Materials related to the Workshop of ESU-9: *The dissemination of infinitesimal calculus in Italy*. Subsection: *Newtonian conceptualization of the "ultimate ratios of vanishing quantities"*, by Maria Giulia Lugaresi

a) Selezione di brani dai *Principj di Analisi Sublime* di J. L. Lagrange

Passo originale	***English translation***
Definizione di quantità variabili Tutte le quantità variabili crescono, o diminuiscono continuamente, oppure prima crescono e poi diminuiscono, o viceversa.	*Definition of variable quantities* Every variable quantity continuously increases or decreases, or first increases and then decreases, or vice versa.
Definizione di differenza Quella quantità indeterminate, di cui una variabile qualunque si concepisce che aumenti, o diminuisca, dicesi generalmente la sua differenza, e si dinota ordinariamente per la lettera d prefissa all'espressione della variabile medesima. Così dx, dy, dz ... esprimeranno le differenze delle variabili x, y, z ... : di maniera che x divenendo $x + dx$, y et z divengono $y + dy, z + dz$.	*Definition of difference* The unknown quantity, of which a variable is supposed to increase or decrease, is usually called its difference and is denoted with the letter d before such variable. So $dx,\ dy,\ dz$ ... denote the difference of the variable $x,\ y,\ z$, so that when x becomes $x + dx$, y and z become $y + dy,\ z + dz$.
Definizione di ultimi rapporti delle differenze Questi tali rapporti delle differenze si chiamano ultimi rapporti delle differenze, considerandole nel punto in cui esse stanno per isvanire. Veramente questi tali rapporti non sono rapporti di verune differenze reali, poiché si suppone che ciascheduna di esse sia divenuta uguale al zero; esprimono bensì solamente gli ultimi termini, a cui i rapporti generali delle differenze continuamente si avvicinano mentre che queste si fanno continuamente diminuire. Questi rapporti chiamansi ancora primi rapporti delle differenze, imperocché si possono riguardar egualmente come i limiti da cui partono i rapporti generali delle differenze considerate come nascenti per ricevere poi continue aumentazioni.	*Definition of ultimate ratios of differences* The ratios of the differences are named ultimate ratios of the differences, considering them in the point where they are going to vanish. Actually these ratios are not ratios of any real differences, since it's supposed that each of them has become equal to zero. They only express the ultimate terms, to which the general ratios of differences continuously approach, while they continuously decrease. These ratios are also named first ratios of the differences, because they can be seen as limits from which the general ratios of the differences, considered as rising to receive continuous increases, begin.
Definizione di calcolo differenziale Quindi è che per Calcolo Differenziale puramente detto s'intende comunemente quello, che determina li ultimi rapporti delle differenze; e similmente espressioni differenziali, od equazioni differenziali si appellano quelle, che somministrano i detti rapporti.	*Definition of Differential Calculus* By Differential Calculus we mean that, which determines the ultimate ratios of the differences. We name differential expressions or differential equations those which give such ratios.
Differenze algebriche e geometriche Ora siccome abbiamo ritrouato nelle espressioni delle differenze algebraiche certi limiti ne' loro rapporti; tali limiti douranno	*Algebraic and geometrical differences* Since we found certain limits in the ratios of the algebraic differences, the same limits should also exist in the ratios of the geometric

anche esistere ne' rapporti delle differenze geometriche, che alle algebraiche corispondono; e per ritrovarli si terrà un metodo analogo a quello che abbiamo sin qui usato nelle espressioni algebraiche, cioè si supporrà primieramente che le differenze siano prodotte, e si ricercheranno i loro rapporti supponendo, che diminuiscano esse continuamente sino a suanire del tutto, cioè che linee variabili ritornino nella loro prima situazione. In cotal guisa se si prendano a dirittura per uguali quelle quantità di cui la differenza si vede dovere svanire, si potranno senza veruna difficoltà scuoprire i limiti ricercati.	differences. To find them we use a similar method, i.e. we firstly suppose that the differences are made and we look for their ratios, by supposing that they continuously decrease until they completely disappear, i. e. the variable lines return to their first situation. If we assume that the quantities whose differences disappear are equal, we can find without difficulty the limits we were searching for.
La differenza finita di $\frac{x}{y}$ Sieno in terzo luogo le variabili divise le une per le altre per esempio debbasi prendere la differenza di $\frac{x}{y}$ posto $x + dx$ in luogo di x, e $y + dy$ in luogo di y, questa frazione diverrà $\frac{x+dx}{y+dy}$, da cui sottraendo $\frac{x}{y}$ si aurà $\frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y}$ per la differenza ricercata. Riducansi queste due frazioni alla medesima denominazione e ne risulterà $$\frac{yx + ydx - xy - xdy}{y(y + dy)} = \frac{ydx - xdy}{y(y + dy)} = d \cdot \frac{x}{y}$$	*The finite difference of* $\frac{x}{y}$ We want to determine the difference $\frac{x}{y}$. Placed $x + dx$ in place of x and $y + dy$ in place of y the fraction becomes $\frac{x+dx}{y+dy}$. Subtracting $\frac{x}{y}$ from it, we obtain $$\frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$$ For the sought difference. If we reduce these fractions to the same denominator, we will have $$\frac{yx + ydx - xy - xdy}{y(y + dy)} = \frac{ydx - xdy}{y(y + dy)} = d.\frac{x}{y}$$
Il differenziale di $\frac{x}{y}$ La frazione $\frac{x}{y}$ ha per la sua differenza finita l'espressione $\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}$, che paragonata colla formula $Pdx + Qdy$ dà $P = \frac{y}{y(y+dy)}, Q = \frac{-x}{y(y+dy)}$ e fatto il $dy = 0, P = \frac{y}{y^2}; Q = -\frac{x}{y^2}$; onde si ricava il differenziale di $\frac{x}{y}$ eguale $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ dal che ne segue la regola generale per le frazioni, cioè che La differenza di una frazione qualunque è uguale al prodotto della differenza del numeratore nel denominatore meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore.	*The differential of* $\frac{x}{y}$ If we put $dy = 0$, we obtain the differential of $\frac{x}{y}$, equal to $$\frac{ydx - xdy}{y^2}$$ The general rule for fractions is: the difference of any fractions is equal to the product of the difference of the numerator times denominator minus the product of the difference of the denominator times numerator, all these terms divided by the square of the denominator.
Il calcolo integrale Le regole di questo Calcolo [Calcolo Integrale] derivano immediatamente da quelle del Calcolo differenziale […]. Quindi per ritrovar l'integrale di una qualsivoglia differenziale data basterà ricercare una formula che	*The integral calculus* The rules of the integral calculus come from those of the differential one. Thus, to find the integral of any given differential, it's sufficient to search for a formula that, differentiated according to the previous laws, becomes the proposed differential.

differenziata secondo le date regole divenga la differenziale proposta. Le integrazioni si dinotano comunemente colla lettera S prefissa alla formula differenziale da integrarsi, nella medesima maniera che le differenziazioni si esprimono per la pura lettera d. Così $S.dx$ sarà l'integrale di dx e perciò sarà $= x$, qualunque sia essa variabile x. […] Siccome nel differenziare una quantità, svaniscono sempre le quantità costanti ad essa aggiunte, così nello integrare un differenziale si potrà sempre aggiugnere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante, la quale verrà poi determinata ad arbitrio per via di qualche condizione particolare a cui si vorrà addattare la formula. Laonde l'integrale di dx sarà non solo x ma ancora $x + a$, posta per a una costante qualunque indeterminata. […]	The integrations are denoted with the letter S before the integrating differential formula, in the same way the differences are denoted with the letter d. So $\boldsymbol{S.dx}$ means the integral of dx and it will be equal to x, for each variable x. Since in differentiating a quantity, constant quantities added to it always disappear, in integrating a differential we have to add to the integral any constant, that will be determined through some particular condition. So the integral of dx will be not only x, but also $x + a$, where a is any undetermined constant.
Applicazione della teoria delle somme alle quantità geometriche Si consideri una Curva qualunque data AN rapportata all'asse AM, di cui le ordinate esprimano una funzione data y del ascissa x. Presa un ascissa qualunque AM si divida in parti uguali AB, BC, CD…: di cui ciascheduna sia eguale alla differenza dx che si suppone costante e da ogni punto B, C, D … tirinsi le rispettive ordinate Bb, Cc, Dd… e compiscansi i rettangoli Bf, Cg, Dh…: elli è chiaro che tutti questi rettangoli inscritti costituiranno una serie, di cui ciaschedun termine sarà espresso generalmente per ydx, prodotto dell'ordinata che fa l'altezza del rettangolo moltiplicata per la differenza dell'ascissa, che ne fa la base. Dunque se si integri la formula ydx il valore di $S \cdot ydx$ darà la somma generale di tutti questi tali rettangoli, di maniera che posto poscia $x = AM$ si aurà la somma di tutti i rettangoli contenuti nello spazio AMNA.	*The application of the theory of the sums to geometrical quantities* Consider any given curve AN referred to the axis AM, whose ordinates represent any given function of the abscissa x. Divide any abscissa AM in equal parts AB, BC, CD …, so that each of them is equal to the difference dx (that we assume constant). From any points B, C, D, take the ordinates Bb, Cc, Dd and complete the rectangles Bf, Cg, Dh… All the inscribed rectangles constitute a serie, whose terms are generally expressed by ydx. If we integrate the formula ydx, the value of $S \cdot ydx$ will give the general sum of all these rectangles, so that if we suppose $x = AM$, we will obtain the sum of all the rectangles contained in the space $AMNA$.
Questo metodo di ricavar dalla somma dei rettangoli inscritti, la misura di tutta la figura è generale per qualunque curva; imperciocché, ripigliata la figura prima e compiti i rettangoli lB, mf, ng ...: si mostrerà sempre che la somma di questi rettangoli è eguale al rettangolo ultimo De eguale perciò a ydx. Ma la differenza di ciascuno de' rettangoli inscritti bC allo spazio $BbcC$ essendo eguale al bfc sarà sempre minore del rettangolo $bmcf$ in cui è contenuto; Quindi la somma di tutte queste differenze sarà anche minore della somma di	This method for obtaining the measure of the entire figure from the sum of the inscribed rectangles is general for any curve. So, starting from the previous figure and completed the rectangles lB, mf, ng ... we will always demonstrate that the sum of these rectangles is equal to the ultimate rectangles De, equal to ydx. But the difference of each inscribed rectangle bC to the space $BbcC$, being equal to bfc, will always be smaller than the rectangle $bmcf$, in which it is contained. Thus, the sum of all these differences will also be smaller than

tutti i rettangoli lB, mf, ...: che viene espressa per ydx; perciò quanto più si diminuirà questa somma ydx tanto più dourà diminuire quella differenza sinché divenendo questa $= 0$ per la posizione di $dx = 0$, svanirà altresì totalmente essa differenza e l'integrale ritrovato $S \cdot ydx$ esprimerà esattamente tutta l'area della Curva AMN.	the sum of the rectangles lB, mf…, which is expressed by ydx. The more you will decrease the sum ydx, the more it will have to decrease that difference until becoming equal to 0 for the position of $dx = 0$, this difference will totally vanish and the integral $S \cdot ydx$ will exactly express all the area of the curve AMN.

b) Regole di derivazione/differenziazione. Un confronto tra Lagrange e il linguaggio moderno

Leggere il brano tratto dai *Principi di Analisi Sublime* relativo al calcolo della differenza finita e del differenziale di $\frac{x}{y}$.

Sia proposta una funzione qualunque algebraica delle variabili x, y, z … e si dinoti come $F(x, y, z)$*; supposgasi che le variabili le quali in essa contengonsi vengano a crescere delle loro differenze* dx, dy, dz *…. Sicché esse diventino* $x + dx, y + dy, z + dz$ *… e la funzione proposta dovrà parimenti mutarsi in* $F(x + dx, y + dy, z + dz)$ *dalla quale sottraendo la prima rimarrà per la sua differenza ricercata* $F(x + dx, y + dy, z + dz) - F(x, y, z)$.

10°. Sieno in terzo luogo le variabili divise le une per le altre per esempio debbasi prendere la differenza di $\frac{x}{y}$ posto $x+dx$ in luogo di x, e $y+dy$ in luogo di y, questa frazione diverrà $\frac{x+dx}{y+dy}$, da cui sottraendo $\frac{x}{y}$ si aurà $\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}$ per la differenza ricercata.

Riducansi queste due frazioni alla medesima denominazione e ne risulterà $\frac{yx+ydx-xy-xdy}{y(y+dy)}=\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}=d\cdot\frac{x}{y}$.

3°. La frazione $\frac{x}{y}$ ha per la sua differenza finita l'espressione 67v
$\frac{ydx-xdy}{y(y+dy)}$, § 9°[80], che paragonata colla formula $Pdx+Qdy$ dà $P=\frac{y}{y(y+dy)}$, $Q=\frac{-x}{y(y+dy)}$, e fatto il $dy=0$, $P=\frac{y}{y^2}$; $Q=-\frac{x}{y^2}$; onde si ricava il differenziale di $\frac{x}{y}$ eguale $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ dal che ne segue la regola generale per le frazioni, cioè, che

La differenza di una frazione qualunque è uguale al prodotto della differenza del numeratore nel denominatore meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, il tutto diviso pel quadrato del denominatore.

Riscrivere i passaggi sviluppati da Lagrange nel linguaggio moderno.

Rileggi il testo e individua l'operazione aritmetica usata per giungere alla definizione di derivata secondo Lagrange.

____

c) Istruzioni per la costruzione della concoide di Nicomede con GeoGebra

- Costruzione di un punto arbitrario C sull'asse delle ordinate col comando *Punto su oggetto*
- Creazione del parametro a variabile nell'intervallo [1, 10] mediante il comando *Slider*
- Costruzione della circonferenza c di centro C e raggio a col comando *Circonferenza dati centro e raggio*
- Intersezione tra la circonferenza c e l'asse delle ascisse e individuazione del punto A
- Costruzione del segmento f di estremi C, A
- Costruzione della retta g perpendicolare al segmento CA e passante per A col comando *Retta perpendicolare*
- Creazione di un punto arbitrario P sulla retta g appena costruita
- Costruzione della retta h passante per C, P
- Creazione del parametro b variabile nell'intervallo [1; 10] mediante il comando *Slider*
- Costruzione della circonferenza e di centro P e raggio b col comando *Circonferenza dati centro e raggio*
- Individuazione dei punti L, M intersezione tra la retta h e la circonferenza e
- Costruzione della curva luogo dei punti L, al variare di P col comando *Luogo*
- Costruzione della curva luogo dei punti M, al variare di P col comando *Luogo*

Domande guidate per dedurre alcune caratteristiche della concoide di Nicomede

Muovere col puntatore gli slider a, b in modo che risulti $a > b$. Cosa si può osservare nella curva?

____

In tal caso la curva presenta un "nodo" nel punto __________

Cosa succede nella figura se risulta $a = b$?

____

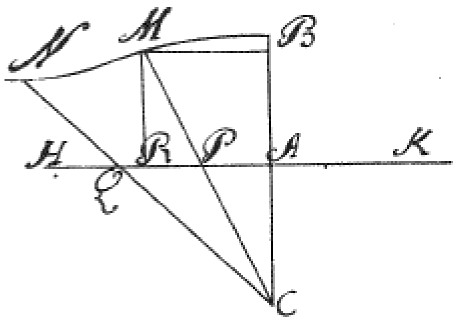
In tal caso la curva presenta una "cuspide" nel punto __________

Cosa succede nella figura se risulta $a < b$?

____

In tal caso la curva presenta un "punto isolato" nel punto __________

d) Istruzioni per ricavare l'equazione della concoide di Nicomede seguendo il testo di Lagrange.

	Per ridurre questa curva ad una equazione algebraica tirisi dal punto $\boldsymbol{C}$ la $\boldsymbol{CAB}$ perpendicolare ad $\boldsymbol{HK}$ e da un punto qualunque $\boldsymbol{M}$ di quei che ad essa Curva appartengono tirinsi le due rette $\boldsymbol{MR}$ ed $\boldsymbol{MB}$ parallele alle $\boldsymbol{AB}$ ed $\boldsymbol{AH}$ e si tiri $\boldsymbol{AR}$ per una ascissa $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{MR}$ per l'ordinata corrispondente $\boldsymbol{y}$. Chiamisi inoltre la distanza $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{a}$ la lunghezza costante $\boldsymbol{MP} = \boldsymbol{b}$, e ne' triangoli simili $\boldsymbol{RMP}$, $\boldsymbol{MBC}$ si aurà $RP : RM = MB : BC$ cioè $\sqrt{b^2 - y^2} : y = x : (a + y)$ e perciò $xy = (a + y)\sqrt{b^2 - y^2}$

e) Un'analisi testuale del problema della tangente.

Confrontare i brani (libro di testo e P.A.S. di Lagrange) e individuare le seguenti parole chiave: "ultimo limite", "curva", "differenza finita", "coefficiente angolare", "continuamente scemando", "posizione limite", "retta segante/secante", "limite", "tende a", "funzione".

In quale testo compare il termine "funzione"? Qual è il termine corrispondente usato nell'altro testo?

____

Riscrivere in termini moderni la definizione data da Lagrange di tangente ad una curva in un punto

____

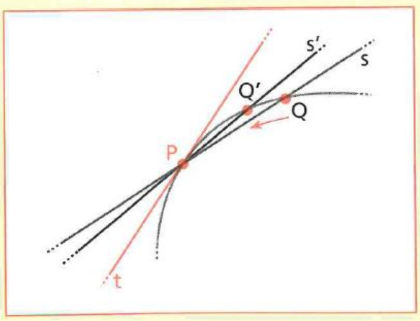
____

Libro di testo (Bergamini, Trifone, Barozzi, *Manuale blu di matematica*, 2012)

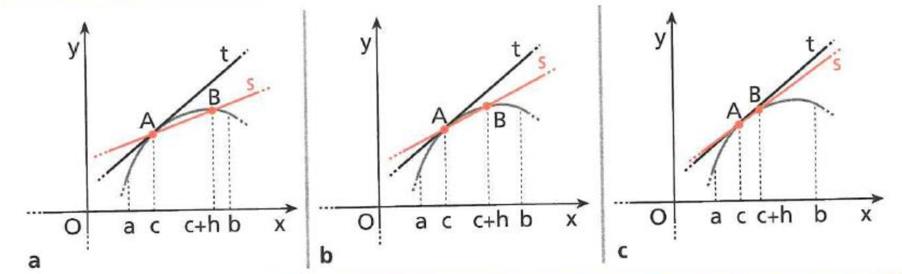
DEFINIZIONE

Retta tangente a una curva

La retta tangente t a una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della secante PQ al tendere (sia da destra che da sinistra) di Q a P.



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a;\ b]$. Del grafico della funzione consideriamo i punti $A(c;\ f(c))$ e $B(c+h;\ f(c+h))$, con c e $c+h$ appartenenti all'intervallo.
Disegniamo la retta t tangente al grafico in A. Tracciamo inoltre la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di h.

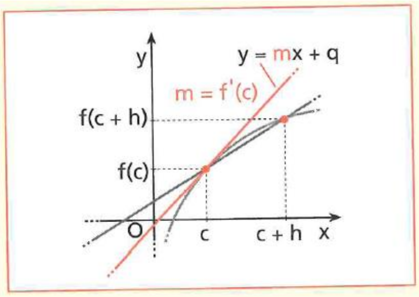


Attribuendo ad h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando $h \to 0$ il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato *derivata* della funzione nel punto c.

Derivata di una funzione

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a;\ b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno all'intervallo il limite, se esiste ed è *finito*, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c e si indica con $f'(c)$:

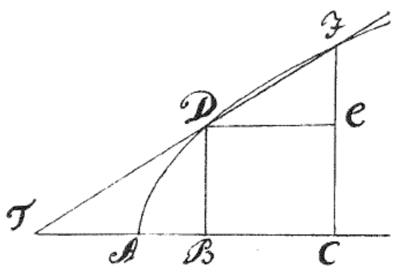
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$



La derivata di una funzione in un punto c rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa c.

Principj di Analisi Sublime (Lagrange)

Sia proposta una curva qualunque ADF, di cui si abbia l'equazione tra le coordinate x e y.



Sia AB un Ascissa qualunque, BD l'applicata corrispondente. Suppongasi, che l'ascissa AB cresca di una differenza finita BC l'applicata BD dourà venir nella posizione CF, e crescere parimenti di una differenza uguale FE; posto che dal punto D siasi tirata la retta DE parallela a BC; si conduca per i punti D, F la retta segante FD, che incontri la direttrice delle ascisse in T, e per i triangoli simili TDB, DFE si aurà sempre FE : DE=DB : TB; onde TB=DB $\times \frac{DE}{FE} = \frac{ydx}{dy}$. Ora la differenza BC si supponga vada continuamente scemando sino a diventar =0 sinché il punto C venga a coincidere in B, l'applicata CF ritornerà nella sua primiera situazione e svanirà perciò la differenza FE, ed i due punti di curva D F si riuniranno in D, onde finalmente la segante FDT diverrà tangente allo stesso punto D. ||

22°. Quindi dunque ne segue, che in ogni punto di curva la tangen- 69v
te sarà quella che determina l'ultimo limite di tutte le seganti che per esso si possono condurre, di maniera che niun'altra retta pel punto del contatto possa passare che non seghi in qualche altro punto la detta curva.

Siccome adunque la posizione delle seganti dipende generalmente dal rapporto delle due differenze DE ed FE, si aurà la posizione delle tangenti, riducendo questo rapporto al suo ultimo limite, come sin qui si è insegnato.

f) Il calcolo integrale in Lagrange

Leggere il brano tratto dai *Principj di Analisi Sublime* relativo al calcolo integrale.

50°. Nel calcolo integrale si considerano, dati i rapporti delle differenze delle variabili, e si ricercano quelli delle variabili medesime come si è detto, § [6°][138], Le regole adunque di questo Calcolo derivano immediatamente da quelle del Calcolo differenziale, come nell'Algebra comune le regole della divisione e della estrazione delle radici si deducono da quelle della moltiplica, e della formazion delle potestà. Quindi per ritrovar l'integrale di una qualsivoglia differenziale data basterà ricercare una formula che differenziata secondo le date regole divenga la differenziale proposta.

Le integrazioni si dinotano comunemente colla lettera S prefissa alla formula differenziale da integrarsi, nella medesima maniera che le differenziazioni si esprimono per la pura lettera d. Così $S \cdot dx$ sarà l'integrale di dx e perciò sara $=x$, qualunque sia essa variabile x. Ma qui è da notarsi, che siccome nel differenziare una quantità, svaniscono sempre

le quantità costanti ad || essa aggiunte, così nello integrare un differen- 101r
ziale si potrà sempre aggiugnere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante, la quale verrà poi determinata ad arbitrio per via di qualche condizione particolare a cui si vorrà addattare la formula.

Laonde l'integrale di dx sarà non solo x ma ancora $x+a$, posta per a una costante qualunque indeterminata, onde se si voglia che il valore di $S \cdot dx$ sia tale che fatto $x=0$ esso diventi $=b$ si aurà $a=b$ e quindi sarà in questo [caso] $S \cdot dx = x + b$.

All'incontro se l'integrale $S \cdot dx$ dovesse svanire svanendo l'x bisognerebbe fare $a=0$, onde ne risulterebbe la sola variabile x pel valore di $S \cdot dx$.

Questa regola dunque si dourà osservare in tutte le integrazioni di quali si vogliano quantità differenziali, acciocché le espressioni che se ne ricavano possano ricevere la maggior universalità possibile, e siano nello stesso tempo applicabili a tutti i casi particolari ch'elleno possono contenere.

Individuare nel testo la relazione tra derivata e integrale.

Con quale simbolo Lagrange indica gli integrali?

Perché è necessario «aggiungere all'integrale ritrovata una qualsivoglia costante»?

---

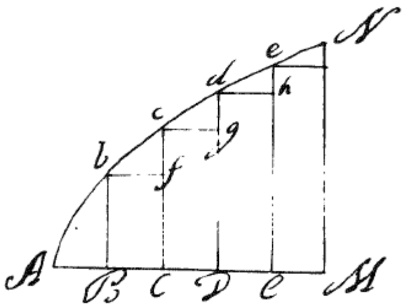
g) Interpretazione grafica dell'integrale

Leggere il seguente brano tratto dai *Principj di Analisi Sublime*.

Individua l'operazione aritmetica usata per giungere alla definizione di integrale secondo Lagrange.

---

sa x. Presa un ascissa qualunque AM si divida in parti uguali AB, BC, CD etc: di cui ciascheduna sia eguale alla differenza dx che si suppone costante e da ogni punto B C D etc: tirinsi le rispettive ordinate Bb, Cc, Dd e compiscansi i rettangoli Bf, Cg, Dh etc:



elli è chiaro che tutti questi rettangoli inscritti costituiranno una serie, di cui ciaschedun termine sarà espresso generalmente per ydx, prodotto dell'ordinata che fa l'altezza del rettangolo moltiplicata per la differenza dell'ascissa, che ne fa la base: Dunque se si integri la formula ydx il valore di $S \cdot y$dx darà la somma generale di tutti questi tali rettangoli, di maniera che posto poscia x=AM si aurà la somma di tutti i rettangoli contenuti nello spazio AMNA. ||