9th EUROPEAN SUMMER UNIVERSITY
ON THE HISTORY AND EPISTEMOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION

ESU-9

Workshop: ***Starting from the history of mathematics in Late Modern Italy (XVIII-XX centuries): From primary sources to mathematical concepts***

The dissemination of infinitesimal calculus in Italy

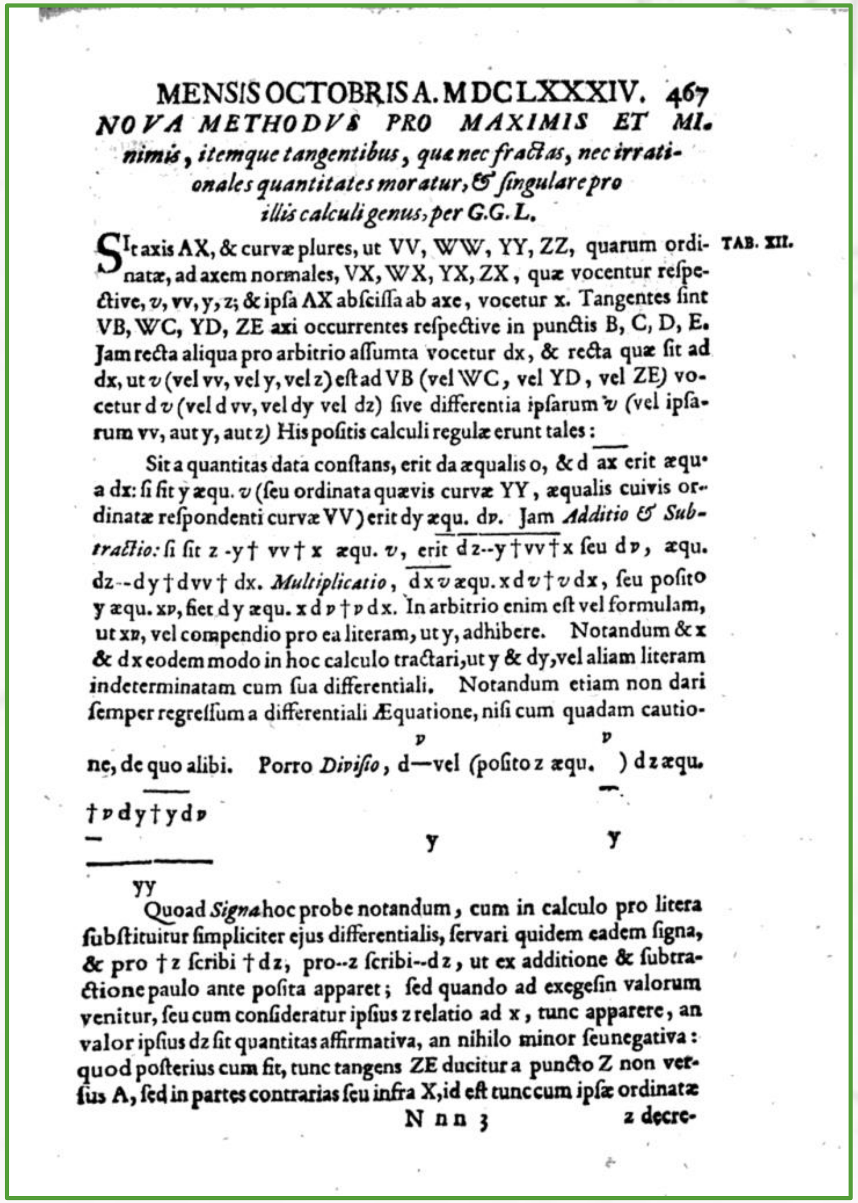
Maria Giulia Lugaresi (Università di Ferrara)

Elena Scalambro (Università di Torino)

Dipartimento di Matematica e Informatica

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

G. W. Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, Acta Eruditorum, 1684.



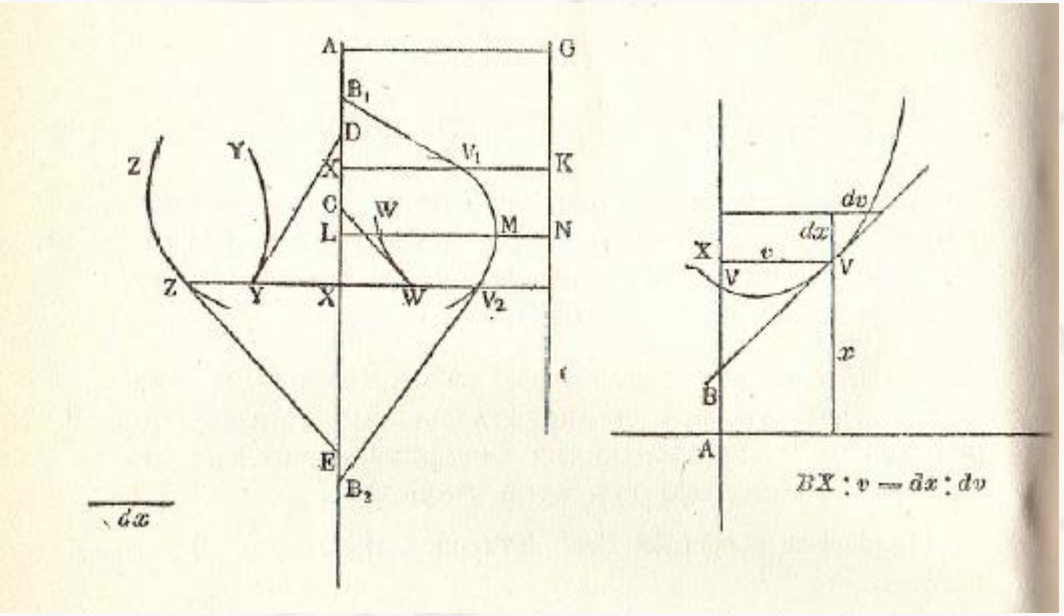
NOVA METHODVS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur reſpective, *v*, vv, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut *v* (vel vv, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d*v* (vel d vv, vel dy vel dz) ſive differentia ipſarum *v* (vel ipſarum vv, aut y, aut z) His poſitis calculi regulæ erunt tales: TAB. XII.

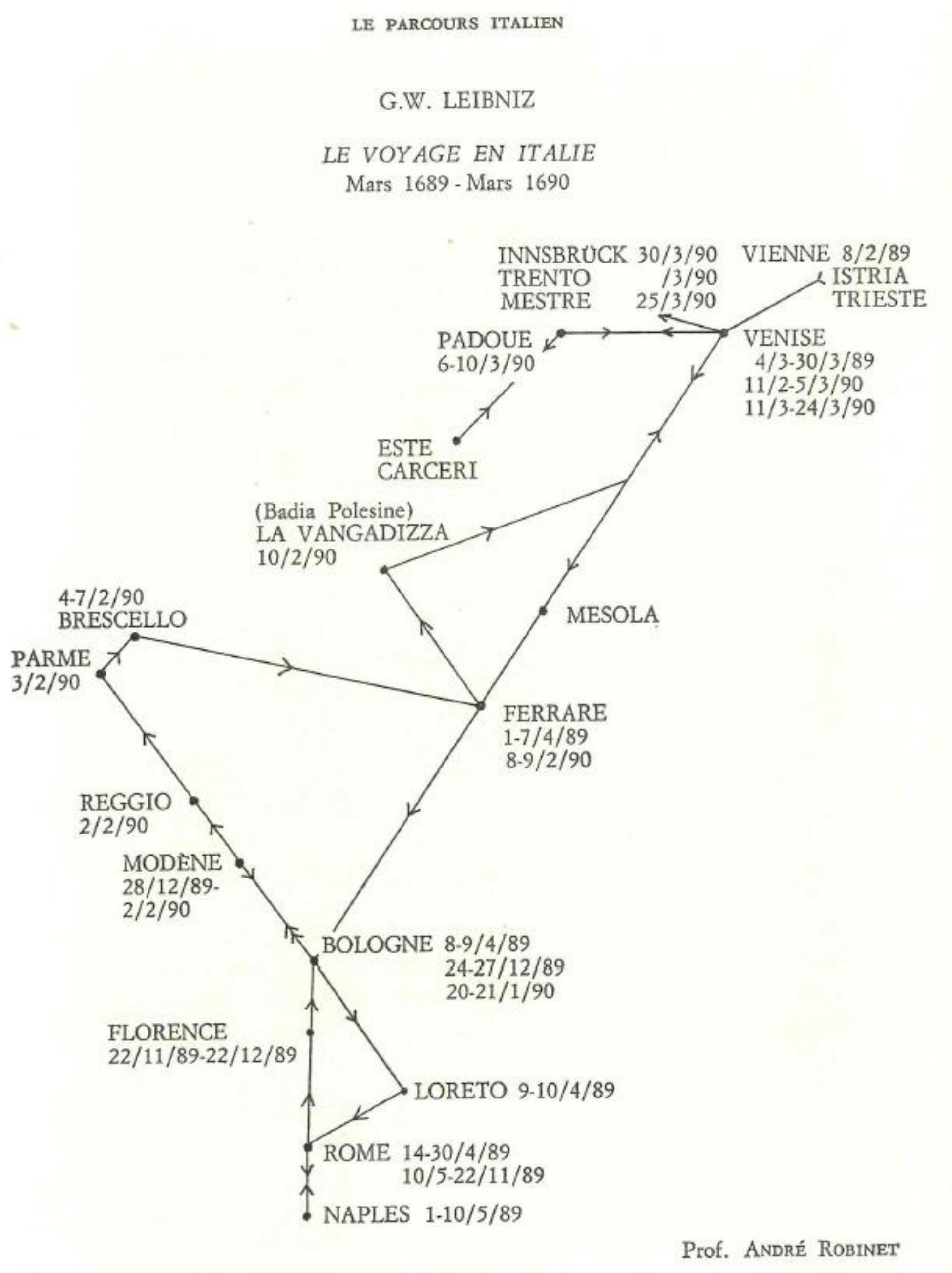
Sit a quantitas data conſtans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. *v* (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. d*v*. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit z -y † vv † x æqu. *v*, erit d z--y † vv † x ſeu d*v*, æqu. dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, d x *v* æqu. x d *v* † *v* dx, ſeu poſito y æqu. x*v*, fiet d y æqu. x d *v* † *v* dx. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut x*v*, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Diviſio*, d *v*/y vel (poſito z æqu. *v*/y) d z æqu.

† *v* dy † y d *v*
— ———
yy

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro † z ſcribi † d z, pro--z ſcribi--d z, ut ex additione & ſubtractione paulo ante poſita apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor ſeu negativa: quod poſterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ z decre-



Leibniz's journey through Italy (March 1689 - March 1690)



Robinet A., *G. W. Leibniz Iter Italicum mars 1689-mars 1690*, Olschki, 1988

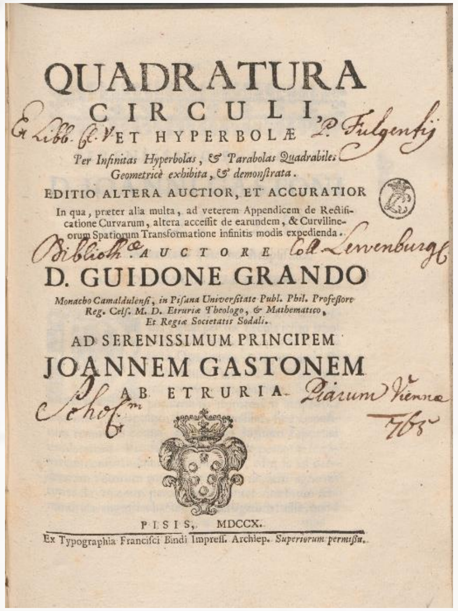
The Leibnizian tradition in Italy

Guido Grandi

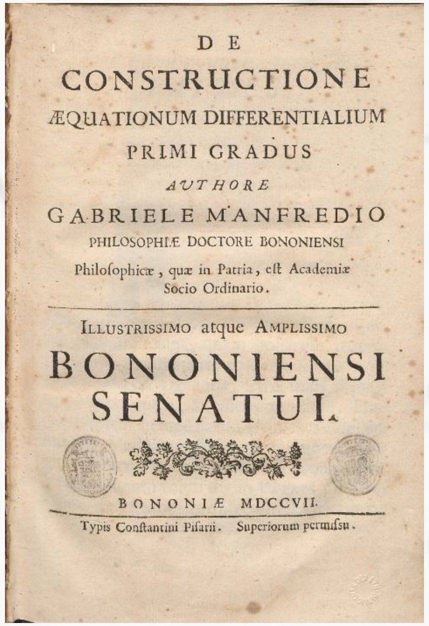
Gabriele Manfredi

Jacopo Riccati

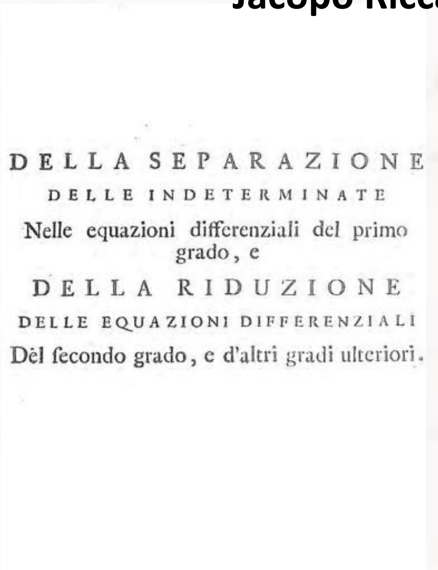
Michelangelo Fardella



QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ
Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles Geometricè exhibita, & demonstrata.
EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR
In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.
AUCTORE
D. GUIDONE GRANDO
Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico, Et Regiæ Societatis Sodali.
AD SERENISSIMUM PRINCIPEM
JOANNEM GASTONEM
AB ETRURIA
PISIS, MDCCX.
Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiep. Superiorum permissu.

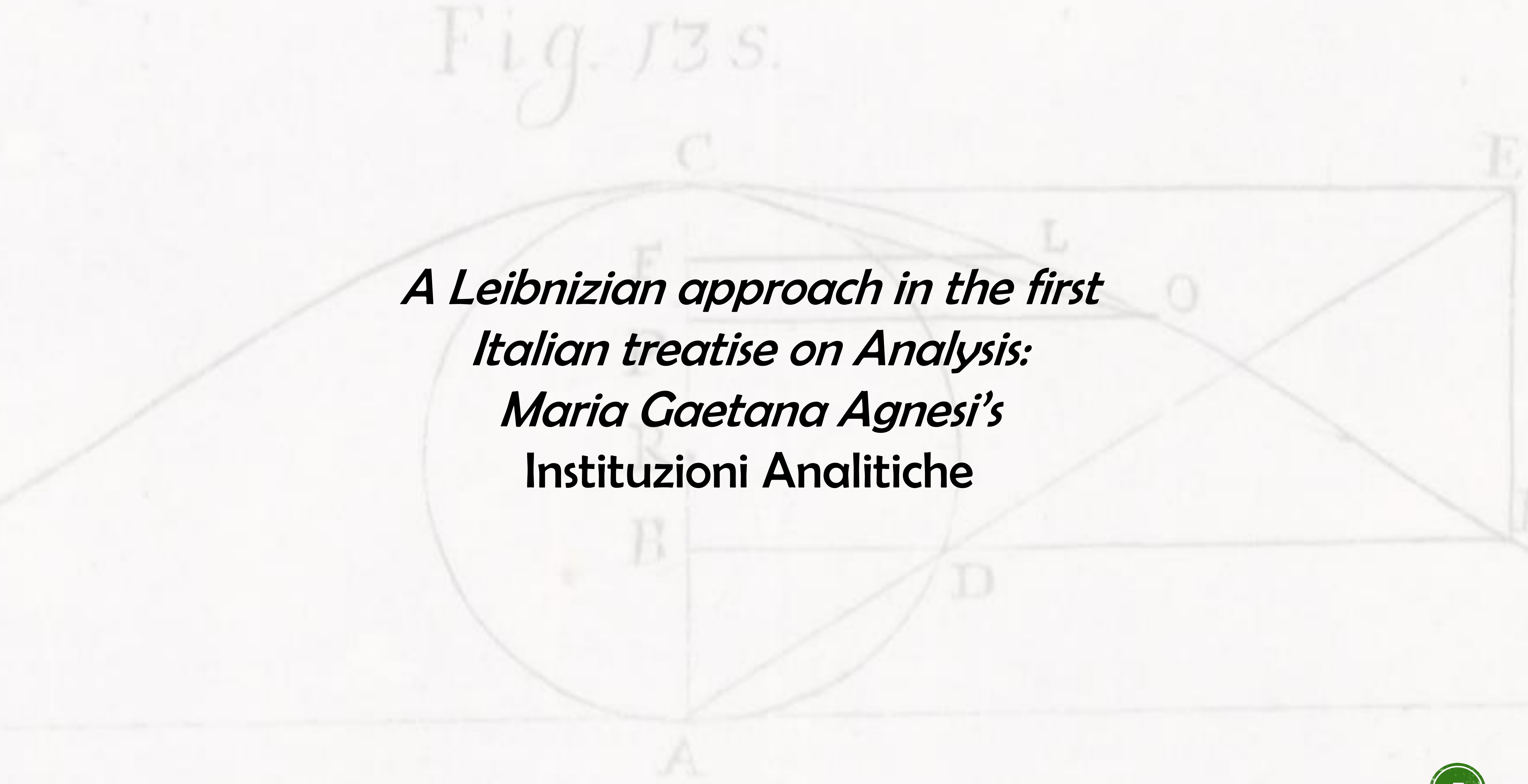


DE
CONSTRUCTIONE
ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM
PRIMI GRADUS
AUTHORE
GABRIELE MANFREDIO
PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI
Philosophicæ, quæ in Patria, est Academiæ Socio Ordinario.
ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO
BONONIENSI
SENATUI.
BONONIÆ MDCCVII.
Typis Constantini Pisarii. Superiorum permissu.



DELLA SEPARAZIONE
DELLE INDETERMINATE
Nelle equazioni differenziali del primo grado, e
DELLA RIDUZIONE
DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
Del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori.

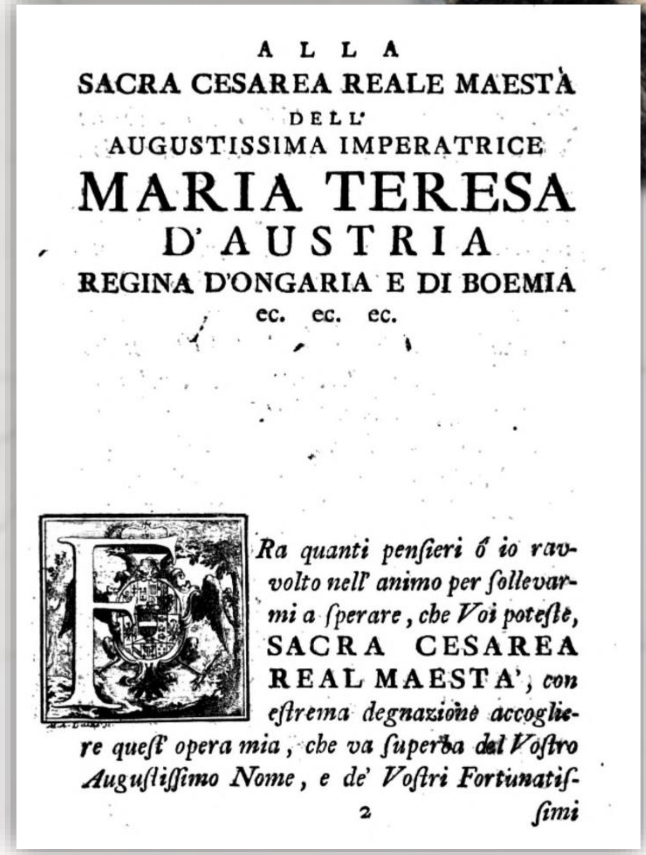
441
INDICE
PARTE PRIMA
Dei metodi inventati da varj celebri Autori per separare le indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado.
PARTE SECONDA
Dei metodi inventati dall' Autore per separare le indeterminate nelle equazioni differenziali del primo grado.
PARTE TERZA
Della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado.
APPENDICE PRIMA
Della maniera di evitare le seconde, e le ulteriori differenze.
APPENDICE SECONDA
Della riduzione delle equazioni differenziali del terzo grado.



A Leibnizian approach in the first Italian treatise on Analysis: Maria Gaetana Agnesi's Instituzioni Analitiche

A woman in mathematics: M.G. Agnesi (1718-1799)

- May 16, 1718: birth into a wealthy family from Milan (silk trade)
- **Higher education at home**, encouraged by her father
  - ➡ **passion for maths**
- 1745-48: drafting of the treatise ***Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana***
- After her father's death (March 19, 1752): charity work
- 1771: management of the women's section of the Pio Albergo Trivulzio
- January 9, 1799: death



A L L A
SACRA CESAREA REALE MAESTÀ
DELL'
AUGUSTISSIMA IMPERATRICE
MARIA TERESA
D' AUSTRIA
REGINA D'ONGARIA E DI BOEMIA
ec. ec. ec.

FRa quanti penſieri ò io ravvolto nell' animo per ſollevarmi a ſperare, che Voi poteſte, SACRA CESAREA REAL MAESTA', *con eſtrema degnazione accogliere queſt' opera mia, che va ſuperba del Voſtro Auguſtiſſimo Nome, e de' Voſtri Fortunatiſ-*
2 *ſimi*

[Tilche 1984; Simili 2009; Mazzotti 2007 & 2019; Roero 2014 & 2016; Contestabile 2017]

Instituzioni Analitiche (1748)

Great success of Agnesi's work, **the first treatise in Italian on Analysis.** [Roero 2016]

- ❑ Praiseworthy reviews from both pedagogical and mathematical perspectives
- ❑ Congratulatory letters from leading figures in Italian science (including Laura Bassi), religious (Pope Benedetto XIV) and political authorities (Maria Teresa d'Austria)

> *Marvel at that, with profound knowledge, **a woman produced such a great book** in the world. The author **is Italian**, gentlemen, not Dutch, an illustrious, **wise woman, who honours her country**.* [Goldoni 1756]

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
A G N E S I
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.

IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

- ❑ Two translations, in French (P.T. Antelmy, 1775) and English (J. Colson, 1801)

Calculus in Agnesi's treatise

431

INSTITUZIONI
ANALITICHE

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.

L'Analiſi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Fluſſioni ſuole chiamarſi, è quella, che verſa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine ſieno eſſe differenze. Queſto calcolo contiene i Metodi delle Tangen-

Agnesi's definition of «differential calculus» or «calculus of fluxions»

The analysis of infinitely small quantities, which can be called Differential Calculus or Calculus of Fluxions, is that which concerns differences in variable quantities, of whatever order those differences may be.

Variable quantities

1. Col nome di quantità variabili ſi vogliono ſignificare quelle, che ſono capaci di aumento, e di decremento, e ſi concepiſcono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

The name "variable quantities" designates those that can increase or decrease, and they are conceived as fluents [...] generated by a continuous motion..

Difference (or fluxion) of variable quantities

3. Si chiama differenza, o fluſſione di una quantità variabile quella porzione infiniteſima, cioè tanto picco- la, che ad eſſa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui creſcendo, o diminuendoſi la medeſima variabile, poſſa ciò non oſtante aſſumerſi per la ſteſſa di prima.

"Difference", or "fluxion" of a variable quantity, is the name of that infinitesimal portion, i.e. so small that its ratio to the variable quantity is smaller than the proportion between that variable quantity and any other variable, whereby if such variable increases or decreases, it may be considered the same as before.

The birth of the 'witch' of Agnesi

- Described within the ***Instituzioni*** (*Problema III*, pp. 380-382)
- Already studied by P. **Fermat** (1666) and G. **Grandi** (1703)

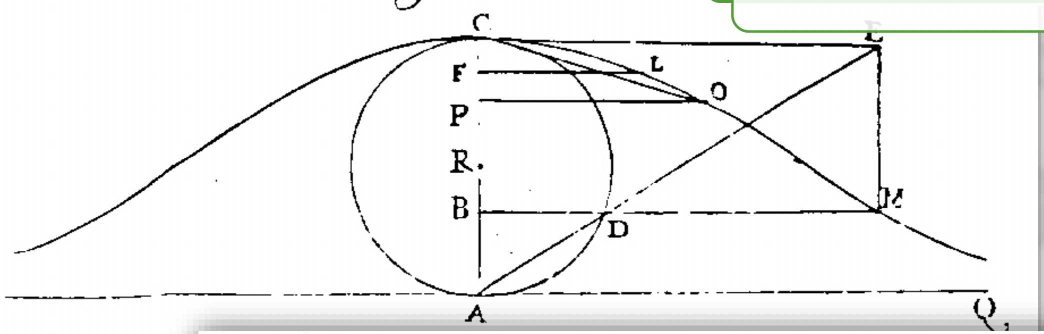
Versiera

From the Latin *'cum sinus verso'*

Name *'adversaria'* (*'strega'* in old Italian)

'Witch' of Agnesi

Fig. 135.



PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC*; ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC*, che taglierà il circolo in* D*, ſia* AB, BD :: AC *alla* BM*, e perchè infiniti ſono i punti* M*, che ſoddisfanno al problema, ſe ne dimanda il luogo.*

Given the semicircle ADC of diameter AC, search outside it for the point M such that, after leading the perpendicular MB to the diameter AC that will intersect the circle in D, it is

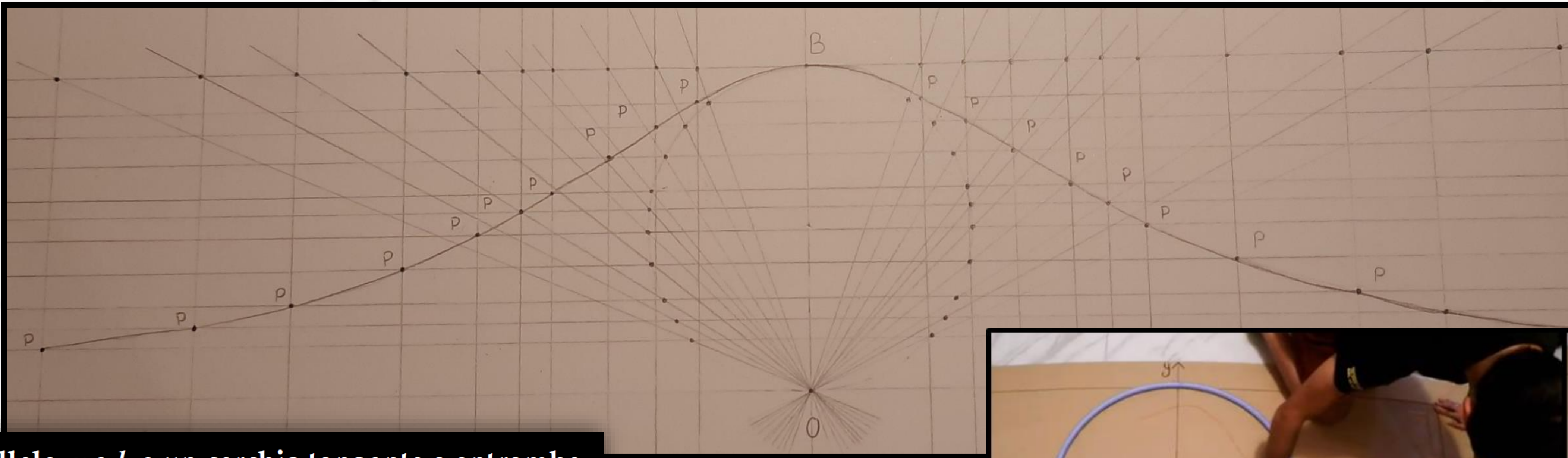
$$AB : BD = AC : BM$$

and, since the points M that satisfy the problem are infinite, its locus is asked.

The construction of the Versiera by points

Individual or group activity

Rhyming instructions (for lower secondary school)



Una coppia di rette parallele, *x* e *l*, e un cerchio tangente a entrambe nei punti O e B rispettivamente, disegnerete.

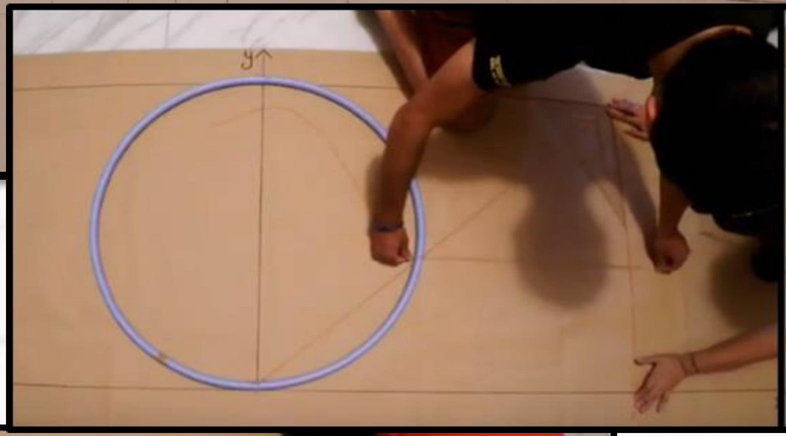
La retta per i punti O e B traccerete
e infine una retta per il punto O, che interseca la circonferenza in un punto M, creerete.

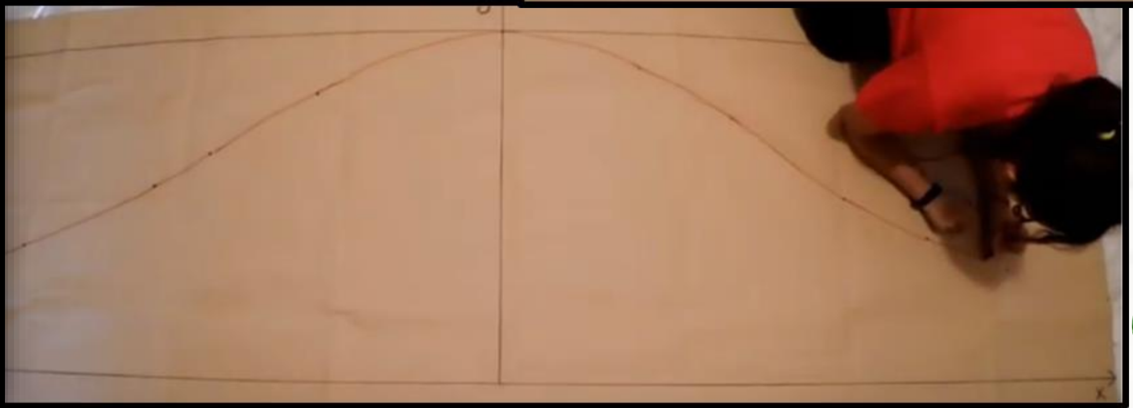
N il punto di intersezione tra questa retta e la retta *l* sarà
e da lì una perpendicolare alla retta *x* cadrà.

Il momento di tracciare la parallela alla retta *l* passante per M è arrivato,
il punto P di intersezione tra le ultime due rette avete trovato.

P è uno dei punti della mia versiera,
al variare di M sulla circonferenza troverete la sua forma vera!

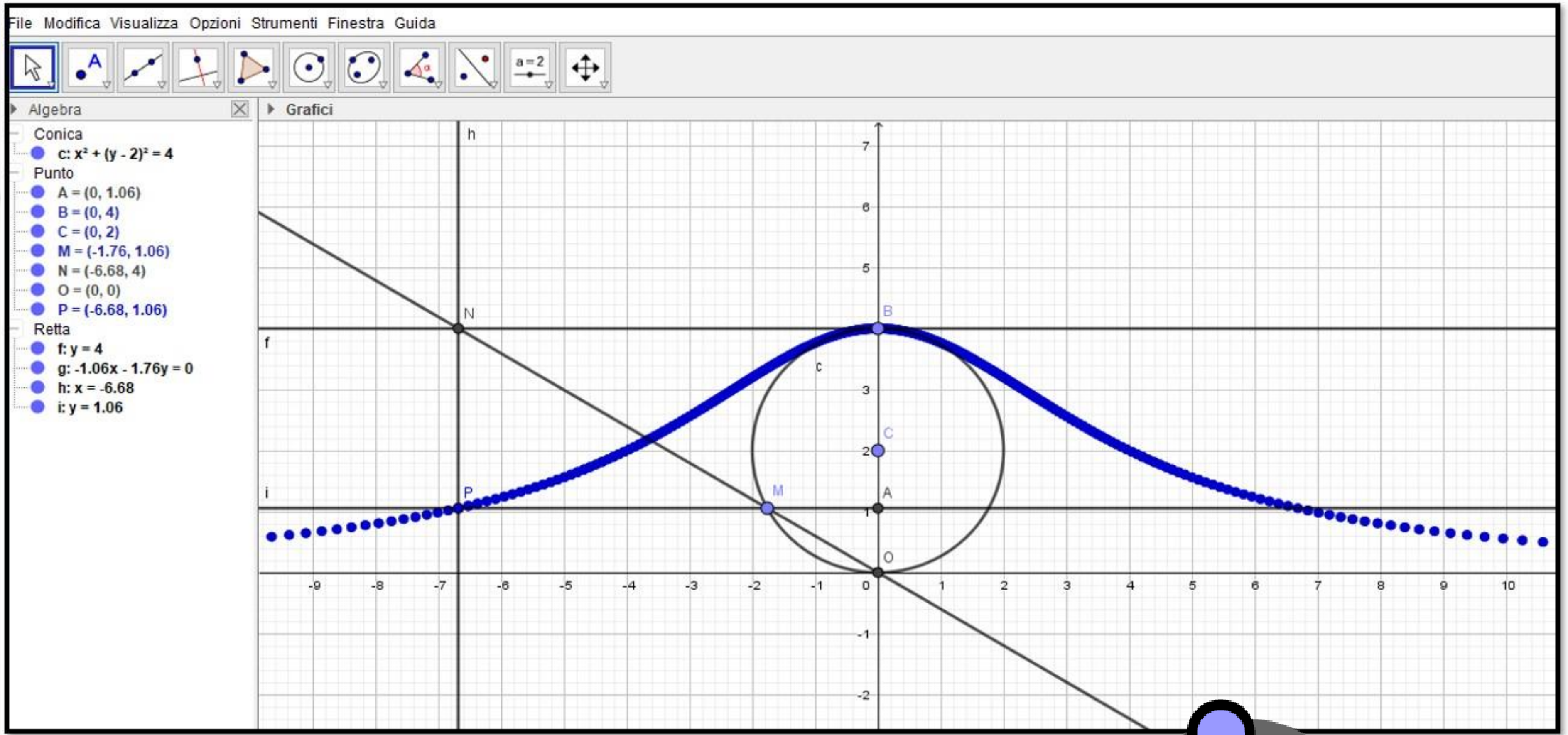
Embodied aspects





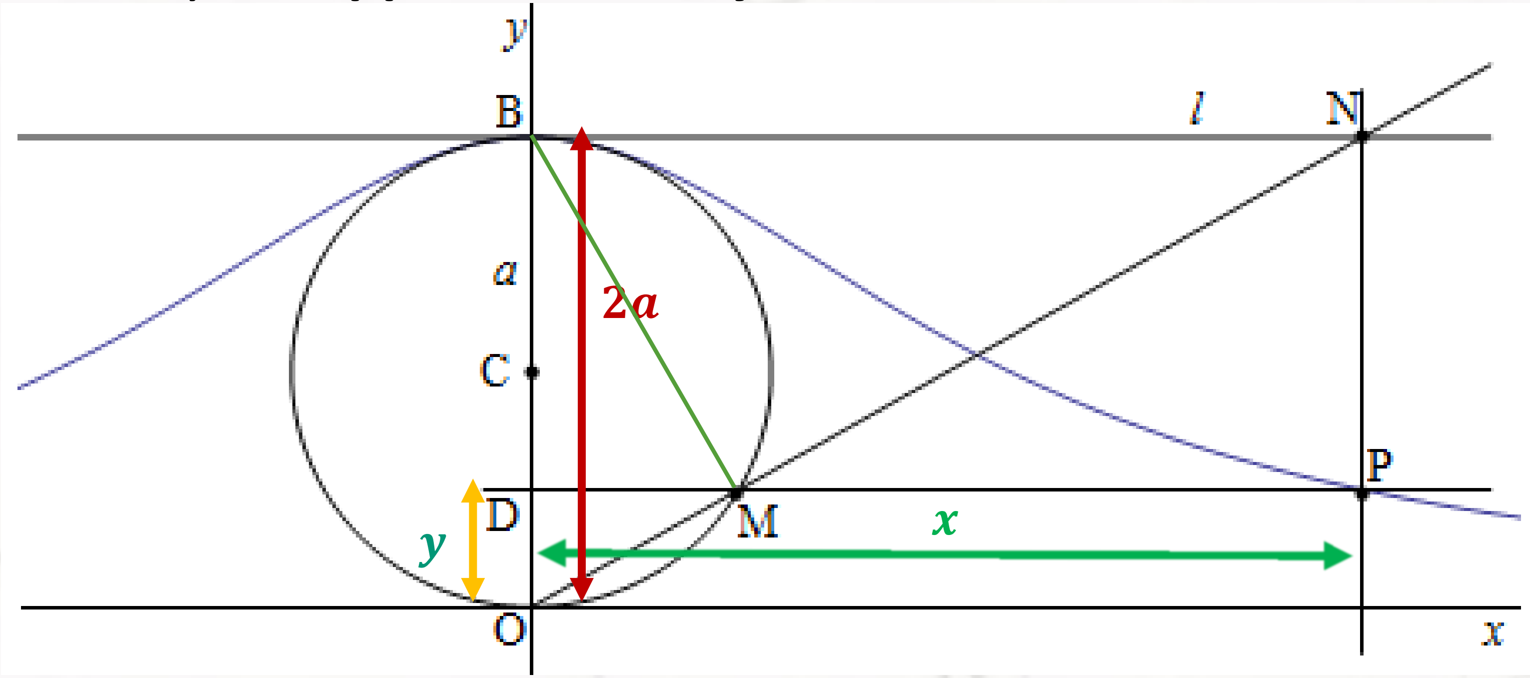
The dynamic construction of the Versiera with GeoGebra

- ❑ Computer skill
- ❑ Use of the dynamic geometry software **GeoGebra**
- ❑ Key concept: transition **from discrete to continuous**



From the curve to the equation

Activity for **upper secondary school**



$DMO \cong BNO$

$\Rightarrow \boxed{OD:DM = OB:BN}$

Furthermore, $BN \equiv DP$

OMB right triangle

By Euclid's second theorem

$\Rightarrow OD:DM = DM:DB$

which implies $DM^2 = OD \cdot DB$

$DB = 2a - y$

$\Rightarrow DM = \sqrt{y(2a-y)}$

Returning to the initial proportion, it follows:

$$y : \sqrt{y(2a-y)} = 2a : x$$

$\Rightarrow$

Equation of the curve

$$\boldsymbol{y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}}$$

Guided reading of the *Preface*

ſimi Auſpicj, un ſolo mi conforta, ed è que-
ſto la conſiderazione del Voſtro Seſſo, che da
VOI illuſtrato per bella ſorte è pur mio.
Queſto penſiero mi à ſoſtenuta nella fatica,
e non mi à laſciato ſentire il riſchio dell'
impreſa; e veramente ſe in qualche tempo
poteva giuſtificarſi l'ardimento di una Don-
na, che tentaſſe ſeguire i rapidi voli di una
Scienza, che ſpazia mai ſempre negli Infini-
ti, in quel tempo eſſere ciò doveva, nel quale
regna una DONNA, e regna con univerſa-
le ammirazione. Parmi in fatti, che in que-

- A work written by a woman and **dedicated to a woman**: the Empress Maria Teresa of Austria.

[...] the consideration of Your gender, which You illustrated, by good fortune is also mine. This thought sustained me in my toil, and didn't let me feel the risk of the undertaking. [...] May all women serve the glory of their sex, and each one contributes to the increase of the splendour in which You envelop it.

- Form of **social commitment:** being useful to society, making her intellectual and human talents available to others.

New Institutions of Analysis seemed to me very useful and necessary. [...] How difficult it is to find that [exposition], which is endowed with due clarity and simplicity, omitting all that is superfluous, without leaving anything that might be useful or necessary, and which proceeds with that natural order in which perhaps the best teaching consists of.

tica di andare fra tanti libri ripeſcando i metodi di re-
cente invenzione, mi ſembravano utiliſſime, e neceſſa-
rie nuove Inſtituzioni di Analiſi. Le nuove ſcoperte
m'ànno obbligata ad un'altra diſpoſizione di coſe, e
ben ſa chi pon mano in sì fatte materie, quanto ſia
difficile il ritrovare quella, che ſia dotata della dovuta
chiarezza, e ſemplicità, omettendo tutto il ſuperfluo,
ſenza laſciare coſa alcuna, che eſſer poſſa utile o ne-
ceſſaria, e che proceda con quell'ordine naturale, in
cui forſe conſiſte la miglior iſtruzione, ed il maggior
lume. Queſto naturale ordine io ô certamente ſempre
avuto in viſta, e l'ô ſommamente procurato, ma non
ſo poi ſe ſarò ſtata baſtantemente fortunata per conſe-
guirlo.

Guided reading of the *Preface*

- **Educational purposes**, also based on personal experience

[...] they are disconnected, without order, and scattered here and there in the works of many Authors [...] so that a Beginner could certainly not reduce the subjects to a method, even if he were equipped with all the books.

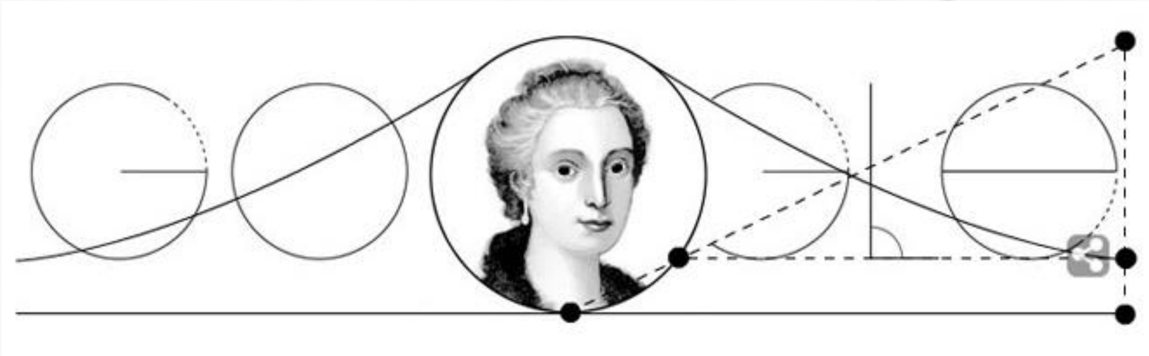
ſe troppo rigida di lui modeſtia . Al ſopraccennato in-
comodo poſſono rimediare , non v' â dubbio , in parte
i buoni libri , quando eſſi ſieno con quella chiarezza ,
che baſta ſcritti , e con quel metodo , che pur troppo
è neceſſario ; quindi è , che quantunque le coſe Anali-
tiche ſieno tutte pubblicate con le ſtampe , pure per-
chè eſſe ſono ſcollegate , ſenz' ordine , e ſparſe quà , e
là nell' opere di molti Autori , e principalmente negli
Atti di Lipſia , nelle Memorie dell' Accademia di Pari-
gi , ed in altri Giornali , coſicchè non potrebbe certa-
mente un Principiante ridurre a metodo le materie ,
quando anche egli foſſe di tutti i libri fornito , pensò
il rinomato Padre Renau al comune vantaggio , e die-

me ; mi ſono perciò diſpenſata dal tradurla in Latino
Idioma (comecchè da alcuni credaſi più convenire a
tal materia) sì per l' autorevole eſempio di tanti cele-
bri Matematici Oltramontani , ed Italiani ancora , le
di cui opere nella loro natìa favella vanno a comune
vantaggio ſtampate , sì pel naturale mio rincreſcimento
alla materiale fatica di traſcrivere in Latino ciò , che
aveva di già ſcritto in Italiano . Nè intendo però farmi
carico di quella purità di lingua , che lodevolmente
viene praticata in materie da queſta diverſe , avendo io
avuto in mira più , che ogni altra coſa , la neceſſaria
poſſibile chiarezza .

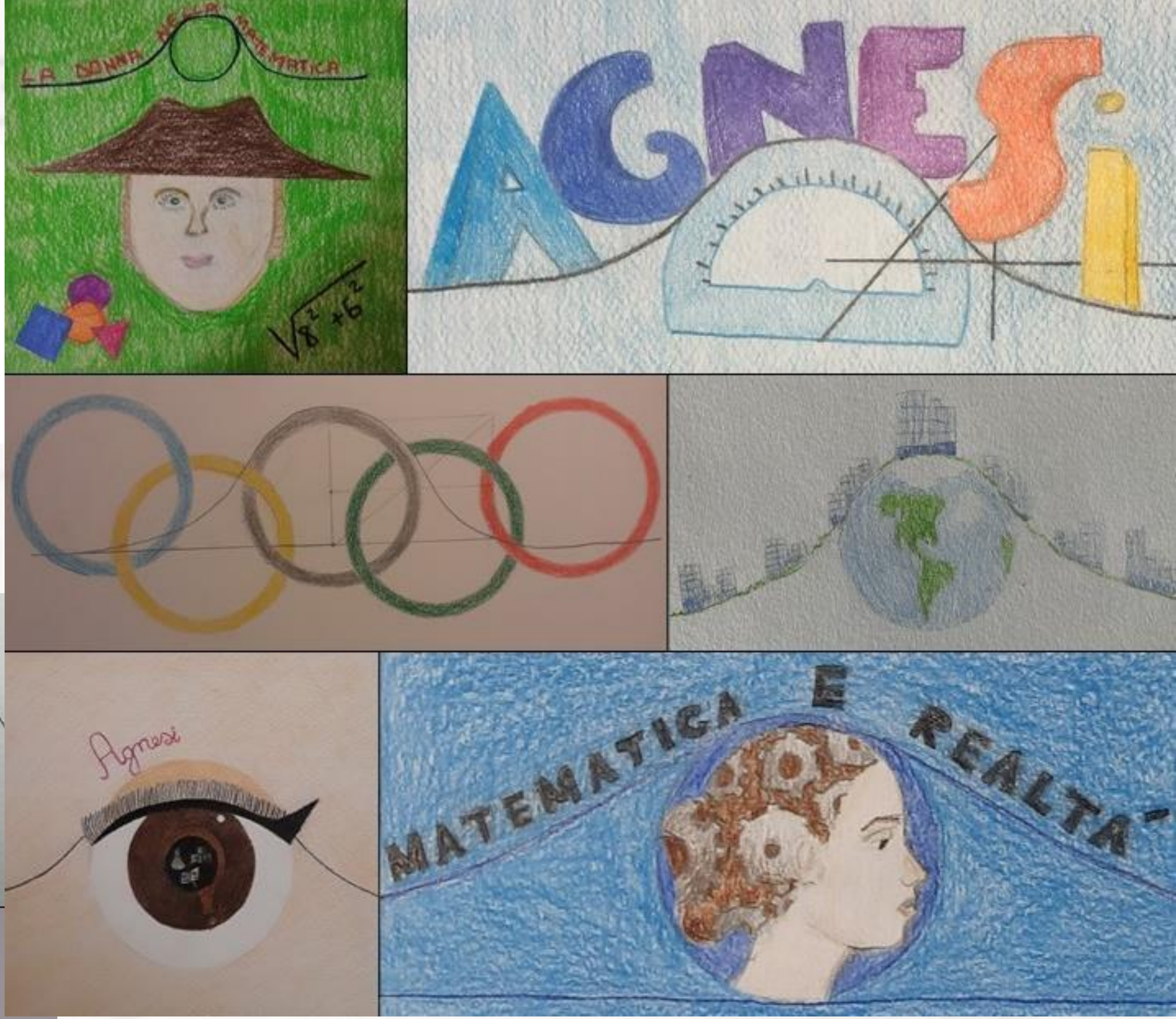
- First systematic treatment of Analysis in **Italian**.

[...] I dispensed myself from translating it into Latin Idiom [...]. Nor do I intend, however, to make myself responsible for that purity of language [...] since I had in mind, more than anything else, the necessary possible clarity.

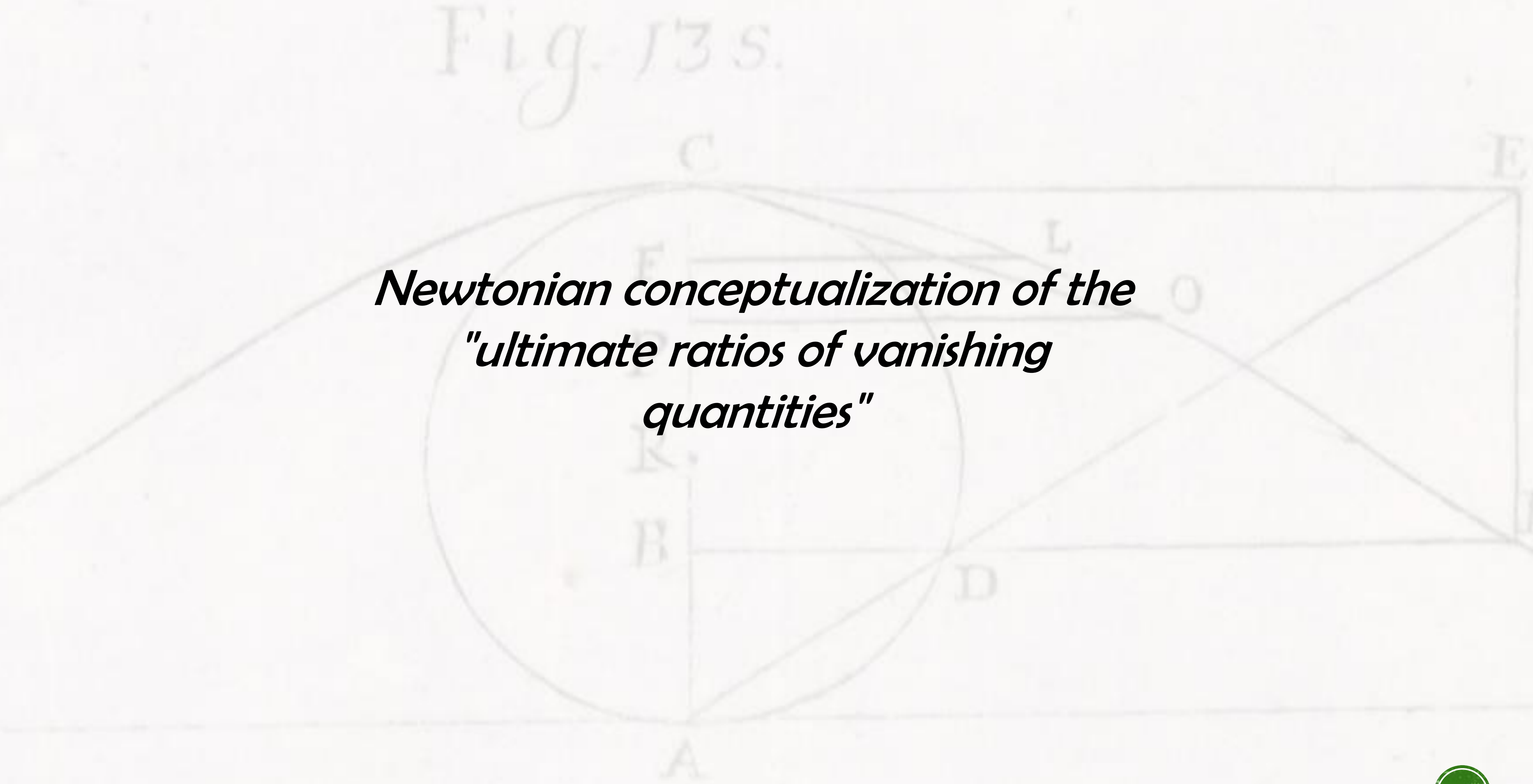
From maths to art



From the doodle for the 296th anniversary of Agnesi's birth…



… to the students' artworks.

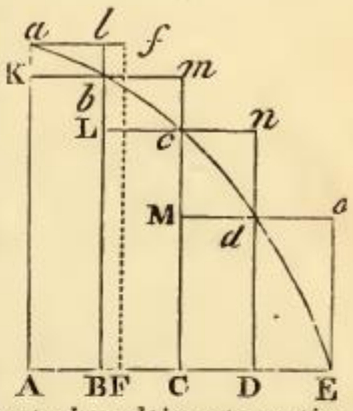


Newtonian conceptualization of the "ultimate ratios of vanishing quantities"

Newton and the method of «first and ultimate ratios»

LEMMA II.

If in any figure AacE, *terminated by the right lines* Aa, AE, *and the curve* acE, *there be inscribed any number of parallelograms* Ab, Bc, Cd, *&c., comprehended under equal bases* AB, BC, CD, *&c., and the sides,* Bb, Cc, Dd, *&c., parallel to one side* Aa *of the figure; and the parallelograms* aKbl, bLcm, cMdn, *&c., are completed. Then if the breadth of those parallelograms be supposed to be diminished, and their number to be augmented* in infinitum; *I say, that the ultimate ratios which the inscribed figure* AKbLcMdD, *the circumscribed figure* AalbmcndoE, *and curvilinear figure* AabcdE, *will have to one another, are ratios of equality.*



For the difference of the inscribed and circumscribed figures is the sum of the parallelograms K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, that is (from the equality of all their bases), the rectangle under one of their bases K*b* and the sum of their altitudes A*a*, that is, the rectangle AB*la*. But this rectangle, because its breadth AB is supposed diminished *in infinitum*, becomes less than any given space. And therefore (by Lem. I) the figures inscribed and circumscribed become ultimately equal one to the other; and much more will the intermediate curvilinear figure be ultimately equal to either. Q.E.D.

Lemma II. *Se in una figura qualsiasi,* ***AacE****, delimitata dalle rette Aa, AE e dalla curva acE, vengono inscritti un numero qualsiasi di parallelogrammi Ab, Bc, Cd, … con le basi AB, BC, CD, … uguali, e con i lati Bb, Cc, Dd, … paralleli al lato Aa della figura e si completano i parallelogrammi aKbl, bLcm, cMdn, …, allora, se la larghezza di questi parallelogrammi diminuirà e il loro numero aumenterà all'infinito, dico che* ***le ultime ragioni*** *che fanno tra di loro la figura inscritta* ***AKbLcMdD****, quella circoscritta* ***AalbmcndoE****, e quella curvilinea* ***AabcdE*** ***sono ragioni di uguaglianza***.

Newton, *Principia*, Section 1, Book 1.

J. L. Lagrange, *Principj di Analisi Sublime* (*Principles of Sublime Analysis*) (~1754)

The differential calculus

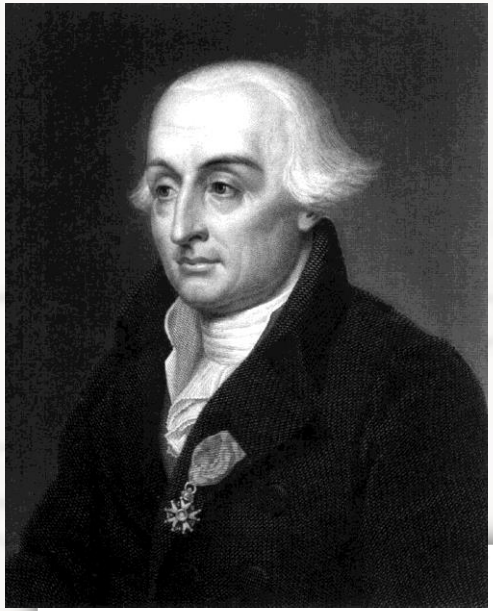
In the second part of the ***Principj*** Lagrange develops the algebraic calculus of finite differences. The differential calculus determines «*the ultimate ratios of the difference dy/dx, i.e. the ultimate terms to which the general ratios of the differences continuously approach, while these continuously decrease*».

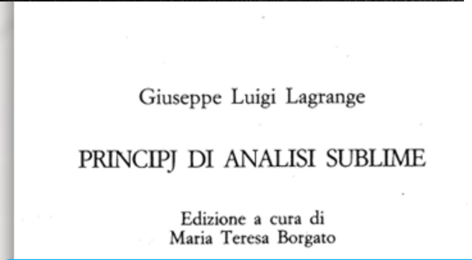
1°. Tutte le quantità variabili crescono, o diminuiscono continuamente, oppure prima crescono e poi diminuiscono, o viceversa, come

Every variable quantity continuously increases or decreases, or first increases and then decreases, or vice versa.

Quella quantità indeterminata, di cui una variabile qualunque si concepisce che aumenti, o diminuisca, dicesi generalmente la sua differenza, e si dinota ordinariamente per la lettera d prefissa all'espressione della variabile medesima. Così dx, dy, dz etc: esprimeranno le differenze delle variabili x, y, z etc: di maniera che x divenendo x+dx, y et z divengono y+dy, z+dz.

The unknown quantity, of which a variable is supposed to increase or decrease, is usually called its difference and is denoted with the letter d before such variable. So dx, dy, dz … *denote the difference of the variable* x, y, z, *so that when* x *becomes* $x + dx$, y *and* z *become* $y + dy$, $z + dz$.





Lagrange's notation is that of Leibniz, but the approach is Newtonian.

56r Le regole generali di queste tali operazioni, e della maniera di applicarle alla risoluzione dei casi particolari che occorrer possono costituiranno questa seconda parte dell'*Analisi sublime*, la quale conterrà perciò la Teoria del calcolo, che si chiama comunemente col nome di *Calcolo delle differenze*, o sia *Calcolo differenziale*.

Questi tali rapporti delle differenze si chiamano ultimi rapporti delle differenze, considerandole nel punto in cui esse stanno per isvanire. Veramente questi tali rapporti non sono rapporti di verune differenze reali, poiché si suppone che ciascheduna di esse sia divenuta uguale al zero; esprimono bensì solamente gli ultimi termini, a cui i rapporti generali delle differenze continuamente si avvicinano mentre che queste si fanno continuamente diminuire. Questi rapporti chiamansi ancora primi rapporti delle differenze, imperocché si possono riguardar egualmente come i limiti da cui partono i rapporti generali delle differenze considerate come nascenti || per ricevere poi continue aumentazioni. 65v

The ratios of the differences are named ultimate ratios of the differences, considering them in the point where they are going to vanish. Actually these ratios are not ratios of any real differences, since it's supposed that each of them has become equal to zero. They only express the ultimate terms, to which the general ratios of differences continuously approach, while they continuously decrease. These ratios are also named first ratios of the differences, because they can be seen as limits from which the general ratios of the differences, considered as rising to receive continuous increases, begin.

Quindi è che per Calcolo Differenziale puramente detto s'intende comunemente quello, che determina li ultimi rapporti delle differenze; e similmente espressioni differenziali, od equazioni differenziali si appellano quelle, che somministrano i detti rapporti.

By Differential Calculus we mean that, which determines the ultimate ratios of the differences. We name differential expressions or differential equations those which give such ratios.

18°. Le differenze, che abbiamo sin qui esaminate appartengono alle quantità algebraiche; nella Geometria esse si determinano molto più facilmente; imperciocché basta supporre che ciascheduna delle linee, che hanno fra di loro un dato rapporto si muti continuamente di posizione, in maniera però che non vengano distrutte le condizioni, che l'ipotesi del Problema richiede, e gli accrescimenti, o le diminuzioni che desse linee in questa maniera riceveranno necessariamente, esprimeranno le loro differenze positive, o negative, le quali si douranno perciò determinare co' principi comuni della Geometria; come si è già veduto, § 3° 4° 5°, e si vedrà ancora in seguito molto più ampiamente.

Ora siccome abbiamo ritrouato nelle espressioni delle differenze algebraiche certi limiti ne' loro rapporti; tali limiti douranno anche esistere ne' rapporti delle differenze geometriche, che alle algebraiche corispondono; e per ritrovarli si terrà un metodo analogo a quello che abbiamo sin qui usato nelle espressioni algebraiche, cioè si supporrà primieramente che le differenze siano prodotte, e si ricercheranno i loro rapporti supponendo, che diminuiscano esse continuamente sino a suanire del tutto, cioè che linee variabili ritornino nella loro prima situazione. In cotal guisa se si prendano a dirittura per uguali quelle quantità di cui la differenza || si vede dovere svanire, si potranno senza veruna 66r
difficoltà scuoprire i limiti ricercati.

Lagrange refers to differences both for algebraic and geometrical quantities.

Since we found certain limits in the ratios of the algebraic differences, the same limits should also exist in the ratios of the geometric differences. To find them we use a similar method, i.e. we firstly suppose that the differences are made and we look for their ratios, by supposing that they continuously decrease until they completely disappear, i. e. the variable lines return to their first situation.
If we assume that the quantities whose differences disappear are equal, we can find without difficulty the limits we were searching for.

The finite difference of $\frac{x}{y}$

10°. Sieno in terzo luogo le variabili divise le une per le altre per esempio debbasi prendere la differenza di $\frac{x}{y}$ posto $x+dx$ in luogo di x, e $y+dy$ in luogo di y, questa frazione diverrà $\frac{x+dx}{y+dy}$, da cui sottraendo $\frac{x}{y}$ si aurà $\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}$ per la differenza ricercata.

Riducansi queste due frazioni alla medesima denominazione e ne risulterà $\frac{yx+ydx-xy-xdy}{y(y+dy)}=\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}=d\cdot\frac{x}{y}$.

We want to determine the difference $\frac{x}{y}$. Placed $x+dx$ in place of x and $y+dy$ in place of y the fraction becomes $\frac{x+dx}{y+dy}$. Subtracting $\frac{x}{y}$ from it, we obtain

$$\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}$$

For the sought difference.

If we reduce these fractions to the same denominator, we will have

$$\frac{yx+ydx-xy-xdy}{y(y+dy)}=\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}=d.\frac{x}{y}$$

The differential of $\frac{x}{y}$

3°. La frazione $\frac{x}{y}$ ha per la sua differenza finita l'espressione 67v
$\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}$, § 9°[80], che paragonata colla formula $Pdx+Qdy$ dà $P=\frac{y}{y(y+dy)}$, $Q=\frac{-x}{y(y+dy)}$, e fatto il $dy=0$, $P=\frac{y}{y^2}$; $Q=-\frac{x}{y^2}$; onde si ricava il differenziale di $\frac{x}{y}$ eguale $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ dal che ne segue la regola generale per le frazioni, cioè, che

La differenza di una frazione qualunque è uguale al prodotto della differenza del numeratore nel denominatore meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore.

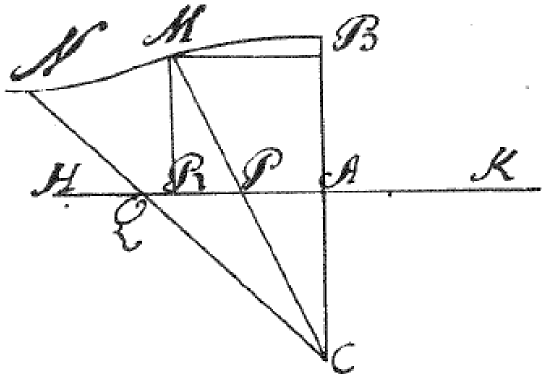
If we put $dy=0$, we obtain the differential of $\frac{x}{y}$, equal to

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}$$

The general rule for fractions is: the difference of any fractions is equal to the product of the difference of the numerator times denominator minus the product of the difference of the denominator times numerator, all these terms divided by the square of the denominator.

The construction of the Conchoid of Nicomedes

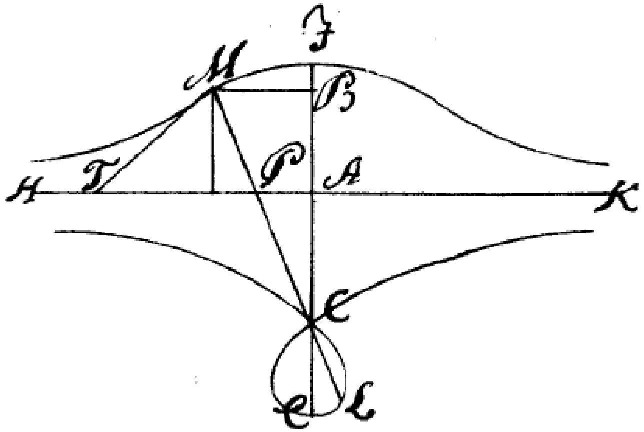
24°. Sia preso un punto qualunque C, da cui sieno tirate infinite rette CM, CN, etc: le quali intersechino una retta indefinita HAK di data posizione ne' punti P, Q etc: si taglino le parti PM, QN sempre uguali fra di loro, ed i punti M, N saranno ad una curva che chiamasi *Concoide di Nicomede*, in cui il punto C dicesi *Polo*.



Per ridurre questa curva ad una equazione algebraica tirisi dal punto C la CAB perpendicolare ad HK e da un punto qualunque M di quei che ad essa Curva appartengono tirinsi le due rette MR ed MB parallele alle AB ed AH e si tiri AR per una ascissa x ed MR per l'ordinata corispondente y. Chiamisi inoltre la distanza $CA=a$ la lunghezza costante $MP=b$, e ne' triangoli simili RMP, MBC si aurà $RP : RM = MB : BC$, cioè $\sqrt{b^2-y^2} : y = x : a+y$, e perciò

$$xy=a+y\sqrt{b^2-y^2}\,^{(89)}.$$

Quindi si scorge che sendo la quantità b elevata al quadrato questa
72r equazione sarà vera sia che il b sia positivo, sia che desso || sia negativo, d'onde ne segue che la curva dourà aver due rami, uno disopra l'asse, che verrà generato, pigliando le distanze MP sopra l'asse sempre uguali alla costante b, e l'altro che si descriverà al di sotto dello stesso asse col tagliare dalla medesima retta MPC prolungata la distanza CL[(90)] eguale pur anco alla data quantità b, onde tutta la curva aurà la qui segnata figura, ove la retta HK è assintotica ad amendue i rami sopra, e sotto.

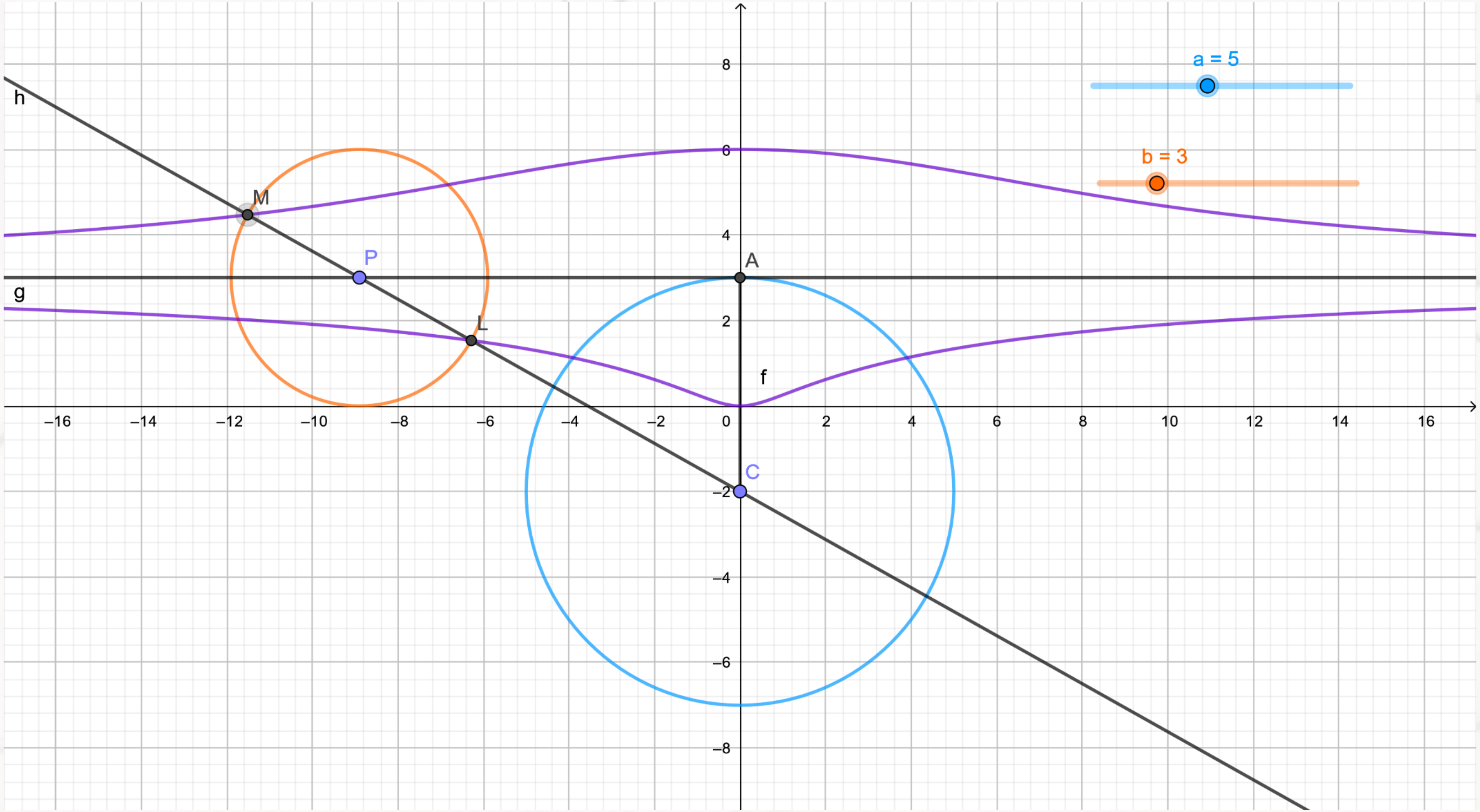


Lagrange explains how to obtain the equation of the Conchoid, starting from its geometric construction.

From the similarity between the triangles RMP, MBC we have that $RP\!:RM = MB\!:BC$ ⟹ $\sqrt{b^2-y^2}\!:y = x\!:(a+y)$

⟹ $xy = (a+y)\sqrt{b^2-y^2}$

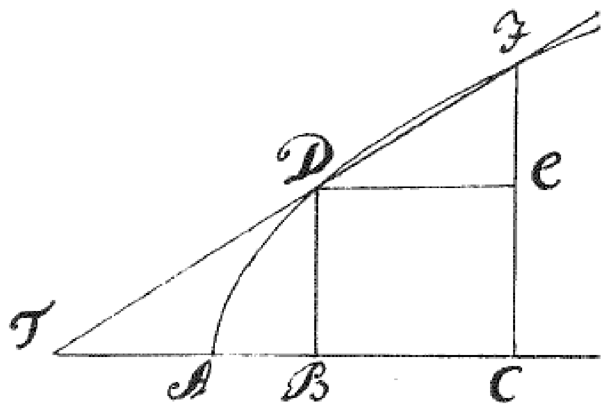
The construction of the Conchoid of Nicomedes with GeoGebra



https://www.geogebra.org/m/g5yyjku4

Searching for the tangent to a given curve

Sia proposta una curva qualunque ADF, di cui si abbia l'equazione tra le coordinate x e y.



Sia AB un Ascissa qualunque, BD l'applicata corrispondente. Suppongasi, che l'ascissa AB cresca di una differenza finita BC l'applicata BD dourà venir nella posizione CF, e crescere parimenti di una differenza uguale FE; posto che dal punto D siasi tirata la retta DE parallela a BC; si conduca per i punti D, F la retta segante FD, che incontri la direttrice delle ascisse in T, e per i triangoli simili TDB, DFE si aurà sempre FE : DE=DB : TB; onde $TB=DB \times \frac{DE}{FE}=\frac{ydx}{dy}$. Ora la differenza BC si supponga vada continuamente scemando sino a diventar =0 sinché il punto C venga a coincidere in B, l'applicata CF ritornerà nella sua primiera situazione e svanirà perciò la differenza FE, ed i due punti di curva D F si riuniranno in D, onde finalmente la segante FDT diverrà tangente allo stesso punto D. ||

22°. Quindi dunque ne segue, che in ogni punto di curva la tangente sarà quella che determina l'ultimo limite di tutte le seganti che per esso si possono condurre, di maniera che niun'altra retta pel punto del contatto possa passare che non seghi in qualche altro punto la detta curva. 69v

Siccome adunque la posizione delle seganti dipende generalmente dal rapporto delle due differenze DE ed FE, si aurà la posizione delle tangenti, riducendo questo rapporto al suo ultimo limite, come sin qui si è insegnato.

Let ADF be any curve, whose equation is in the coordinates x and y. Let AB be any abscissa and BD the correspondent ordinate. Suppose that AB increases by a finite difference BC, the ordinate BD will reach the position CF and increase by a difference equal to FE. Take from the point D the straight line DE parallel to BC. Let DF be the secant line, that crosses the line AB in T. For the similarity between the triangles TDB, DFE we have FE:DE = DB:TB and so

$$TB = DB \times \frac{DE}{FE} = \frac{ydx}{dy}$$

Suppose the difference BC goes on decreasing until it becomes =0 and the point C coincides with B and the ordinate CF returns to the first situation and the difference FE will therefore vanish. The points D, F of the curve will rejoin in D and the secant line FDT will become tangent in the same point D.

The integral calculus

50°. Nel calcolo integrale si considerano, dati i rapporti delle differenze delle variabili, e si ricercano quelli delle variabili medesime come si è detto, § [6°][138], Le regole adunque di questo Calcolo derivano immediatamente da quelle del Calcolo differenziale, come nell'Algebra comune le regole della divisione e della estrazione delle radici si deducono da quelle della moltiplica, e della formazion delle potestà. Quindi per ritrovar l'integrale di una qualsivoglia differenziale data basterà ricercare una formula che differenziata secondo le date regole divenga la differenziale proposta.

Le integrazioni si dinotano comunemente colla lettera S prefissa alla formula differenziale da integrarsi, nella medesima maniera che le differenziazioni si esprimono per la pura lettera d. Così $S \cdot dx$ sarà l'integrale di dx e perciò sara $=x$, qualunque sia essa variabile x. Ma qui è da notarsi, che siccome nel differenziare una quantità, svaniscono sempre

le quantità costanti ad || essa aggiunte, così nello integrare un differenziale si potrà sempre aggiugnere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante, la quale verrà poi determinata ad arbitrio per via di qualche condizione particolare a cui si vorrà addattare la formula. 101r

Laonde l'integrale di dx sarà non solo x ma ancora $x+a$, posta per a una costante qualunque indeterminata, onde se si voglia che il valore di $S \cdot dx$ sia tale che fatto $x=0$ esso diventi $=b$ si aurà $a=b$ e quindi sarà in questo [caso] $S \cdot dx = x+b$.

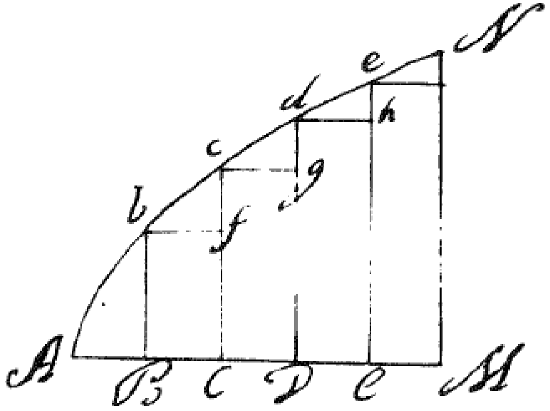
All'incontro se l'integrale $S \cdot dx$ dovesse svanire svanendo l'x bisognerebbe fare $a=0$, onde ne risulterebbe la sola variabile x pel valore di $S \cdot dx$.

Questa regola dunque si dourà osservare in tutte le integrazioni di quali si vogliano quantità differenziali, acciocché le espressioni che se ne ricavano possano ricevere la maggior universalità possibile, e siano nello stesso tempo applicabili a tutti i casi particolari ch'elleno possono contenere.

The rules of the integral calculus come from those of the differential one. Thus, to find the integral of any given differential, it's sufficient to search for a formula that, differentiated according to the previous laws, becomes the proposed differential.
The integrations are denoted with the letter S before the integrating differential formula, in the same way the differences are denoted with the letter d. So $\boldsymbol{S.dx}$ *means the integral of* dx *and it will be equal to* x*, for each variable* x*. Since in differentiating a quantity, constant quantities added to it always disappear, in integrating a differential we have to add to the integral any constant, that will be determined through some particular condition. So the integral of* dx *will be not only* x*, but also* $x + a$*, where* a *is any undetermined constant.*

The application of the theory of the sums to geometrical quantities

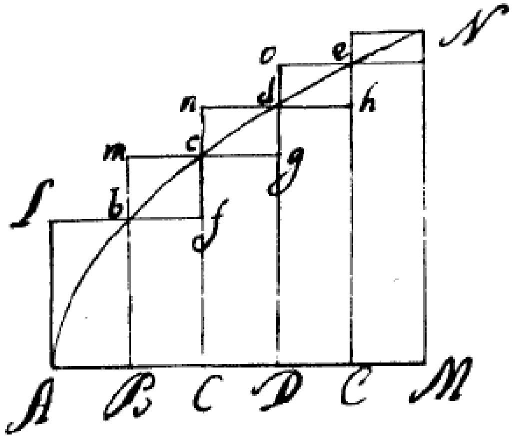
55°. Si consideri perciò una Curva qualunque data AN rapportata all'asse AM, di cui le ordinate esprimano una funzione data y del ascissa x. Presa un ascissa qualunque AM si divida in parti uguali AB, BC, CD etc: di cui ciascheduna sia eguale alla differenza dx che si suppone costante e da ogni punto B C D etc: tirinsi le rispettive ordinate Bb, Cc, Dd e compiscansi i rettangoli Bf, Cg, Dh etc:



elli è chiaro che tutti questi rettangoli inscritti costituiranno una serie, di cui ciaschedun termine sarà espresso generalmente per ydx, prodotto dell'ordinata che fa l'altezza del rettangolo moltiplicata per la differenza dell'ascissa, che ne fa la base: Dunque se si integri la formula ydx il valore di $S \cdot ydx$ darà la somma generale di tutti questi tali rettangoli, di maniera che posto poscia x=AM si aurà la somma di tutti i rettangoli contenuti nello spazio AMNA. ||

Consider any given curve AN referred to the axis AM, whose ordinates represent any given function of the abscissa x. Divide any abscissa AM in equal parts AB, BC, CD …, so that each of them is equal to the difference dx (that we assume constant). From any points B, C, D, take the ordinates Bb, Cc, Dd and complete the rectangles Bf, Cg, Dh…
All the inscribed rectangles constitute a series, whose terms are generally expressed by ydx.
If we integrate the formula ydx, the value of $S \cdot ydx$ will give the general sum of all these rectangles, so that if we suppose $x = AM$, we will obtain the sum of all the rectangles contained in the space $AMNA$.

105r **57°.** Questo metodo di ricavar dalla somma dei rettangoli inscritti, la misura di tutta la figura è come si vede generale per qualunque curva; imperciocché, ripigliata la figura prima e compiti i rettangoli *l*B, *mf*, *ng*, *oh* etc: si dimostrerà sempre che la somma di questi rettangoli è eguale al rettangolo ultimo *d*E[145] eguale perciò a *y*d*x*: Ma la differenza di ciascuno de' rettangoli inscritti *b*C allo spazio B*bc*C essendo eguale al *bfc* sarà sempre minore del rettangolo *bmcf* in cui è contenuto; Quindi la somma di tutte queste differenze sarà anche minore della somma di tutti i rettangoli *l*B, *mf* etc: che viene espressa per *y*d*x*; perciò quanto più si diminuirà questa somma *y*d*x* tanto più dourà diminuire quella differenza sinché divenendo questa =0 per la posizione di d*x*=0, svanirà altresi totalmente essa differenza e l'integrale ritrovato *S*·*y*d*x* esprimerà esattamente tutta l'area della Curva AMN.



Quindi dunque ne segue questa regola generale che per aver l'area di una curva qualunque data basterà integrare la quantità *y*d*x* doppo di
105v avere sostituito in luogo di *y* il suo || valore conveniente in *x* indi metter in questo integrale il d*x*=0.

This method for obtaining the measure of the entire figure from the sum of the inscribed rectangles is general for any curve. So, starting from the previous figure and having completed the rectangles lB, mf, ng … we will always demonstrate that the sum of these rectangles is equal to the ultimate rectangles De, equal to ydx. But the difference of each inscribed rectangle bC to the space $BbcC$, being equal to bfc, will always be smaller than the rectangle $bmcf$, in which it is contained. Thus, the sum of all these differences will also be smaller than the sum of the rectangles lB, mf…, which is expressed by ydx. The more the sum ydx decreases, the more that difference will have to decrease until becoming equal to 0 for the position of $dx = 0$, this difference will totally vanish and the integral $S \cdot ydx$ will exactly express all the area of the curve AMN.

Essential references

Borgato, M.T. (ed.), *Giuseppe Luigi Lagrange. Principj di analisi sublime*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 7, n. 2, 1987, pp. 45-198.

Borgato, M.T., *Lagrange e le equazioni alle differenze finite*, in S. Féry (ed.), Aventures de l'analyse de Fermat à Borel. Mélanges en l'honneur de Christian Gilain, Université de Nancy, 2012, pp. 301-335.

Luciano, E., Robutti, O. and Scalambro, E., *La 'strega' di Agnesi*, in Bonino, R., Marocchi, D., Rinaudo, M. and Serio, M. (eds.) Atti del IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2019, Torino, Università degli Studi, 2020, pp. 385-393.

Mazzotti, M., *The World of Maria Gaetana Agnesi. Mathematician of God*, Baltimore, JHU Press, 2007.

Pepe, L., *Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 1, n. 2, 1981, pp. 43-101.

Roero, C.S., *M.G. Agnesi, R. Rampinelli and the Riccati family: A cultural fellowship formed for an important scientific purpose, the* Instituzioni analitiche, Historia mathematica, 42, n. 3, 2015, pp. 296-314.

Roero, C.S., *Giornali, Accademie e Traduzioni: il successo europeo delle "Instituzioni Analitiche" di Maria Gaetana Agnesi*, Physis, 51, 2016, pp. 145-162.

The materials of this workshop can be found here: http://dmi.unife.it/it/ricerca-dmi/mathesis/materiali-esu-9