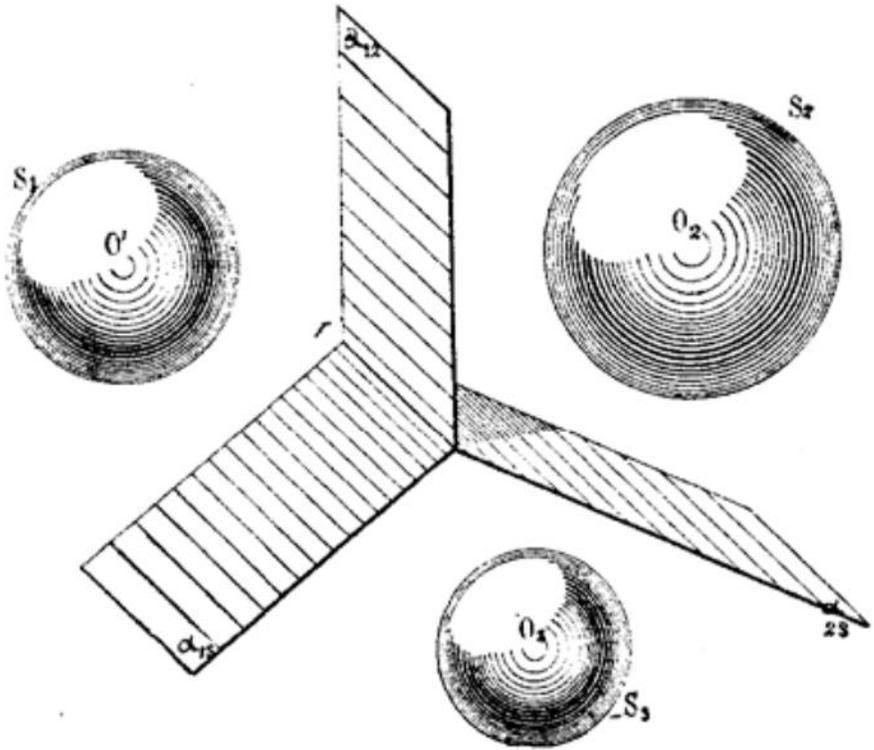


Fusionism

An educational pathway for in-depth study



The origin and development of fusionism

Fusionism

Definition

Fusionism is an orientation in the teaching of elementary geometry that proposes to deal simultaneously with topics in plane geometry and solid geometry.

Start

- It was born in Europe in the 1840s.
- It spread to Italy by the 1880s.
- Its origins can be found in the projective geometry of Gaspard Monge.

In Europe

Early works

- Gabriel Alcippe Mahistre, 1844, *Analogies de la Géométrie élémentaire*, di Gabriel Alcippe Mahistre, France;
- Anton Bretschneider, 1844, *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht ab Gymnasien und höheren Realschulen*, German;

Later works

- Adolph Steen , 1858, *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Indledning til Geometrien*, di Adolph Steen, Denmark;
- Charles Méray , 1874, *Nouveaux éléments de géométrie*, France.

In Italy

Early works

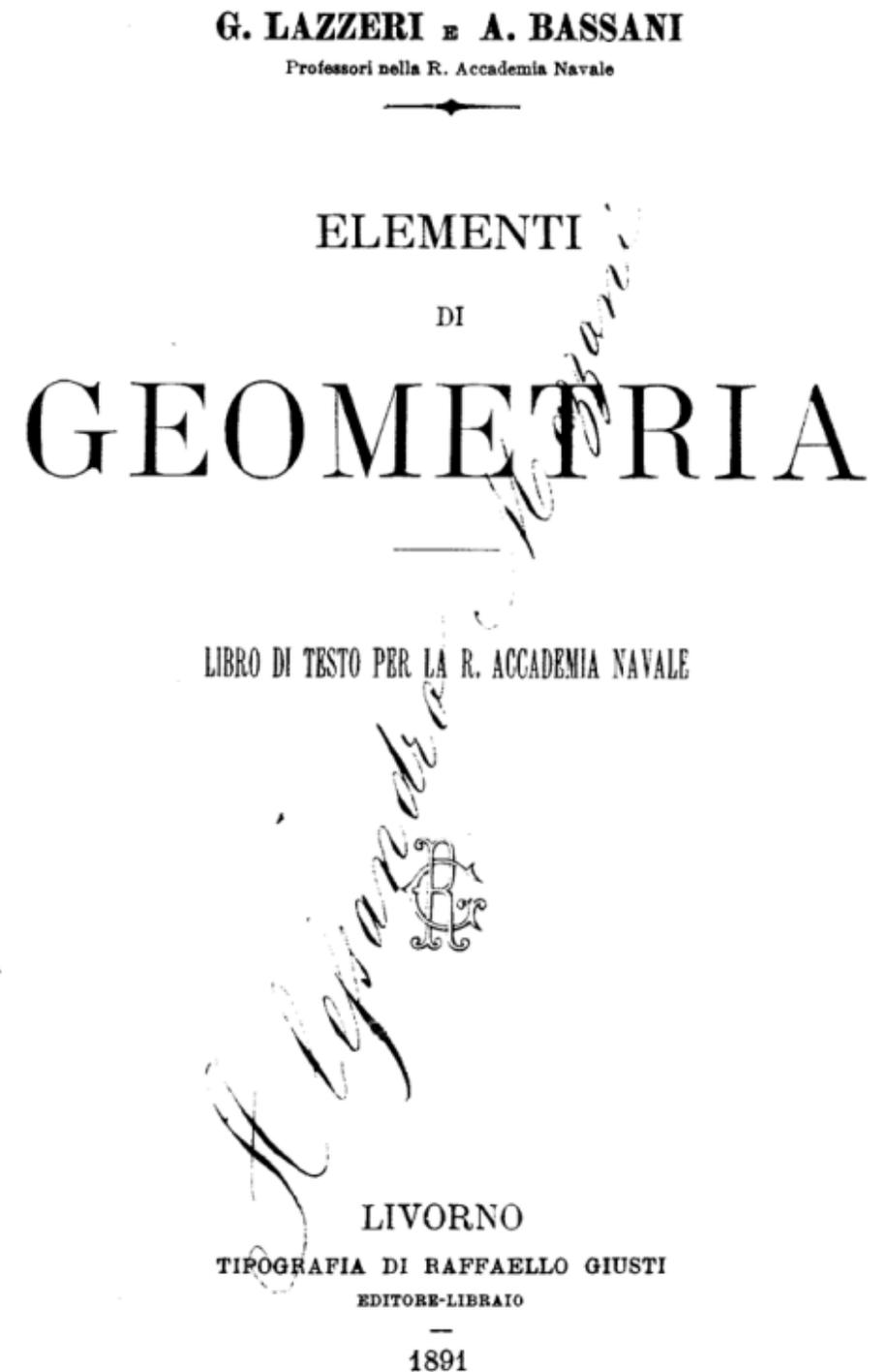
- Riccardo De Paolis, 1884, *Elementi di geometria*, Italy;
- Angelo Andriani, 1887, *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*, Italy;

Later works

- Giulio Lazzeri & Anselmo Bassani, 1891, *Elementi di geometria*, Italy;
- Giuseppe Zaccaria Reggio, 1898, *Complementi di geometria*, Italy;
- Giuseppe Ingrams, 1899, *Elementi di geometria*, Italy.

The work of Lazzeri and Bassani

G. Lazzeri, A. Bassani (1891), *Elementi di geometria: textbook for the Royal Naval Academy*, Livorno, Giusti, (2° ed 1898).



The work of Lazzeri and Bassani

Division into books:

- I. Straight line and plane. Segments, angles and dihedrons. First notions of the circle and sphere. Parallel straight lines, straight lines and planes.
- II. Polygons, angularids, polyhedra. Distances.
- III. Relations between straight lines, planes and spheres. Relations of polygons to a circle and of polyhedra to a sphere, Surfaces and solids of rotation.
- IV. General theory of equivalence. Equivalence of polygons and polyhedral surfaces; of spherical polygons and spherical pyramids; of prisms. Boundary quantities. Equivalence of polyhedra: Equivalence of circle and round bodies.
- V. Theory of proportions. Similar figures. Measurements. Application of Algebra to Geometry.

Debate in Italy

Pros

- saving time;
- simplification of some theories of plane geometry;
- better coordination of the study of mathematics with other scientific disciplines.

Cons

- difficulty in conceiving spatial intuition and insufficient models;
- lack of gradualness in moving from easier to more complex topics;
- delay in exposing other theories.

Debate in Italy

Between the 19th and 20th centuries:

Although there were different positions, the generally agreed idea was to allow teachers to choose their favorite approach to teaching elementary geometry.

Early 20th century:

The controversy over fusionism ended after the first decades of the 1900s, with the silent return to the separation of plane and solid geometry.

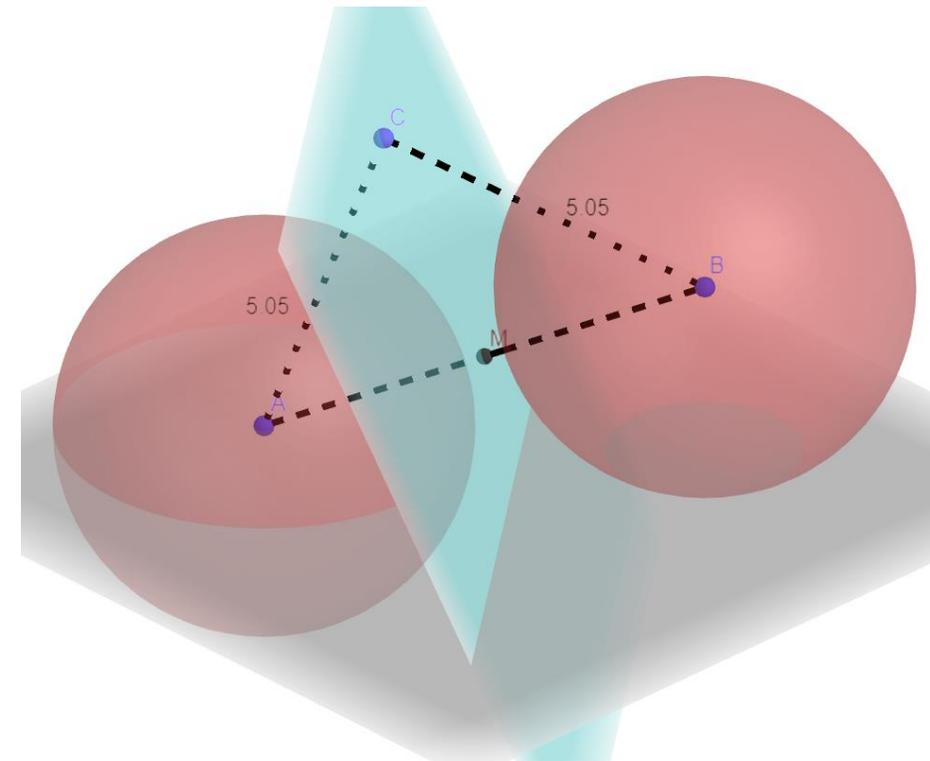
The goals of fusionism

Educational

- increase the efficacy and efficiency of geometry teaching;
- actualize secondary education.

Epistemological

- make the exposition of elementary geometry simpler and more rigorous;
- make explicit the connection between different theories of geometry and the axioms on which they depend.



The educational pathway
for in-depth study

Features

Topic

- radical axis theory

Target audience

- second biennium of high school

Tools

- original historical source: *Elementi di Geometria* di Lazzeri & Bassani (1898), <http://mathematica.sns.it/opere/169/>
- dynamic geometry software.

Features

Specific learning goals

From the *Indicazioni Nazionali* of 2010: "It will deal with the extension of some themes and techniques of plane geometry to space geometry, with the purpose of developing geometric intuition."

Furthermore, in the paper it is emphasized the importance of developing "a historical-critical view of the relationships between the main themes of mathematical thought and the philosophical, scientific and technological context" is emphasized in the paper.

Features

Timelines

- the proposed educational activity will have an approximate duration of 6 hours.

Methodologies

- cooperative learning;
- teaching laboratory.

Steps of implementation

- small group activity on original historical source;
- group discussion supported by GeoGebra 3D.

Lessons

References

G. Lazzeri, A. Bassani (1891), *Elementi di geometria: textbook for the Royal Naval Academy*, Livorno, Giusti, (2° ed 1898)

- Book II, Chapter IV (Distance)
- Book III, Chapter III (Circles and spheres systems);

Lessons

Distance

161. Teorema. — *Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti dati è il piano perpendicolare al segmento, che congiunge quei due punti, condotto per il suo punto di mezzo.*

Infatti, dal teorema precedente risulta che la condizione necessaria e sufficiente, affinché un punto sia equidistante da due punti A, B, è che si trovi sopra una delle infinite perpendicolari al segmento che li congiunge, condotte per il suo punto medio C. Siccome il luogo di queste perpendicolari è il piano perpendicolare al segmento AB nel punto C (§ 60, Teor.), così tutti e soli i punti di un tal piano godono della proprietà di essere equidistanti da A e da B.

Corollari. — *1°. I piani perpendicolari ai lati di un triangolo nei loro punti medi passano per una retta, luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici del triangolo.*

Lessons

Distance

Theorem 161°:

The geometric locus of points equidistant from two given points is the plane perpendicular to the segment joining those two points, conducted through its midpoint.

Corollary:

Planes perpendicular to the sides of a triangle at their midpoints pass through a line, which is the geometric locus of points equidistant from the vertices of the triangle.

Lessons

Circles and spheres systems

211. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere eguali sieno eguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo.*

Infatti, ogni punto P di questo piano α è equidistante dai centri O_1, O_2 delle due sfere S_1, S_2 (§ 161, Teor.); quindi, se P è esterno alle due sfere, e PA_1, PA_2 sono due segmenti condotti da P , tangenti alle due sfere, i due triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2 sono eguali, avendo le ipotenuse PO_1, PO_2 eguali e i cateti O_1A_1, O_2A_2 pure eguali; perciò è pure $PA_1 \equiv PA_2$.

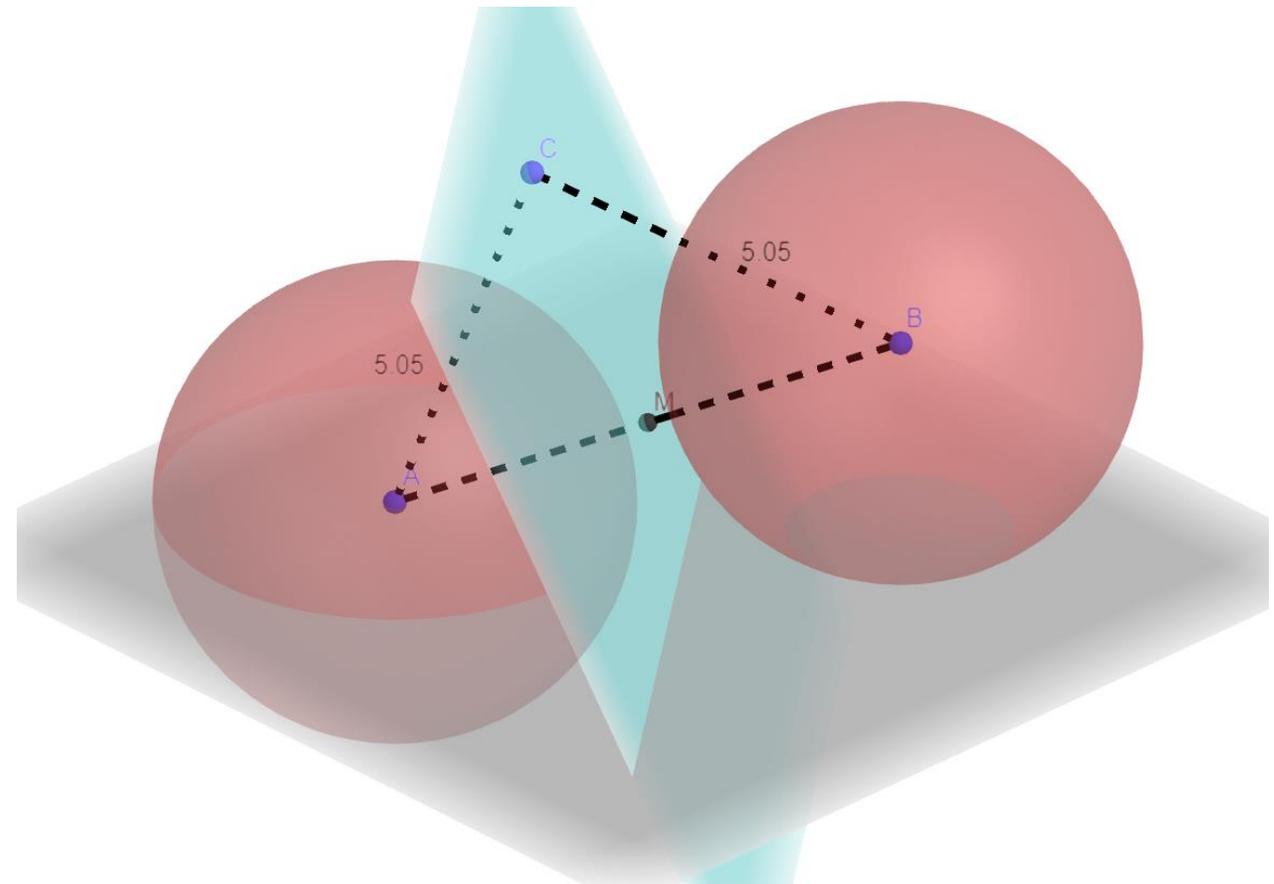
Inversamente, se P è un punto tale, che i due segmenti PA_1, PA_2 condotti per esso tangenti alle due sfere sieno eguali, i triangoli rettangoli PO_1A_1, PO_2A_2 , avendo i cateti rispettivamente eguali, sono eguali, e perciò $PO_1 \equiv PO_2$, ossia P è equidistante dai centri O_1 ed O_2 ; dunque P dev'essere situato sul piano α .

Lessons

Theorem 214°:

The locus of points, such that the tangent segments led from them to two equal spheres are equal, is the part, outside the two spheres, of the plane perpendicular to the segment joining the centers, at its midpoint.

Circles and spheres systems



<https://www.geogebra.org/classic/twzgkqpf>

Lessons

Circles and spheres systems

215. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due cerchi, non concentrici, del piano medesimo, sieno eguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due cerchi, esterna ai cerchi limitati da essi.*

Essendo c_1, c_2 (Fig. 198) due cerchi non concentrici di un piano, si facciano passare per essi, due superficie sferiche eguali e di raggio maggiore dei raggi dei due cerchi dati, e sieno O_1', O_2' i centri di queste sfere. Allora il piano β , perpendicolare al segmento $O_1' O_2'$, nel suo punto medio, non può essere parallelo al piano α , poichè, se lo fosse, la retta dei centri delle due sfere, essendo perpendicolare al piano β per costruzione, sarebbe anche perpendicolare al piano α , e perciò i centri dei due cerchi dati coinciderebbero, il che è escluso dall'ipotesi. Il piano β taglierà dunque il piano α secondo una retta r , che è il luogo geometrico dei punti del piano α , tali che sieno eguali i segmenti, condotti da essi, tangenti alle due sfere, e quindi anche quelli tangenti ai due cerchi dati.

Lessons

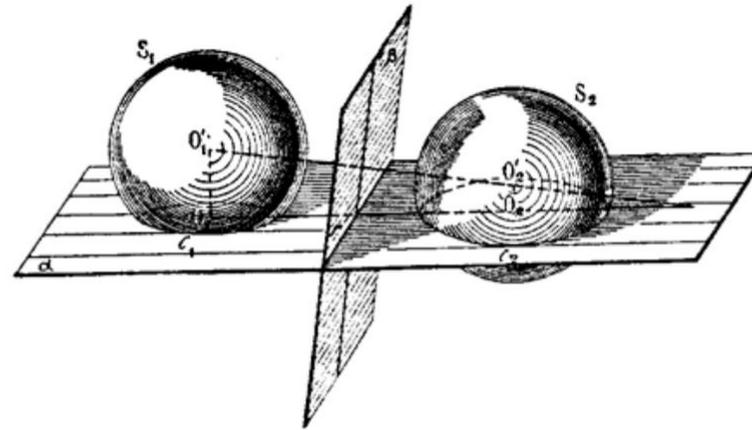
215. Teorema. — *Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due cerchi, non concentrici, del piano medesimo, sieno eguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due cerchi, esterna ai cerchi limitati da essi.*

Essendo c_1, c_2 (Fig. 198) due cerchi non concentrici di un piano, si facciano passare per essi, due superficie sferiche eguali e di raggio maggiore dei raggi dei due cerchi dati, e sieno O_1', O_2' i centri di queste sfere. Allora il piano β , perpendicolare al segmento $O_1' O_2'$, nel suo punto medio, non può essere parallelo al piano α , poichè, se lo fosse, la retta dei centri delle due sfere, essendo perpendicolare al piano β per costruzione, sarebbe anche perpendicolare al piano α , e perciò i centri dei due cerchi dati coinciderebbero, il che è escluso dall'ipotesi. Il piano β taglierà dunque il piano α secondo una retta r , che è il luogo geometrico dei punti del piano α , tali che sieno eguali i segmenti, condotti da essi, tangenti alle due sfere, e quindi anche quelli tangenti ai due cerchi dati.

Lessons

Circles and spheres systems

Dimostriamo ora che la retta r è perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2 . Pertanto osserviamo che le perpendicolari al piano α , condotte per i centri O_1', O_2' delle due sfere S_1, S_2 , incontrano questo piano nei centri O_1, O_2 dei cerchi c_1, c_2 , ed individuano un piano γ che è perpendicolare al piano α , e contiene le rette $O_1O_2, O_1'O_2'$. Ora anche il piano β è perpendicolare al piano γ , essendo perpendicolare alla retta $O_1'O_2'$ di questo piano, quindi (§ 65, Cor.) i piani α e β si tagliano secondo una retta r , che è perpendicolare a γ , e perciò perpendicolare anche alla retta O_1O_2 di questo piano.

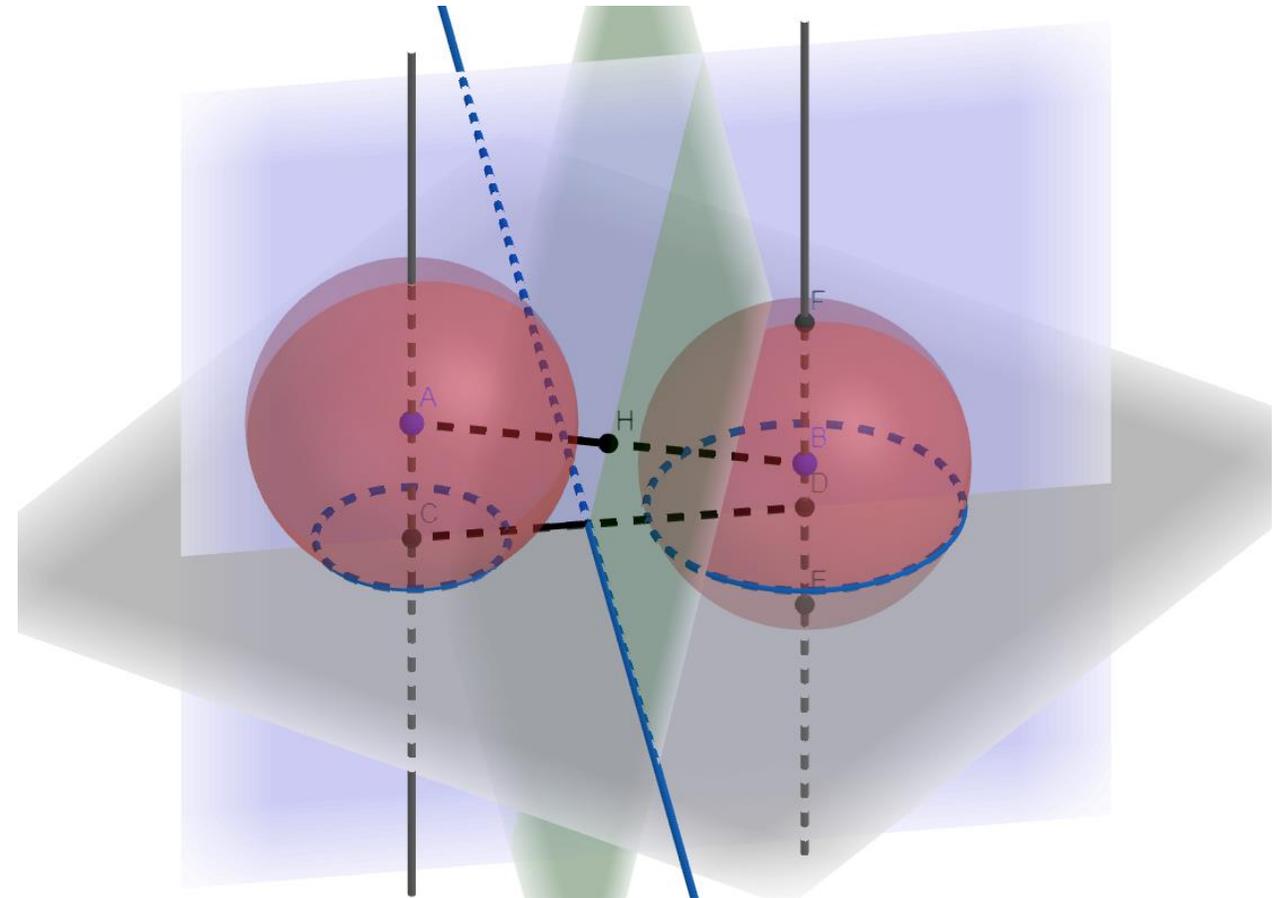


Lessons

Theorem 215°:

The locus of points in a plane such that the tangent segments, led by them to two circles, not concentric, in the same plane, are equal, is the part of a straight line perpendicular to the straight line of the centers, outside the circles bounded by them.

Circles and spheres systems



<https://www.geogebra.org/classic/qe5mnc5p>

Lessons

Circles and spheres systems

216. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, tali che i loro centri non sieno in linea retta, i tre assi radicali di questi circoli, presi due a due, passano per uno stesso punto.*

Essendo c_1, c_2, c_3 i tre circoli dati in un piano α , in modo che i tre centri non sieno in linea retta, si facciano passare per essi, ciò che è sempre possibile, tre superficie sferiche eguali S_1, S_2, S_3 di raggio maggiore dei raggi dei tre circoli dati, e sieno O_1', O_2', O_3' i centri di queste sfere. I piani perpendicolari ai segmenti $O_1'O_2', O_1'O_3', O_2'O_3'$ nei loro punti di mezzo, tagliano il piano α secondo i tre assi radicali delle coppie di circoli $c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3$, ed inoltre passano per una medesima retta r (§ 161, Cor. 1°), che è il luogo geometrico dei punti equidistanti da O_1', O_2', O_3' . Evidentemente la intersezione r non può essere parallela al piano α , perchè, se lo fosse, i tre assi radicali dovrebbero essere paralleli fra loro (§ 40, Teor.), e quindi, contrariamente all'ipotesi, i centri dei tre circoli dati sarebbero in linea retta. Dunque la retta r incontra il piano α in un punto, il quale è comune a tutti e tre gli assi radicali.

Lessons

Circles and spheres systems

216. Teorema. — *Dati tre circoli in un piano, tali che i loro centri non sieno in linea retta, i tre assi radicali di questi circoli, presi due a due, passano per uno stesso punto.*

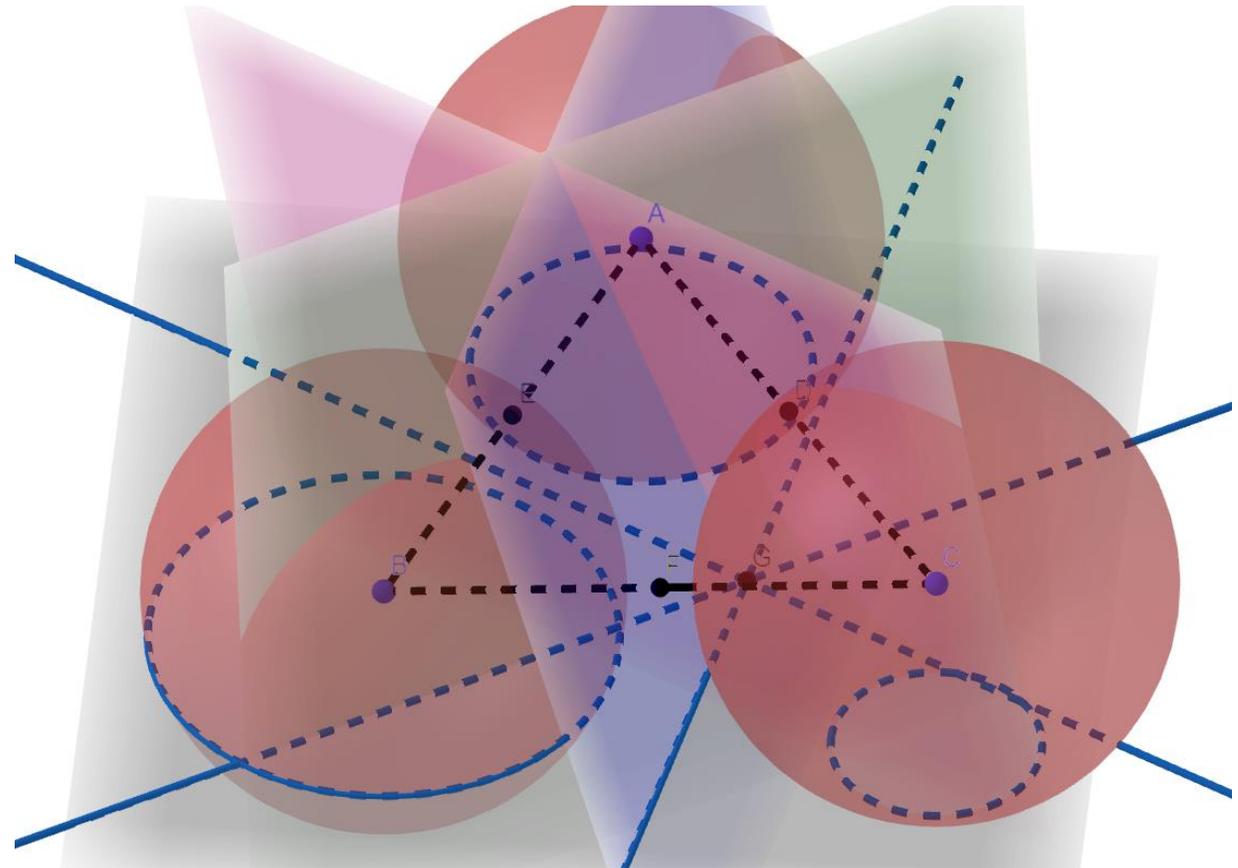
Essendo c_1, c_2, c_3 i tre circoli dati in un piano α , in modo che i tre centri non sieno in linea retta, si facciano passare per essi, ciò che è sempre possibile, tre superficie sferiche eguali S_1, S_2, S_3 di raggio maggiore dei raggi dei tre circoli dati, e sieno O_1', O_2', O_3' i centri di queste sfere. I piani perpendicolari ai segmenti $O_1'O_2', O_1'O_3', O_2'O_3'$ nei loro punti di mezzo, tagliano il piano α secondo i tre assi radicali delle coppie di circoli $c_1, c_2; c_1, c_3; c_2, c_3$, ed inoltre passano per una medesima retta r (§ 161, Cor. 1°), che è il luogo geometrico dei punti equidistanti da O_1', O_2', O_3' . Evidentemente la intersezione r non può essere parallela al piano α , perchè, se lo fosse, i tre assi radicali dovrebbero essere paralleli fra loro (§ 40, Teor.), e quindi, contrariamente all'ipotesi, i centri dei tre circoli dati sarebbero in linea retta. Dunque la retta r incontra il piano α in un punto, il quale è comune a tutti e tre gli assi radicali.

Lessons

Circles and spheres systems

Theorem 216°:

Given three circles in a plane, such that their centers are not in a straight line, the three radical axes of these circles, taken two by two, pass through the same point.



<https://www.geogebra.org/classic/seteczze>

Lessons

Circles and spheres systems

217. Problema. — *Costruire l'asse radicale di due cerchi di un piano.*

Se i due cerchi dati si tagliano, o sono tangenti, sappiamo che il loro asse radicale è la retta che unisce i punti comuni, o la tangente nel punto comune. Se poi i due cerchi c_1 , c_2 (Fig. 199) non si tagliano (cioè l'uno è esterno o interno all'altro) si descriva un terzo cerchio c_3 , che li tagli ambedue, e il cui centro non sia in linea retta coi centri dei cerchi dati. Allora le due rette, che uniscono i punti d'incontro di questo cerchio con l'uno e coll'altro dei due cerchi dati, si tagliano in un punto P , che è il centro radicale dei tre cerchi, e la perpendicolare, condotta da questo punto alla retta dei centri dei due cerchi dati, sarà l'asse radicale dei medesimi.

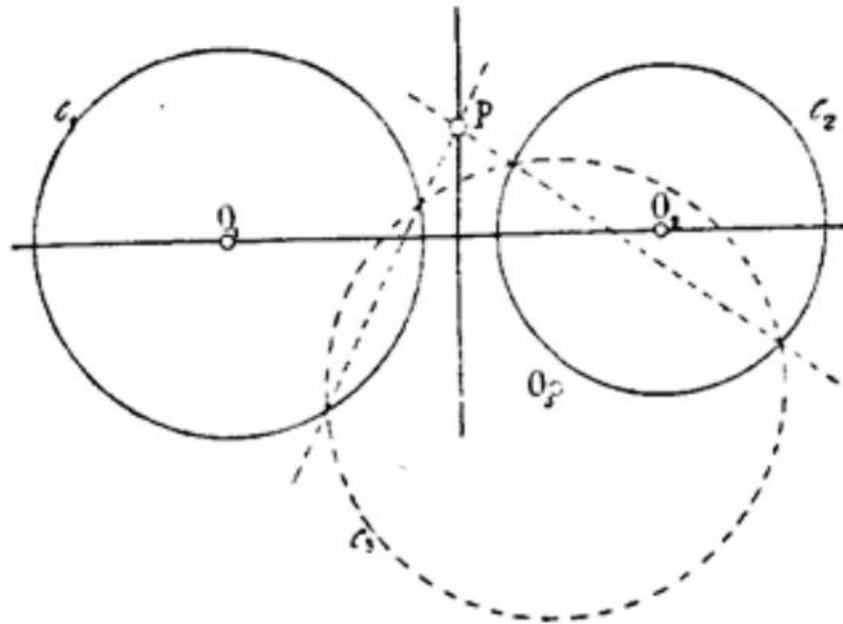
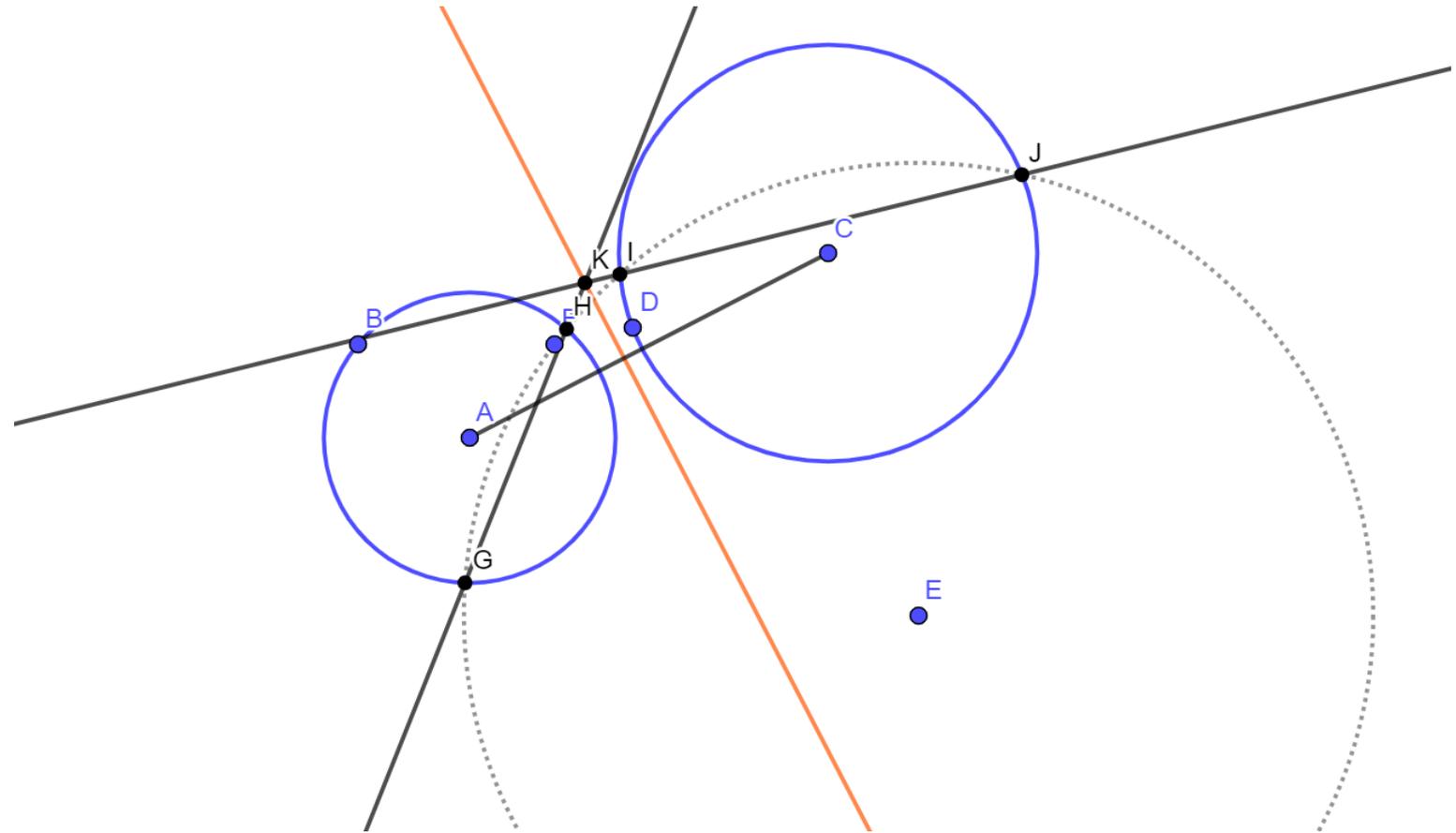


FIG. 199.

Lessons

Circles and spheres systems

Problem 217°:
Construct the radical axis of two circles in a plane.



<https://www.geogebra.org/classic/sfyxsmar>

Lessons

Circles and spheres systems

218. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due superficie sferiche non concentriche, sieno eguali, è la parte di un piano, perpendicolare alla retta dei centri delle due sfere, esterna ad esse.*

Essendo S_1, S_2 le due sfere date, O_1, O_2 i loro centri, si conduca un piano α per la retta O_1O_2 ; esso taglia le due superficie sferiche secondo due cerchi massimi c_1, c_2 , aventi per asse radicale una retta r perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2 . Facendo rotolare il piano α di un mezzo giro attorno alla sua retta O_1O_2 , evidentemente i cerchi c_1, c_2 descrivono le superficie sferiche S_1, S_2 , e la retta r descrive un piano perpendicolare alla O_1O_2 , che è il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due superficie sferiche, sono eguali.

Lessons

Radical plane of two
spherical
surfaces

Circles and spheres systems

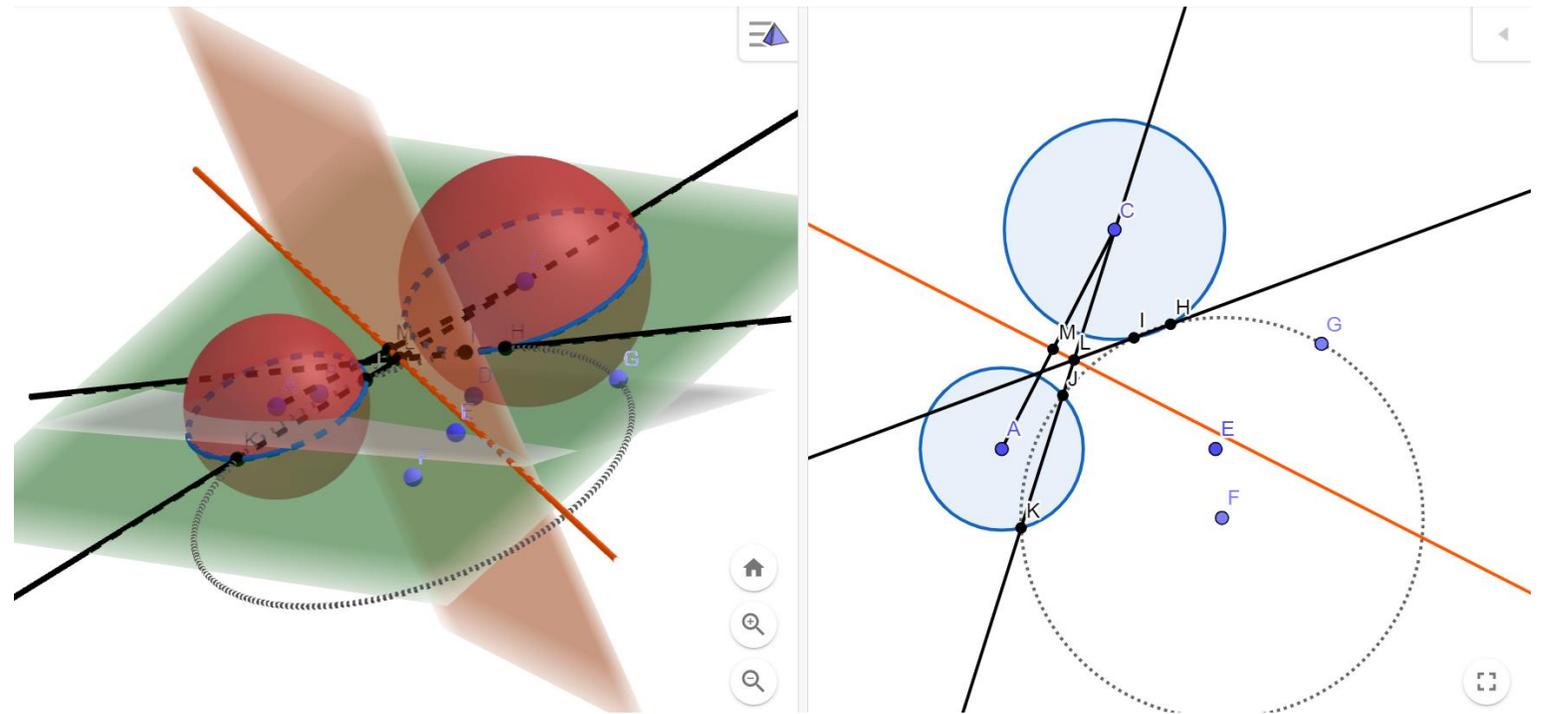
218. Teorema. — *Il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi a due superficie sferiche non concentriche, sieno eguali, è la parte di un piano, perpendicolare alla retta dei centri delle due sfere, esterna ad esse.*

Essendo S_1, S_2 le due sfere date, O_1, O_2 i loro centri, si conduca un piano α per la retta O_1O_2 ; esso taglia le due superficie sferiche secondo due circoli massimi c_1, c_2 , aventi per asse radicale una retta r perpendicolare alla retta dei centri O_1O_2 . Facendo rotare il piano α di un mezzo giro attorno alla sua retta O_1O_2 , evidentemente i circoli c_1, c_2 descrivono le superficie sferiche S_1, S_2 , e la retta r descrive un piano perpendicolare alla O_1O_2 , che è il luogo dei punti, tali che i segmenti tangenti, condotti da essi alle due superficie sferiche, sono eguali.

Lessons

Theorem 218°:

The geometric locus of points, such that the tangent segments, led from them to two nonconcentric spherical surfaces, are equal, is the part of a plane, perpendicular to the line of the centers of the two spheres, outside them.

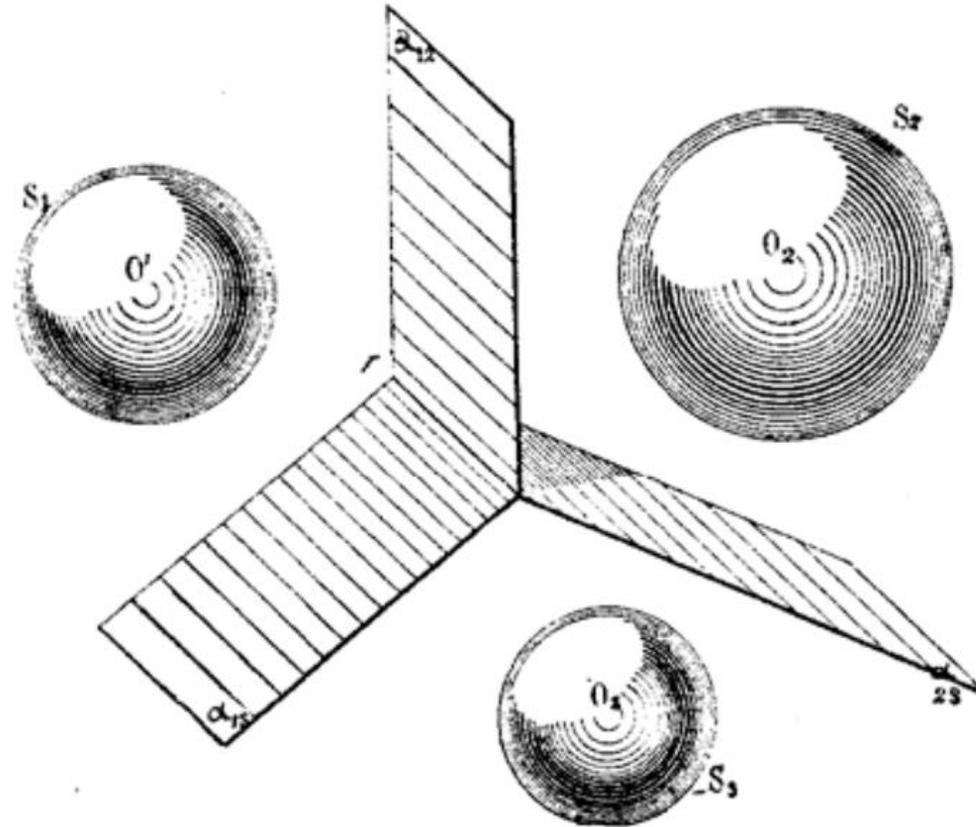


<https://www.geogebra.org/classic/pzwercmn>

Lessons

Circles and spheres systems

219. Teorema. — *Date tre superficie sferiche, i cui centri non sieno in linea retta, i tre piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per una stessa retta perpendicolare al piano dei loro centri.*

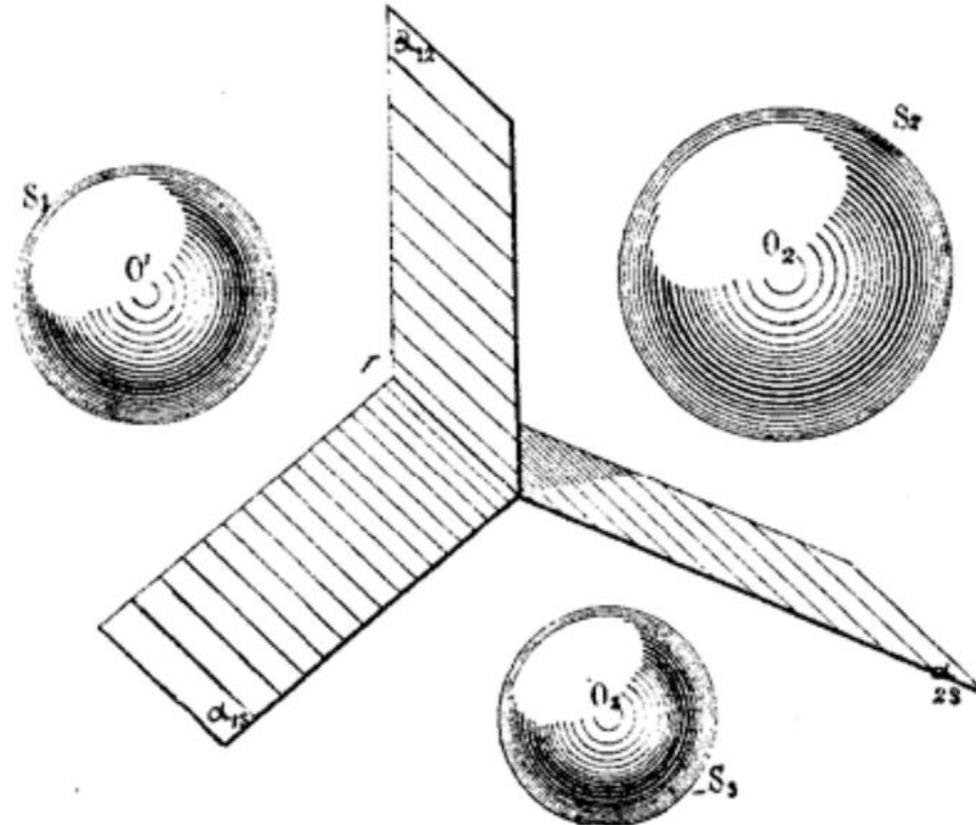


Lessons

Radical axis of three spherical
surfaces

Circles and spheres systems

219. Teorema. — *Date tre superficie sferiche, i cui centri non sieno in linea retta, i tre piani radicali di queste superficie, prese due a due, passano per una stessa retta perpendicolare al piano dei loro centri.*



Lessons

Circles and spheres systems

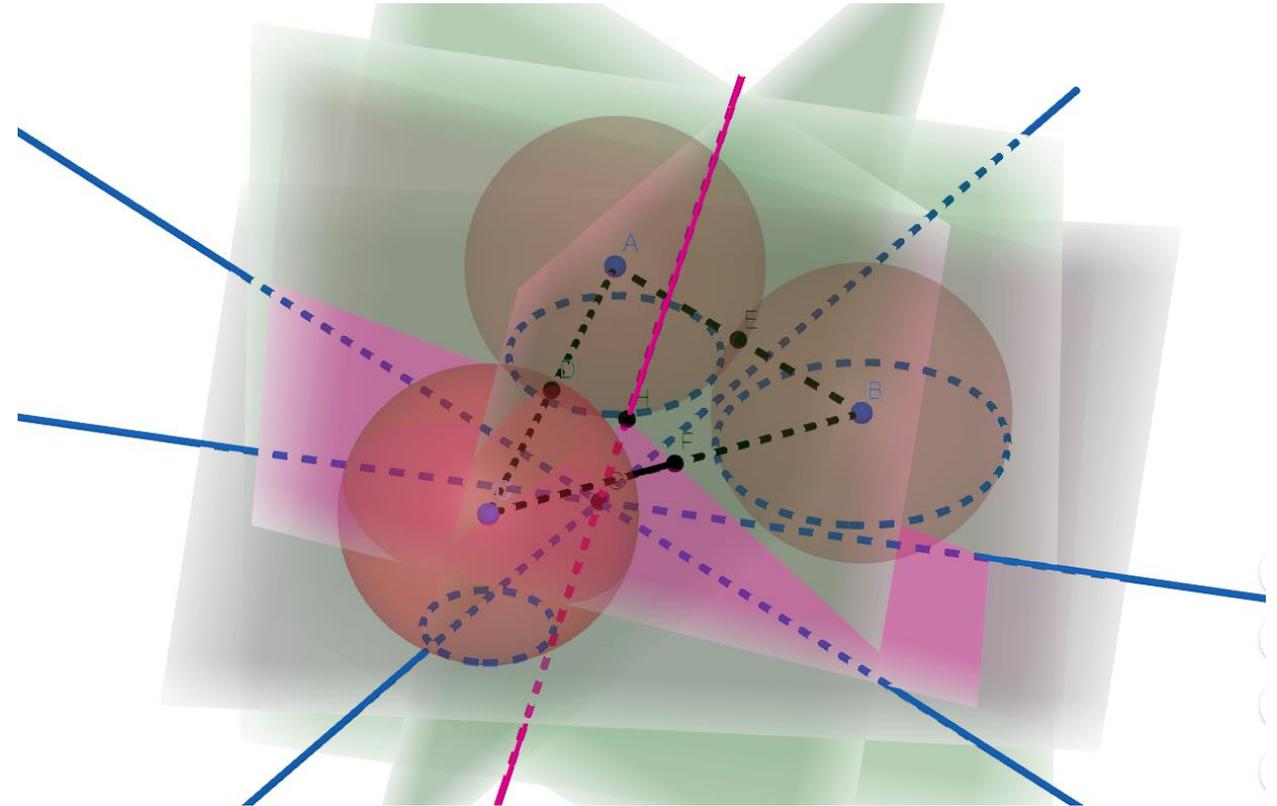
Sieno (Fig. 218) S_1, S_2, S_3 le tre superficie sferiche date, O_1, O_2, O_3 i loro centri, non situati sopra una medesima retta, ed $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$ i piani radicali delle coppie di superficie sferiche $S_1, S_2; S_1, S_3; S_2, S_3$. Sappiamo (§ 218, Cor. 1°), che i piani radicali α_{12}, α_{13} sono rispettivamente perpendicolari alle rette O_1O_2, O_1O_3 , e perciò si tagliano secondo una retta, la quale è perpendicolare al piano $O_1O_2O_3$, ed è tale che i segmenti tangenti alle tre superficie sferiche, condotti per ciascuno de' suoi punti, esterno ad esse, sono eguali. Siccome i segmenti tangenti condotti dai punti di questa retta alle due superficie S_2, S_3 sono eguali, essa dovrà giacere anche sul piano radicale α_{23} di queste due superficie, e quindi tutti i tre piani radicali passano per la stessa retta perpendicolare al piano dei centri delle tre superficie sferiche.

Lessons

Theorem 219°:

Given three spherical surfaces whose centers are not in a straight line, the three radical planes of these surfaces, taken two by two, pass through the same straight line perpendicular to the plane of their centers.

Circles and spheres systems



219 Teorema - GeoGebra

Lessons

Circles and spheres systems

- Paragraph 215 (radical axis of two circles) 
- Paragraph 216 (radical center of three circles) 
- Paragraph 218 (radical plane of two spherical surfaces)
- Paragraph 215 (radical axis of three spherical surfaces)

Essential Bibliography

- Borgato, M. T. (2016). Il fusionismo: moda didattica o riflessione sui fondamenti della geometria? *Periodico di Matematiche*, s. XII 8(2), 45-65.
- Lazzeri, G, Bassani, A. (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la R. Accademia Navale*, Livorno: Giusti, (2a ed 1898).
- Menghini, M. (2019). The fusion of plane and solid geometry in the teaching of geometry: Textbook, Aims, Discussions. *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education ESU 8*, 679-694.

