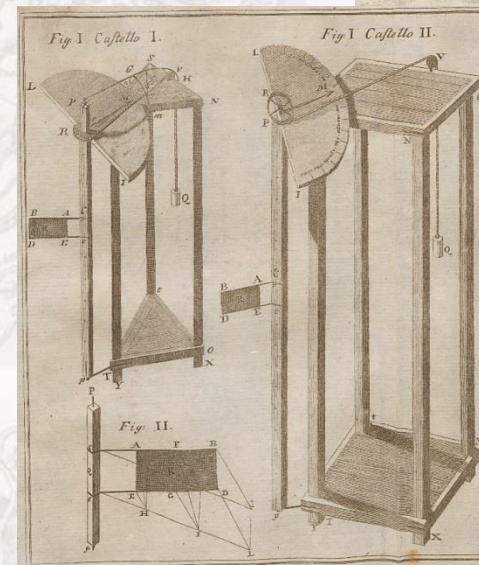
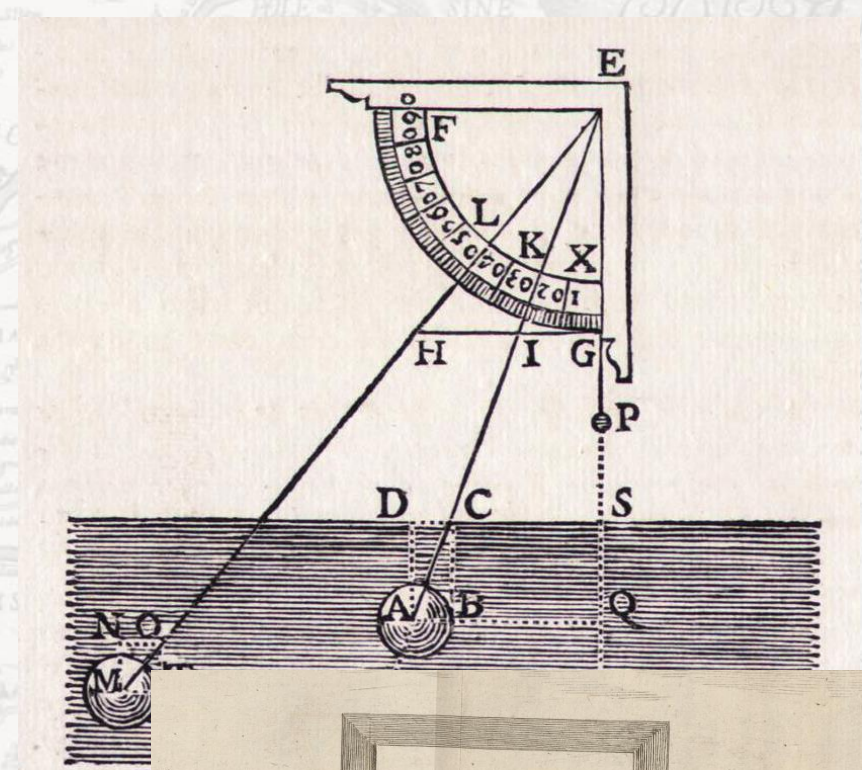
Hydraulics and Hydrometry. Devices for measuring the speed of water at different depths

Devices for measuring the speed :

- **Fixed water gauges** (rigid and graduated beam: padimeter) **and moving water gauges** (i.e. beams that are immersed in order to measure the distance between the bottom level and the free-surface level, soundings, composed of a metal wire with a ballast in an extremity)
- **Differential pressure gauge**, used to measure the pressure drops between two points of a pipeline under pressure (Pitot tube, Venturi tube)
- **Floats**: they are frequently used in open canals and are made of empty metallic spheres that are thrown into canals or rivers in a straight way so that knowing the time t taken to cover a given distance s , it is possible to deduce the speed of the float $v = \frac{s}{t}$, and so the speed of the water that drags it.
- **Asta ritrometrica** (from Greek word $\rhoειθρ\acute{o}\nu$ that means «current of a river»).

Fixed hydraulic speedometers

- «pendulum ball with quadrant» («palla a pendolo con quadrante») by D. Guglielmini (*Aquarum fluentium mensura*, 1690-91)
- «Michelotti's paddle wheel» («ruota con palmette») by F. D. Michelotti (*Sperimenti idraulici*, 1767-71). By counting the number of turns made by the wheel in a given time, this device gave the velocity of the flow at the point where it hit the blade of the wheel.
- «hydraulic fan» («ventola idraulica») by L. Ximenes (*Nuove sperienze idrauliche fatte ne' canali e ne' fiumi per verificare le principali leggi e fenomeni delle acque correnti*, 1780)



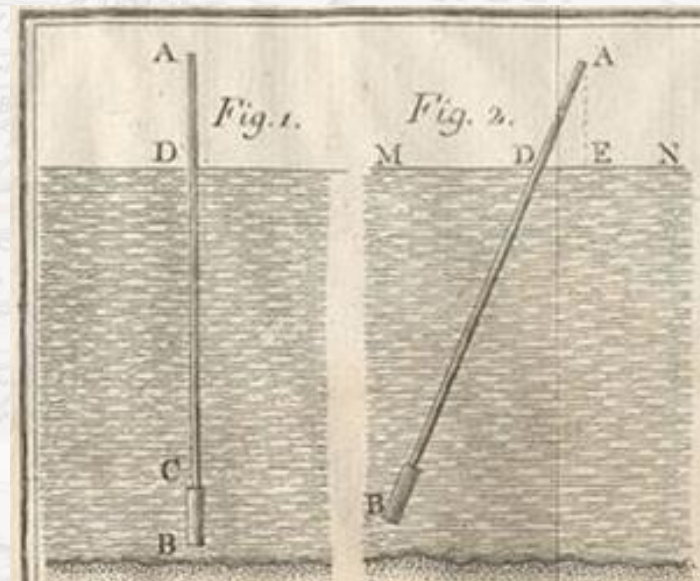
Floating hydraulic speedometers

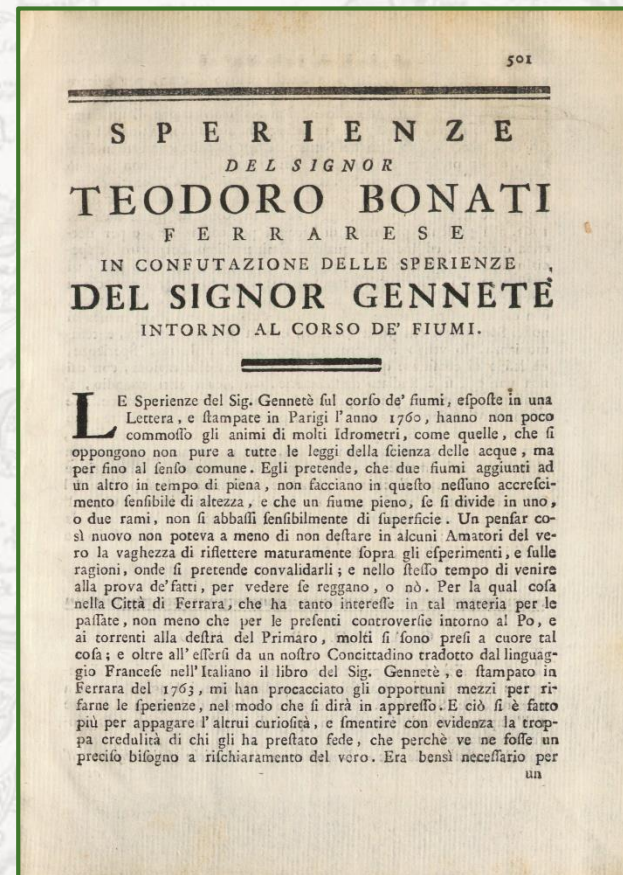
propone un' asta di legno, lunga quanto si vuole, con un peso attaccatovi in fondo per tenerla diritta, ed una corona di zucche, o vesciche B, C, legatevi dal capo A; sicchè immersa nel fiume, galleggiar possa la sola parte B A C, ed il resto rimanere sommerso. Il Grandi dubi-

- «asta idrometrica» (N. Cabeo, 1646).
- “asta ritrometrica”, a rod for measuring flow that was invented by T. Bonati (1784).



SE ad un' Asta AC (fig. 1.) di legno più leggiero dell' acqua si aggiunga una tal porzione CB di metallo, che mettendo tutta l' asta in una acqua stagnante essa galleggi con una porzione AD di un piede o più, fuori dell' acqua ed a piombo, si avrà una delle *Aste ritrometriche* da me proposte nel 1784. in questa Raccolta per iscoprire le velocità sotto la superficie dell' acqua nei fiumi. Mostrai, che se la stess' asta AB (fig. 2.) messa in un' acqua corrente da M verso N verrà portata colla porzione AD inclinata all' avanti, la velocità maggiore starà alla superficie; e che si avrà il contrario se la parte AD penderà all' indietro.





1766

Saggio di una Nuova Teoria del movimento delle acque pei Fiumi, e Nuovo metodo per trovare colla sperienza la quantità dell'acqua corrente per un fiume (1784)

Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente (1799)

Sites

Castelli Benedetto, *Della misura dell'acque correnti* (Roma, 1628)

<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3705668>

Torricelli Evangelista, *Opera geometrica* (Firenze, 1644)

<https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1275063>

Bernoulli Daniel, *Hydrodynamica*, Argentorati, Deckeri, 1738.

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1227737>

Bernoulli Johann, *Hydraulica*, in *Opera omnia*, Lausannae et Genevae, Bousquet, 1742, t. IV, pp. 391-493.

<https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/1053416>

Euler Leonhard

- *Principes généraux de l'état d'équilibre d'un fluide*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Principes généraux du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Berlin (1757)
- *Recherches sur le mouvement des rivières* (1767)

The Euler archive: <http://eulerarchive.maa.org/>

Raccolta d'autori che trattano del moto dell'acque: <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3537770>