

**Materials related to the Workshop of ESU-9: *The dissemination of infinitesimal calculus in Italy. Subsection: A Leibnizian approach in the first Italian treatise on Analysis: Maria Gaetana Agnesi's Istituzioni Analitiche*, by Elena Scalambro**

**a) Istruzioni in rima per la costruzione della versiera per punti**

Una coppia di rette parallele,  $x$  e  $l$ , e un cerchio tangente a entrambe nei punti  $O$  e  $B$  rispettivamente, disegnerete.

La retta per i punti  $O$  e  $B$  tracerete

e infine una retta per il punto  $O$ , che interseca la circonferenza in un punto  $M$ , creerete.

N il punto di intersezione tra questa retta e la retta  $l$  sarà  
e da lì una perpendicolare alla retta  $x$  cadrà.

Il momento di tracciare la parallela alla retta  $l$  passante per  $M$  è arrivato,

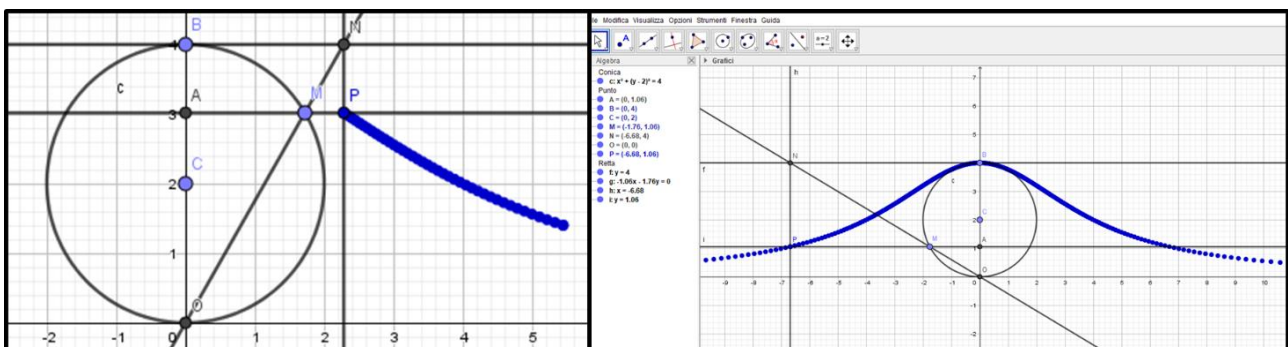
il punto  $P$  di intersezione tra le ultime due rette avete trovato.

$P$  è uno dei punti della mia versiera,

al variare di  $M$  sulla circonferenza troverete la sua forma vera!

**b) Istruzioni per la costruzione dinamica della versiera con GeoGebra**

- Costruzione di una retta  $l$  parallela all'asse delle ascisse con il comando *Retta parallela*.
- Costruzione di una circonferenza avente centro sull'asse delle ordinate e tangente alla retta appena costruita e all'asse orizzontale con il comando *Circonferenza - dati centro e raggio*.
- Creazione di un punto arbitrario  $M$  sulla circonferenza con il comando *Punto*.
- Costruzione della retta passante per  $M$  e per l'origine degli assi cartesiani  $O$  con il comando *Retta*.
- Individuazione di  $N$ , il punto di intersezione tra la retta  $OM$  e la retta  $l$ , con il comando *Intersezione*.
- Costruzione della retta perpendicolare all'asse delle ascisse passante per  $N$  con il comando *Retta perpendicolare*.
- Costruzione della retta parallela all'asse delle ascisse e passante per  $M$  con il comando *Retta parallela*.
- Individuazione di  $P$ , punto di intersezione tra quest'ultima retta e quella passante per  $N$  e perpendicolare all'asse delle ascisse, con il comando *Intersezione*.
- Cliccando con il tasto destro, attivazione della funzione *Mostra traccia* per  $P$  e *Animazione* per  $M$ .

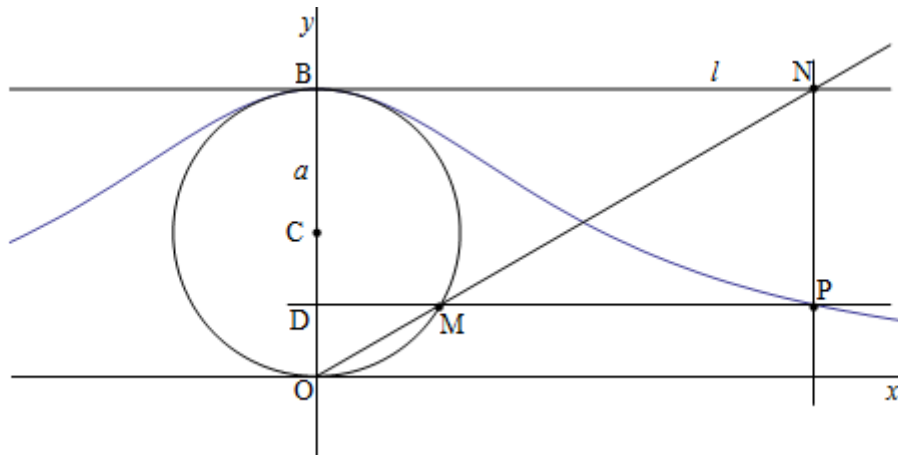


**c) Selezione di brani dalle *Istituzioni Analitiche* di M.G. Agnesi**

<i>Passo originale</i>	<i>English translation</i>
<p><i>Definizione di calcolo differenziale</i></p> <p>L'analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Flussioni suole chiamarsi, è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine siano queste differenze.</p>	<p><i>Definition of differential calculus</i></p> <p>The analysis of infinitely small quantities, which can be called Differential Calculus or Calculus of Fluxions, is that which concerns differences in variable quantities, of whatever order those differences may be.</p>

<p><i>Definizione di quantità variabili</i>  Col nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti [...] generate da un moto continuo.</p>	<p><i>Definition of variable quantities</i>  The name "variable quantities" designates those that can increase or decrease, and they are conceived as fluents [...] generated by a continuous motion.</p>
<p><i>Definizione di differenza (o flussione)</i>  Si chiama differenza, o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima, cioè tanto piccola, che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data, e per cui crescendo, o diminuendosi la medesima variabile, possa ciò non ostante assumersi la stessa di prima.</p>	<p><i>Definition of difference (or fluxion)</i>  "Difference", or "fluxion" of a variable quantity, is the name of that infinitesimal portion, i.e. so small that its ratio to the variable quantity is smaller than the proportion between that variable quantity and any other variable, whereby if such variable increases or decreases, it may be considered the same as before.</p>
<p><i>Il problema III: la versiera</i>  Dato il semicircolo <math>ADC</math> del diametro <math>AC</math>; si ricerca fuori di esso il punto <math>M</math> tale, che condotta <math>MB</math> perpendicolare al diametro <math>AC</math>, che taglierà il circolo in <math>D</math>, sia <math>AB : BD = AC : BM</math> e, perché infiniti sono i punti <math>M</math>, che soddisfano al problema, se ne dimanda il luogo.</p>	<p><i>Problem n. III: the versiera</i>  Given the semicircle <math>ADC</math> of diameter <math>AC</math>, search outside it for the point <math>M</math> such that, after leading the perpendicular <math>MB</math> to the diameter <math>AC</math> that will intersect the circle in <math>D</math>, it is <math>AB : BD = AC : BM</math> and, since the points <math>M</math> that satisfy the problem are infinite, its locus is asked.</p>
<p><i>La dedica a Maria Teresa d'Austria</i>  [...] la considerazione del Vostro Sesso, che da Voi illustrato per bella sorte è pur mio. Questo pensiero mi à sostenuta nella fatica, e non mi à lasciato sentire il rischio dell'impresa. [...] debbano le Donne tutte servire alla gloria del loro sesso, e ciascuna contribuire all'accrescimento dello Splendore, nel quale Voi lo avvolgete.</p>	<p><i>The dedication to Maria Teresa of Austria</i>  [...] the consideration of Your gender, which You illustrated, by good fortune is also mine. This thought sustained me in my toil, and didn't let me feel the risk of the undertaking. [...] May all women serve the glory of their sex, and each one contributes to the increase of the splendour in which You envelop it.</p>
<p><i>L'impegno sociale di Agnesi</i>  Mi sembravano utilissime, e necessarie nuove Istituzioni di Analisi. [...] quanto sia difficile il ritrovare quella [esposizione], che sia dotata della dovuta chiarezza, e semplicità, omettendo tutto il superfluo, senza lasciare cosa alcuna, che esser possa utile o necessaria, e che proceda con quell'ordine naturale, in cui forse consiste la miglior istruzione, ed il maggior lume.</p>	<p><i>Agnesi's social commitment</i>  New Institutions of Analysis seemed to me very useful and necessary. [...] How difficult it is to find that [exposition], which is endowed with due clarity and simplicity, omitting all that is superfluous, without leaving anything that might be useful or necessary, and which proceeds with that natural order in which perhaps the best teaching consists of.</p>
<p><i>La finalità didattica di Agnesi</i>  [...] quantunque le cose Analitiche sieno tutte pubblicate con le stampe, pure perché esse sono scollegate, senz'ordine, e sparse qua e là nell'opere di molti Autori [...] cosicché non potrebbe certamente un Principiante ridurre a metodo le materie, quando anche egli fosse di tutti i libri fornito.</p>	<p><i>Agnesi's didactic purpose</i>  [...] they are disconnected, without order, and scattered here and there in the works of many Authors [...] so that a Beginner could certainly not reduce the subjects to a method, even if he were equipped with all the books.</p>
<p><i>Prima trattazione sistematica dell'Analisi in italiano.</i>  [...] mi sono dispensata dal tradurla in Latino Idioma [...]. Né intendo però farmi carico di quella purità di lingua [...] avendo io avuto in mira più, che ogni altra cosa, la necessaria possibile chiarezza.</p>	<p><i>First systematic treatment of Analysis in Italian.</i>  [...] I dispensed myself from translating it into Latin Idiom [...]. Nor do I intend, however, to make myself responsible for that purity of language [...] since I had in mind, more than anything else, the necessary possible clarity.</p>

d) Scheda da proporre agli studenti per ricavare l'equazione della versiera e per riflettere sul concetto di variabile dipendente/indipendente



**Parte 1:** Abbiamo visto come si può costruire la curva versiera, ma non abbiamo ancora trovato la sua equazione cartesiana... Proviamo a farlo ora!

- Osserviamo gli angoli dei triangoli DMO e BNO che abbiamo usato per costruire la curva. Come sono? \_\_\_\_\_
- Di conseguenza, i due triangoli sono \_\_\_\_\_
- Vale allora la seguente proporzione tra i lati: (\*)  $OD : DM = \underline{\hspace{2cm}}$
- Inoltre il segmento BN è congruente a \_\_\_\_\_
- A questo punto possiamo chiamare il segmento appena individuato  $x$ . Inoltre poniamo  $OD=y$  in quanto individua il valore dell'ordinata dei punti della nostra curva. Supponendo che la circonferenza di partenza abbia generico raggio  $a$ , avremo che  $OB=\underline{\hspace{2cm}}$
- Vogliamo ancora trovare la lunghezza del segmento DM. Tracciamo il segmento BM. Il triangolo OMB è \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_ è l'altezza relativa al lato BO.
- Per il secondo teorema di Euclide allora, avremo che l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Nel nostro caso quindi:  
 $OD : DM = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$   
da cui  $DM^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
- Sappiamo che  $OD=y$  e che  $OB=2a$  quindi  $BD=\underline{\hspace{2cm}}$
- Sostituendo nell'espressione di  $DM^2$  otteniamo che  $DM = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$
- Torniamo alla proporzione iniziale (\*) e scriviamo i segmenti in termini di  $x, y, a$ .  
Otteniamo che  $y : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$
- Eleviamo tutto alla seconda, semplifichiamo dove possibile e ricaviamo la  $y$ .

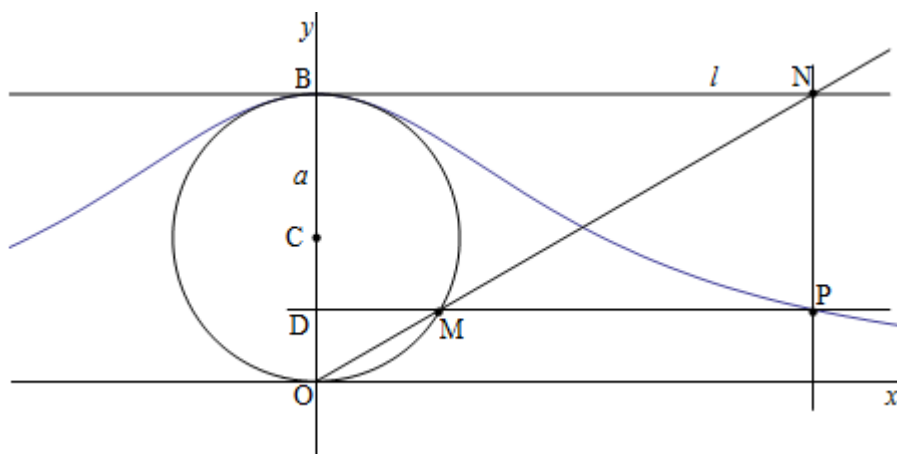
Conti

Otteniamo quindi che l'equazione della strega di Agnesi è  $y =$

**Parte 2:** Riflettiamo adesso su come abbiamo costruito i punti della nostra curva.

Ricordiamo che, sia con GeoGebra che con la costruzione con il cerchio e le corde, ciò che varia è il punto M sulla circonferenza.

A questo punto abbiamo costruito la retta per O e per M che interseca la retta  $l$  nel punto N.



- 1) Cosa hanno in comune il punto N e il punto P della versiera corrispondente?
- \_\_\_\_\_

Dopo di che, abbiamo costruito la retta perpendicolare a  $l$  e passante per N e la retta DM passante per M e perpendicolare al diametro del cerchio BO. Il loro punto di intersezione P appartiene alla nostra “strega di Agnesi”.

- 2) In questo modo abbiamo anche trovato \_\_\_\_\_ del punto P

Abbiamo così trovato le coordinate del generico punto P della versiera.

- 3) Quale coordinata abbiamo “individuato per prima” nella nostra costruzione? \_\_\_\_\_
- 4) Una volta individuata questa coordinata, seguendo la costruzione data, l’altra coordinata è determinata univocamente?
- Sì
  - No

Questa seconda coordinata è quindi:

- Dipendente
- Indipendente

dalla prima coordinata individuata.

Cioè, una volta individuato N, esiste una sola/più di una possibilità per il punto P. (sottolinea la risposta corretta)

Tornando all’equazione cartesiana della curva cerchiamo di capire cosa possiamo dire a proposito della relazione tra la variabile indipendente e quella dipendente.

La variabile indipendente, cioè la \_\_\_\_\_, si trova a \_\_\_\_\_ della nostra funzione. Questo significa che  $x$  e  $y$  sono \_\_\_\_\_ proporzionali.

In particolare, questo significa che quando  $x^2$  diminuisce, ossia quando il valore assoluto di  $x$  diminuisce, la  $y$  \_\_\_\_\_

Quando il valore assoluto di  $x$  assume il valore più piccolo possibile, ossia per  $x=$ \_\_\_\_, la  $y$  assumerà il valore \_\_\_\_\_ possibile, cioè la versiera avrà un punto di \_\_\_\_\_.

Viceversa, quando il valore assoluto di  $x$  cresce, la  $y$  \_\_\_\_\_.