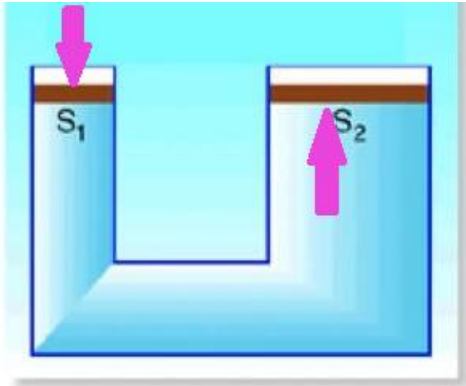


**Materials related to the Workshop of ESU-9: *The science of waters as the main field of applied mathematics*, by Maria Giulia Lugaresi**

**a) Il Principio di Pascal e le sue applicazioni**

Il torchio idraulico.



Siano  $S_1, S_2$  le due superfici diverse dei due cilindri che costituiscono il circuito idraulico chiuso, con  $S_1 > S_2$ . Se applichiamo una forza  $F_1$  alla superficie  $S_1$ , la pressione si trasmetterà anche alla superficie  $S_2$  che subirà una forza  $F_2$ . Per definizione di pressione abbiamo che

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1}; \quad P_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

Per il Principio di Pascal risulta che \_\_\_\_\_, ossia \_\_\_\_\_

Ricavando  $F_2$  in funzione delle altre quantità, si trova che

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

Possiamo osservare che:

Tanto più è grande il rapporto tra le sezioni, tanto **maggiore/minore** sarà la forza trasmessa.

[Scegliere l'alternativa corretta]

**b) La pressione atmosferica e l'esperimento di Torricelli**

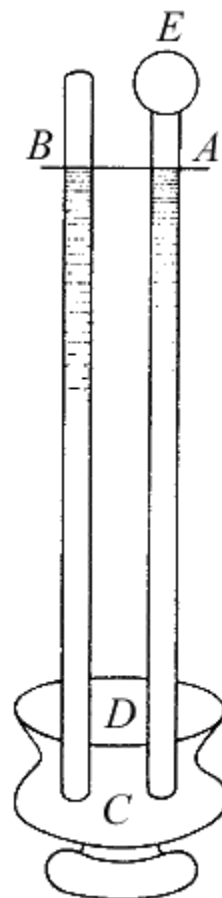
***Passo originale***

Molto Ill.re Sig.re Padron mio Col.mo

Mandai queste settimane passate alcune mie dimostrazioni sopra lo spazio della Cicloide al Sig.r Antonio Nardi, con pregarlo che dopo haverle vedute le inviasse a drittura a V. S. o pure al Sig.r Magiotti. Le accennai già che si stava facendo non so che sperienza filosofica intorno al vacuo, non per far semplicemente il vacuo, ma per far uno strumento che mostrasse le mutazioni dell'aria, hora più grave e grossa, et hor più leggiera e sottile. Molti hanno detto che il vacuo non si dia, altri che si dia, ma con repugnanza della natura e con fatica; non so già che alcuno habbia detto che si dia senza fatica e senza resistenza della natura. Io discorreva così: se trovassi una causa manifestissima, dalla quale derivi quella resistenza che si sente nel voler fare il vacuo, indarno mi pare si cercherebbe di attribuire al vacuo quella operazione, che deriva apertamente da altra cagione, anzi che, facendo certi calcoli facilissimi, io trovo che la causa da me addotta (cioè il peso dell'aria) dovrebbe per sé

sola far maggior contrasto che ella non fa nel tentarsi il vacuo. Dico ciò perché qualche Filosofo, vedendo di non poter fuggire questa confessione, che la gravità dell'aria cagioni la repugnanza che si sente nel fare il vacuo, non dicesse di concedere l'operazione del peso aereo ma persistesse nell'asseverare che anche la natura concorre a repugnare al vacuo. Noi viviamo sommersi nel fondo d'un pelago d'aria elementare, la quale per esperienze indubitate si sa che pesa, e tanto che questa grossissima vicino alla superficie terrena, pesa circa la quattrocentesima parte del peso dell'acqua. Gli Autori poi de' crepuscoli hanno osservato che l'aria vaporosa e visibile si alza sopra di noi intorno a cinquanta, ovvero cinquanta quattro miglia, ma io non credo tanto, perché mostrerei, che il vacuo dovrebbe far molto maggior resistenza che non fa, se bene vi è per loro il ripiego che quel peso scritto dal Galileo s'intenda dell'aria bassissima che ve praticano per l'homini e gli animali, ma che sopra le cime degl' alti monti l'aria cominci ad esser purissima e di molto minor peso che la 1/400 parte del peso dell'acqua. Noi habbiamo fatti molti vasi di vetro et anco come i seguenti, segnati A et B, grossi e di collo lungo due braccia, questi pieni d'argento vivo, poi serratagli con un dito la bocca e rivoltati in un vaso dove era l'argento vivo C, si vedevano votarsi e non succeder niente nel vaso che si votava; il collo però AD restava sempre pieno all'altezza d'un braccio e 1/4, et un dito di più.

Per mostrar che il vaso fusse perfettamente voto, si riempiva la catinella sottoposta d'acqua fino in D et alzando il vaso a poco a poco, si vedeva, quando la bocca del vaso arrivava all'acqua, descender quell'argento vivo dal collo, e riempirsi con impeto orribile d'acqua fino al segno E affatto. Il discorso si faceva mentre il vaso AE stava voto e l'argento vivo si sosteneva benché gravissimamente nel collo AC, questa forza, che regge quell'argento vivo contro la sua naturalezza di ricader giù, si è veduto fino adesso che sia stata interna nel vaso AE, o di vacuo, o di quella roba sommamente rarefatta; ma io pretendo, che la sia esterna e che la forza venga di fuori. Su la superficie del liquore che è nella catinella gravita l'altezza di cinquanta miglia d'aria; però qual maraviglia è se nel vetro CE, dove l'argento vivo non ha inclinazione, nè anco repugnanza per non esservi nulla, entri e vi s'innalzi fin tanto, che si equilibri colla gravità dell'aria esterna, che lo spinge? L'acqua poi in un vaso simile, ma molto più lungo, salirà quasi fino a diciotto braccia, cioè tanto più dell'argento vivo, quanto più l'argento vivo è più grave dell'acqua, per equilibrarsi con la medesima cagione che spinge e l'uno e l'altro. Confermava il discorso l'esperienza fatta nel medesimo tempo col vaso A e colla canna B, ne' quali l'argento vivo si fermava sempre nel medesimo orizzonte AB segno quasi certo che la virtù non



era dentro; perché più forza averebbe avuto il vaso *AE*, dove era più roba rarefatta e attraente, e molto più gagliarda per la rarefattione maggiore che quella del pochissimo spatio *B*.

Ho poi cercato di salvar con questo principio tutte le sorte di repugnanze che sentono nelli varii effetti attribuiti al vacuo, nè vi ho fin' hora incontrato cosa che non cammini bene. So che a V. S. sovverranno molte obbiezzioni, ma spero anche che pensandovi le sopirà. La mia intenzione principale poi non è potuta riuscire, cioè di conoscer quando l'aria fusse più grossa e grave e quando più sottile e leggiera collo strumento *EC*, perché il livello *AB* si muta per un'altra causa (che io non credevo mai) cioè per il caldo e freddo e molto sensibilmente, apunto come se il vaso *AE* fusse pieno d'aria.

11 giugno 1644

<http://www.imss.fi.it/multi/torricel/le110644.html>

A partire dalla lettura della lettera di Torricelli a Michelangelo Ricci, descrivere l'esperimento per determinare la pressione.

### c) Selezione di proposizioni dal trattato *Sui Galleggianti* di Archimede: il principio di Archimede

<i>Passo originale</i>	<i>English translation</i>
Prop. 3. Le grandezze solide, che avendo equal mole hanno equal gravità del liquido, poste nel liquido talmente s'immergono, che niente resta fuori della superficie del liquido, ma non però vanno a fondo.	Prop. 3. Of solids those which, size for size, are of equal weight with a fluid, if let down into the fluid, be immersed so that they do not project above the surface but do not sink lower.
Prop. 4. Delle grandezze solide, qualunque è più leggieri del liquido, nel liquido posta non tutta si immerge, ma una parte di essa sovrasterà alla superficie del liquido.	Prop. 4. A solid lighter than a fluid will not, if immersed in it, be completely submerged, but part of it will project above the surface.
Prop. 5. Delle grandezze solide la più leggieri del liquido, posta nel liquido, fino a tanto vi si immerge, che tanta mole di liquido, quanto la parte sommersa, abbia la stessa gravità, che tutta la grandezza.	Prop. 5. Any solid lighter than a fluid will, if placed in the fluid, be so far immersed that the weight of the solid will be equal to the weight of the fluid displaced.
Prop. 6. Qualunque delle solide grandezze più leggieri del liquido, dentro al liquido spinta, si porta in su con tanta forza, quanto un liquido di mole eguale alla grandezza è più grave della stessa grandezza.	Prop. 6. If a solid lighter than a fluid be forcibly immersed in it, the solid will be driven upwards by a force equal to the difference between its weight and the weight of the fluid displaced.
Prop. 7. Le grandezze solide più gravi del liquido, nel liquido poste, anderanno in giù finché possano scendere, e nel liquido saranno tanto più leggier, quanto è la gravità del liquido, che abbia mole eguale alla grandezza.	Prop. 7. A solid heavier than a fluid will, if placed in it, descend to the bottom of the fluid, and the solid will, when weighed in the fluid, be lighter than its true weight by the weight of the fluid displaced.

Leggere le proposizioni di Archimede e riscriverle in un linguaggio moderno.

In che modo Archimede esprime la condizione di galleggiamento di un corpo immerso in un liquido?

---

In che modo Archimede esprime la condizione per cui un corpo immerso in un liquido affonda?

---

In che modo Archimede esprime la condizione per cui un corpo immerso in un liquido resta in equilibrio?

---

#### d) Origini del principio di Archimede

Il resoconto di Vitruvio: Archimede e il problema della corona

Quelle cose che ho possuto de la uirtute & uarietate de laqua, & quale utilitate ella habia, & con quale ratione ella si conduca, & se proba, in questo uolumine le ho posite. Ma de le Gnomonice cose, & de le ratione de li Horologij in lo sequente io prescriuaro.

¶ Marco Vitruuio Pollione Libro nono, in lo quale descritte le ratione de le cose Gnomonice, & de li Horologij.



Li nobili Athleti, quali li Olimpij, Pithij, Isthmij, Nemei, hauesseno uincto, li magiori de li greci cosi magni honori gli instituirno, che non solamente stando nel conuento con la palma & corona porteno le laude, ma anchora quando retornano in le sue Cita con uictoria triuphanti, con le quadrige in li menij, & in la patria siano inuecti, & da la republica fruiscono la perpetua uita de li constituiti uectigali. Io aduncha animaduertendo questa cosa, mi marauaglio, per che cosi non a li scriptori, quelli medemi honori, & anchora magiori siano attribuiti, li quali infinite utilitate in la perpetua etate a ogni gente prestano. Impero che questa cosa era piu digna da essere instituita, per che li Athleti con le exercitatione piu forti efficeno li soi corpi. Ma li scriptori non solamente li soi sensi exacuiflano, ma anchora li sensi de tutti, preparā

do li p̄cepti cō li loro libri ad imparare, & ad exacuīre li animi. Ma che cosa Milone Crotoniate, per che fu inuictō, gioua a li hominī: o uero altri, quali de tale generatōne sono stati uincitori, se non che mentre essi hāno uiuuto intra li soi citadini hāno hauuto la nobilitate. Ma li quottidiani p̄cepti de Pithagora, de Democrito, de Platone, de Aristotele, & de li altri sapienti con le perpetue industrie exculti, non solamente a li soi citadini, ma anchora ad ogni gente emitteno li recentī & floridī fructi, de li quali, quelli che da le tenere etate de la abundantia de le doctrine si fatiano, hāno de la sapientia li optimi sensi, & istituisseno in le Cita li costumi de la humanitate, le equale ratione, le lege, quale absente, niuna Cita po esser incolume. Come aduncha tanti doni da la prudentia de li scriptori priuatamente & publicamente siano stati a li hominī preparati, non solamente io arbitro le palme & le corone ad essi bisognare essere attribuite, ma anchora essere decernuti li triumphī, & douere essere iudicato intra le sedie de li Dei quelli essere dedicandi. Ma le loro cose cogitate utilmente a li hominī a la uita da esser explicata, de molti dicti io ne ponero alcuni, si come exempli singulari de pochi sapienti. Quali exēpli li hominī recognoscendo con fessarano essere opportuno a quelli necessariamente li honori essere attribuiti, & priamente de molte utilissime ratiocinatione de Platone una, per qual modo da esso sia explicata, io ponaro.

La bilancetta di Galileo.

Testo originale: <https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2500627>

Video:

<https://mostre.museogalileo.it/archimede/video/BilancettaIngannoCoronaSecondoGalileo.html>

Testo originale con traduzione inglese:

<https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Crown/bilancetta.html>

### e) La legge di conservazione della portata

La legge di conservazione della portata afferma che  $Q = Av = \text{costante}$

La relazione  $Av = \text{costante}$  esprime quindi una legge di proporzionalità \_\_\_\_\_

In particolare, se  $A_1 > A_2$ , allora  $v_1 \dots v_2$

Sapendo che vale la legge di conservazione della portata, completare opportunamente la seguente tabella:

Area $A$ [ $m^2$ ]	Velocità $v$ [ $m/s$ ]	Portata $Q$ [ $m^3/s$ ]
8		4
	1	4

Leggere i seguenti brani tratti da opere di B. Castelli, D. Guglielmini, B. Zandrini. Con quale termine ciascuno di questi autori esprime il concetto di portata?

Moltissime notizie ancora si possono dedurre dalla medesima dottrina, le quali tralascio, perchè ciascheduno da se stesso le potrà facilmente intendere, fermata bene, che averà questa massima; che non è possibile pronunziare niente di certo intorno alla quantità dell'acqua corrente, con considerare solo la semplice misura volgare dell'acqua senza la velocità, siccome per lo contrario; chi tenesse conto solamente della velocità senza la misura commetterebbe errori grandissimi; imperocchè trattandosi della misura dell'acqua corrente, è necessario, essendo l'acqua corpo, per formare concetto della sua quantità, considerare in essa tutte tre le dimensioni, cioè, larghezza, profondità, e lunghezza: le prime due dimensioni sono osservate da tutti nel modo comune, ed ordinario di misurare le acque correnti; ma viene tralasciata la terza dimensione della lunghezza, e forse tal mancamento è stato commesso, per essere riputata la lunghezza dell'acqua corrente in un certo modo infinita, mentre non finisce mai di passare, e come infinita è stata giudicata incomprendibile, e tale, che non se ne possa avere determinata notizia, e pertanto non è stato di essa tenuto conto alcuno; ma se noi più attentamente faremo riflessione alla considerazione nostra della velocità dell'

Tom. I. L ... acqua,

B. Castelli, *Copia di lettera al Sig. Galileo Galilei*

locità maggiore dell'altra, e così al contrario.

XI. *Quantità d'acqua* intendiamo tutta la mole dell'acqua, che in un dato tempo scorre per una data sezione.

XII. Quello che abbiamo detto intorno alla egualità, ed ineguali-

D. Guglielmini, *Misura delle acque correnti*, libro I

### R E G O L A   I I I .

Dalla medesima ragione facilmente si può dedurre, che (a) la velocità di un fiume allora sarà maggiore, quando più grande sarà il corpo d'acqua, che porterà; posciachè, (supposto il medesimo pendio, e le medesime resistenze) avrà più forza di superar queste, la copia più grande dell'acqua, come più grave, che la minore: e perciò i fiumi nelle loro piene, corrono con maggiore velocità, che ne' tempi, ne' quali sono più magri di acqua; il che è vero ancora per un' altra ragione, cioè, perchè l'acqua più alta, e per conseguenza maggiormente lontana dal fondo, più si scosta dalle resistenze di esso. Bisogna però avvertire di non lasciarsi ingannare dall'apparenza, che ordinariamente lusinga gli uomini a giudicare della portata dell'acqua di un fiume.

#### DELLA NATURA DE' FIUMI.

287

fiume, dalla grandezza della sezione di esso, senza considerazione della velocità; poichè può darsi il caso, che l'altezza maggiore dell'acqua dipenda dal ritardamento della velocità, non dall'accrescimento di acqua nel fiume; e che in vece, che dall'altezza maggiore si possa arguire maggior velocità, piuttosto si riscontri minore; ma ciò non succederà ne' nostri supposti.

D. Guglielmini, *Della natura dei fiumi*, capitolo IV, regola III

### X V I .

*Scolio.* Si chiami in grazia di esempio la quantità dell'acqua scaricata da una sezione di un fiume  $Q$ ; la velocità, larghezza, ed altezza dell'acqua nella sezione rispettivamente  $V, L, A$ , il tempo in cui segue lo scarico  $T$ ; Parimenti la quantità scaricata da un'altra sezione o del medesimo, o di un altro fiume sia  $q$ , e gli elementi predetti  $u, l, a, t$ ; farà l'analogia per il numero precedente  $Q. q :: ALVT. alut$ , onde se  $Q = q$ , farà ancora  $ALVT = alut$ , e se inoltre  $v = u$  farà  $LAT = lat$ , ovvero  $T. t :: al. al$ .  $AL$ , vale a dire, che i tempi dello scarico saranno nella ragione inversa delle sezioni. In oltre, tenendosi la medesima ipotesi di  $Q = q$ , se farà  $T = t$ , s'averà  $LAV = lau$ , e però  $V. u :: la. LA$ , cioè le velocità in ragione contraria delle sezioni; e se  $L = l$  farà  $AVT = aut$ , ovvero  $T. t :: au. AV$ ; che però date le larghezze delle sezioni eguali, faranno i tempi in ragione reciproca del prodotto dell'altezza viva, e della velocità, e così in qualunque altro modo, supposti i dati, nascono altre analogie come resta manifesto, senza immorar di vantaggio in cosa da se stessa assai facile.

B. Zandrini, *Leggi e fenomeni, regolazioni ed usi delle acque correnti*, capitolo I, scolio XVI

Qual è il significato dell'espressione matematica evidenziata? Come verrebbe riscritta utilizzando la notazione oggi in uso? \_\_\_\_\_

---

Se  $Q = q$ , quali conseguenze si possono dedurre rispetto alla relazione tra tempo e sezione?

---

### f) Conseguenze del Teorema di Bernoulli

Il Teorema di Bernoulli afferma che:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gh_2 = \text{costante}$$

In condizioni di equilibrio, ossia \_\_\_\_\_, il Teorema di Bernoulli contiene la legge di Stevino come caso particolare. Infatti risulta \_\_\_\_\_

A parità di quota effettiva, ossia \_\_\_\_\_, se aumenta la velocità, cosa succede alla pressione?

---



g) Misurare la velocità del fiume Po: la proposta di Teodoro Bonati (*Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un'Acqua corrente, 1799*)

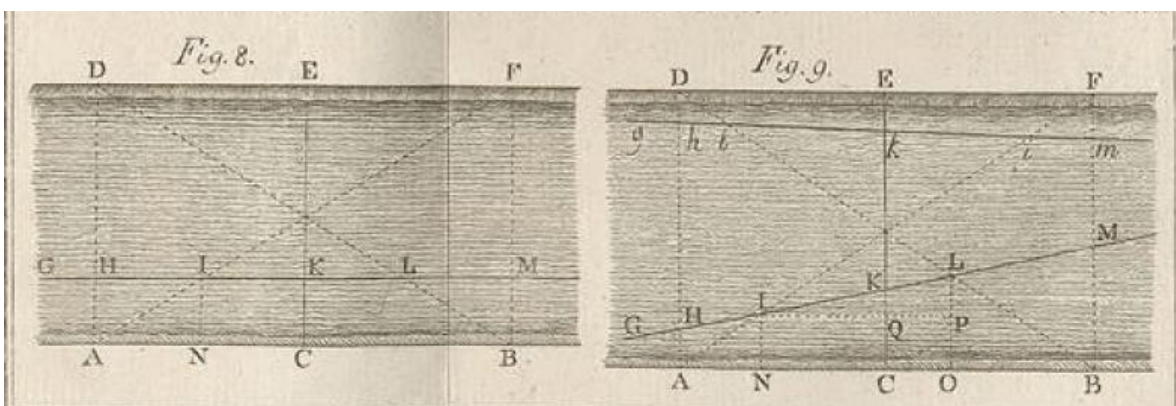
Leggere l'estratto della memoria di Teodoro Bonati e seguendo la traccia da lui fornita, determinare la velocità del fiume in un tratto assegnato.

Siano  $AB$  (fig. 8) la sponda destra, e  $DF$  la sinistra del tratto scelto, e la sezione sia stata fatta in  $CE$ . Normalmente alla  $CE$  sia misurata sulla sponda destra una linea retta  $ACB$  lunga da  $C$  in  $B$  30 tese, e di altrettanto da  $C$  in  $A$ . Sulla sponda sinistra si mettano tre scopi, uno in  $E$ , ed altri due in  $D$ , ed in  $F$ , che cadano nelle visuali  $AD$ ,  $BF$  normali alla  $AB$ . S' intendano altre due visuali  $AF$ ,  $BD$ . Colla Tavoletta Pretoriana, o in qualche altra maniera, si misurino le  $AD$ ,  $DF$ . Non importa, che queste sieno eguali.

Preparate così le cose, e collocati tre osservatori ai punti  $A$ ,  $C$ ,  $B$ , venga da  $G$  un' asta portata dall' acqua per una linea retta  $GHM$ , e gli osservatori diano il segno dell' arrivo dell' asta ai punti  $H$ ,  $I$ ,  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , e con un orologio a secondi, o con un pendolo a secondi, oppure a semi-secondi, si notino i tempi impiegati dall' asta da  $H$  in  $I$ , da  $I$  in  $K$ , ec. Se si vedrà che i tempi per  $HK$ , e per  $KM$  sieno stati eguali, si potrà concludere, che la velocità dell' asta sia stata uniforme. E volendo supporre la  $GM$  parallela alla  $AB$  il viaggio  $HM$  sarà noto perchè  $= AB$ , e perciò sarà nota la velocità dell' asta.

Per avere il punto  $K$  della sezione  $CE$ , o sia per avere la distanza  $KC$ , s' intenda condotta la  $IN$  normale alla  $AB$ . Sarà  $AN = HI$ . E facendo come il tempo per  $HM$  al tempo per  $HI :: HM : HI :: AB : AN$ , si potrà avere la  $AN$ . E per essere  $AB : BF :: AN : NI$ , si avrà la  $IN = KC$ .

Che se si temesse del parallelismo della  $GM$  colla  $AB$  (come non v' è nella fig. 9), s' intenda condotta anche la  $LO$  normale alla  $AB$ . Posta la equabilità del moto



dell'asta, saranno come i tempi notati così le HI, IK, KL, LM, e così pure le AN, NC, CO, OB, onde anche di queste ultime linee rette si possono avere le misure.

E perchè  $AB : BF :: AN : NI$ , e  $BA : AD :: BO : OL$ , si avranno anche le NI, OL; e condotta la IP parallela alla AB si avrà  $IP = NO$ ;  $PL = LO - IN$ ;  $LI = \sqrt{(IP^2 + PL^2)}$ ; e perchè  $IP : IL :: AB : HM$  si avrà ancora la HM, spazio scorso nel tempo notato. Dunque la velocità dell' asta sarà nota.

Resta da trovare la distanza CK. Poichè  $NO : NC :: IP : IQ :: PL : QK$  si avrà la QK, che aggiunta alla OP (= IN) darà la KC.

Ed ecco trovato il punto K del passaggio dell' asta per la sezione CE, e con quale velocità vi è passata.

Quindi si vede come convenga operare nel caso di qualunque altr' asta, che viaggiasse per altra linea, come per *ghkim*.

Per le aste più vicine alla sponda sinistra potrebbe tornare meglio il passare alla sinistra, come nel Po, attesa la sua larghezza. Nel resto mi riporto a quanto ho detto nella citata Memoria 1784, che fu ristampata in Pavia nel 1785.

Edizione integrale del testo: <https://media.accademiaxl.it/memorie/S1-V8-P1-2-1799/Bonati435-444.pdf>