X.

ALCUNE APPLICAZIONI DEL METODO DEL RIPIEGAMENTO DELLA CARTA DI SUNDARA-ROW (1)

Stralcio dalle mie lezioni del corso di Matematiche complementari tenuto all'Università di Ferrara nell'anno accademico 1933-34, il seguente problema, da me proposto come applicazione del *metodo del ripiegamento della carta* di SUNDARA-ROW (2), e che consente una semplice risoluzione mediante il detto metodo del problema classico della duplicazione del cubo, risoluzione che a quanto io sappia non è stata finora notata. Un'altra applicazione è un metodo da me dato per la risoluzione grafica delle equazioni di 3° grado, che completa il noto procedimento di LILL.

Il problema di cui si tratta è il seguente:

Costruire un quadrato di cui due lati opposti passino rispettivamente per due punti dati, e i due vertici situati su uno dei rimanenti lati stiano rispettivamente su due rette date.

Siano A, B i due punti dati; r, s le due rette date. Indichiamo con X, Y i vertici del quadrato da costruirsi, giacenti rispettivamente sulle rette r, s.

Un lato del quadrato sarà allora XY. Supponiamo che il secondo lato del quadrato uscente da X passi per A e il secondo lato uscente da Y passi per B.

Si consideri la parabola avente per fuoco il punto A, e per tangente nel vertice la retta r di cui per proprietà nota la retta (incognita) XY è tangente. Similmente si consideri la parabola avente per fuoco il punto B, e per tangente nel vertice la retta s, di cui per la stessa proprietà la retta XY è tangente. Questa retta si può quindi costruire come una delle tangenti comuni alle due parabole, e determinare quindi i punti X, Y e in conseguenza il quadrato richiesto.

Siccome due parabole hanno tre tangenti comuni, il problema ammette tre soluzioni, tra cui certo una reale.

---

(1) Pubb. in Atti dell'Acc. delle Scienze Mediche e Naturali di Ferrara, anno 1934.

(2) V. SUNDARA-ROW, *Geometric Exercises in Paper Foldeng* (Madras, Addison e C.o 1893; London, Court Company, 1917).

Le dette tangenti si possono trovare in modo semplicissimo col suddetto metodo del ripiegamento della carta. Basta all'uopo costruire la direttrice di ognuna delle due parabole, e siano rispettivamente d_1 e d_2, e ricordare la proprietà che il luogo dei punti simmetrici del fuoco rispetto alle varie tangenti della parabola è la direttrice, proprietà su cui si fonda la nota costruzione d'una parabola per tangenti col metodo del ripiegamento della carta.

Prendendo cioè l'orlo (rettilineo) d'un foglio di carta come direttrice della parabola, e segnando il fuoco alla data distanza da questa, basta tener fermo il fuoco e ripiegare la carta su se stessa in modo che l'orlo ripiegato venga a passare per il fuoco; la piega della carta darà una tangente della parabola, e questa quindi si potrà costruire per tangenti.

Per trovare una tangente comune alle due parabole basta dunque ripiegare la carta in modo che le due rette d_1, d_2 nel ripiegarsi vengano a passare rispettivamente per i due punti dati (ciò che si potrà ottenere usando un foglio di carta trasparente).

L'operazione spiegata si potrà eseguire con la stessa facilità e precisione con cui, nel disegno comune, si fa passare una riga per due dati punti, e permetterà di trovare le soluzioni (reali) del problema.

Il problema interessa anche, come sopra accennato, la risoluzione grafica delle equazioni di 3° grado, partendo dai dati del procedimento grafico di LILL (1), ed offrendo una nuova e semplice costruzione, che segue senz'altro da ciò che precede, e su cui avrò occasione di ritornare.

Un'altra applicazione è quella relativa al problema classico della duplicazione del cubo, il quale, come è noto, non si può risolvere con riga e compasso. A quanto io sappia la costruzione che dò non è stata finora notata.

Si prendano le due rette r, s tra loro ortogonali e sia O il loro punto comune. Supposto che il punto A del problema generale giaccia su s e il punto B giaccia su r, e applicando la costruzione sopra indicata, si potrà determinare il lato XY del quadrato richiesto, ossia date le distanze (note), $OA = a$, $OB = b$, si potranno determinare le distanze (incognite) $OX = x$ e $OY = y$ (risolvere cioè il problema delle due medie proporzionali) col metodo del ripiegamento della carta, ciò che lo stesso SUNDARA-ROW riteneva impossibile (2).

Infatti per proprietà note si ha

$$OA : OX = OX : OY = OY : OB$$

ossia

$$a : x = x : y = y : b.$$

---

(1) v. p. es. F. KLEIN. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, II, pag. 267 (Berlin, Springer 1925).

(2) v. *loc. cit.*, n. 112.

Se si prende $b = 2\,a$, si dovrà quindi avere contemporaneamente

$$x^2 = a\,y, \quad y^2 = 2\,a\,x$$

dalla prima delle quali si ha

$$y = \frac{x^2}{a}$$

e sostituendo nella seconda

$$\frac{x^4}{a^2} = 2\,a\,x,$$

da cui, essendo certamente x ($= O\,X$) diverso da zero,

$$x^3 = 2\,a^3,$$

ossia il segmento x costruito per $b = 2\,a$ è il lato del cubo di volume doppio di quello di lato a (dato).

XI.

SUL METODO DEL RIPIEGAMENTO DELLA CARTA PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI GEOMETRICI (1)

1. - Stralcio dalle mie lezioni del corso di Matematiche complementari, tenuto all'Università di Ferrara nell'anno accademico 1933-34, alcune osservazioni sul *Metodo del ripiegamento della carta* (2) osservazioni che valgono a dare maggiore portata a questo metodo, sia come mezzo di risoluzione effettiva di alcuni problemi, sia come semplicità di costruzione in confronto alle costruzioni con riga e compasso dal punto di vista della geometrografia.

2. - Il primo ad attirare, col suo autorevole giudizio, l'attenzione degli studiosi sul metodo del ripiegamento della carta, dovuto al matematico indiano SUNDARA ROW, fu il KLEIN nelle sue celebri *Conferenze* su questioni di matematica (3).

Ora si può osservare che questo metodo, più che una semplice curiosità matematica, costituisca uno strumento che può servire utilmente per la risoluzione effettiva di una vasta categoria di problemi geometrici non risolubili con riga e compasso, come pure può rappresentare un effettivo risparmio di tempo per certe costruzioni risolubili con riga e compasso, come per es. in determinate costruzioni per tangenti delle coniche (4), che possono utilmente servire per procurarsi con poca fatica dei modelli delle tre specie di coniche.

Fin dall'antichità furono posti accanto a riga e compasso altri strumenti per quei problemi la cui risoluzione era stata tentata invano con riga e compasso. Questi strumenti però non si trovano alla portata di tutti, sebbene sarebbe desiderabile che almeno i più pratici di essi (come per es. il compasso concoidale) diventassero più accessibili. Il metodo del ripiegamento della carta invece non richiede che un foglio di carta trasparente, che tutti si possono pro-

---

(1) Pubb. in «Periodico di Matematica», anno 1936.

(2) V. SUNDARA-ROW, *Geometric Exercises in Paper Folding* (Madras, Addison & C., 1893; Court Company, 1917).

(3) F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. II, pag. 267 (Berlin, Springer, 1926).

(4) V. *loc. cit.*, e C.A. RUPP, *On a transformation by paper-folding* («Amer. Math. Monthly», vol. XXXI, 1924, pag. 432).

curare e una matita (e per questioni metriche l'unità di misura segnata sull'orlo d'un ulteriore foglio di carta qualunque).

Si può ancora osservare che le operazioni che richiede il suddetto metodo si possono eseguire con la stessa precisione con cui si fa passare una riga per due dati punti.

Dal punto di vista della geometrografia per molte costruzioni si trova anzi una semplificazione (ammettendo equivalente l'operazione di ripiegamento della carta a quella del tracciamento di una retta con la riga, o di un cerchio col compasso). Così per es. il problema di condurre per un suo punto P, la perpendicolare ad una retta data, nel metodo che stiamo considerando ha bisogno di una sola operazione (un solo ripiegamento della carta in modo che la retta, a partire dal punto P, si ripieghi su se stessa), mentre con riga e compasso occorrono complessivamente quattro operazioni (tre volte uso del compasso e una volta della riga).

Gli inconvenienti che presenta il metodo saltano subito in vista senza bisogno di specificare.

In ciò che segue darò qualche esempio in cui applicando il metodo di cui ci stiamo occupando si ottengono realmente delle costruzioni nuove e semplici.

3. - Un problema da me proposto, che ammette varie applicazioni, è il seguente (v. anche articolo precedente):

Costruire un quadrato di cui due lati opposti, o i loro prolungamenti, passino rispettivamente per due punti dati, e i due vertici situati su uno dei rimanenti lati stiano rispettivamente su due rette date.

Siano A, B i due punti dati: r, s le due rette date. Indichiamo con X, Y i vertici del quadrato da costruirsi, giacenti rispettivamente sulle rette r, s.

Un lato del quadrato sarà allora $X\,Y$. Supponiamo che il secondo lato del quadrato uscente da X passi per A e il secondo lato uscente da Y passi per B.

Si consideri la parabola avente per fuoco il punto A, e per tangente nel vertice la retta r di cui per proprietà nota la retta (incognita) $X\,Y$ è tangente. Similmente si consideri la parabola avente per fuoco il punto B, e per tangente nel vertice la retta s, di cui per la stessa proprietà la retta $X\,Y$ è tangente. Questa retta si può quindi costruire come una delle tangenti comuni alle due parabole, e determinare quindi i punti X, Y e in conseguenza il quadrato richiesto.

Siccome due parabole hanno tre tangenti comuni, il problema ammette tre soluzioni (tra cui certo una reale).

Le dette tangenti si possono trovare in modo semplicissimo col suddetto metodo del ripiegamento della carta. Basta all'uopo costruire la direttrice di ognuna delle due parabole (1) e siano rispetti-

(1) Per costruire, col metodo del ripiegamento della carta, la direttrice della parabola di fuoco F e tangente, nel vertice, t, basta ripiegare la

vamente d_1 e d_2, e ricordare la proprietà che il luogo dei punti simmetrici del fuoco rispetto alle varie tangenti della parabola è la direttrice, proprietà su cui si fonda la nota costruzione d'una parabola per tangenti col metodo del ripiegamento della carta.

Prendendo cioè l'orlo (rettilineo) d'un foglio di carta come direttrice della parabola, e segnando il fuoco alla data distanza da questa, basta tener fermo il fuoco e ripiegare la carta su se stessa in modo che l'orlo ripiegato venga a passare per il fuoco; la piega della carta darà una tangente della parabola, e questa quindi si potrà costruire per tangenti.

Per trovare una tangente comune alle due parabole basta dunque ripiegare la carta in modo che le due rette d_1 e d_2 nel ripiegarsi vengano a passare rispettivamente per i due punti dati (ciò che si potrà ottenere usando un foglio di carta trasparente).

L'operazione spiegata si potrà eseguire con la stessa facilità e precisione con cui, nel disegno comune, si fa passare una riga per due dati punti, e permetterà di trovare le soluzioni (reali) del problema.

Per segnare i lati opposti del quadrato, passanti rispettivamente per A e per B, basta ripiegare la carta (trasparente) lungo la retta t (tangente comune delle parabole suddette), segnare (in trasparenza) i punti simmetrici A' e B' riseettivamente di A e di B e segnare poi con nuovi ripiegamenti della carta le rette AA' e BB'.

4. - Che i problemi di primo grado si possano risolvere col metodo del ripiegamento della carta, è evidente dopo ciò che si è detto nel n. precedente, poichè, riducendosi a equazioni di primo grado, richiedono sole costruzioni di quarte proporzionali, e quindi si riducono al tracciamento di rette parallele.

5. - Per i problemi di 2° grado basterà saper eseguire estrazioni di radici quadrate, determinazioni di quadrati, prodotti e quozienti di numeri, che si riducono alla costruzione di medie e quarte proporzionali, effettuabili col metodo del ripiegamento della carta (v. n. 5), ed a somme algebriche evidentemente effettuabili con i mezzi che consideriamo.

6. - Per le risoluzioni delle equazioni di 3° e 4° grado (poichè la risoluzione di queste ultime dipende dalla risoluzione di equazioni di 2° e 3° grado), basterà fermarci sul caso delle equazioni di 3° grado.

Il noto procedimento di Lill per la risoluzione grafica delle equa-

carta lungo t e segnare il punto simmetrico P di F (sulla carta trasparente). Segnare poi con un nuovo ripiegamento la retta $PF = a$ (normale a t). Piegare ancora la carta in modo che la retta a venga a sovrapporsi a se stessa a partire dal punto P. La piega della carta così ottenuta sarà la direttrice richiesta.

zioni di 3° grado (1) conduce a dover costruire un quadrato (o rettangolo) di cui due vertici consecutivi giacciano su due rette date (tra loro ortogonali) e i lati adiacenti passino rispettivamente per due punti dati, che è proprio un caso particolare del problema di cui ho dato sopra (v. n. 1) la risoluzione col metodo del ripiegamento della carta (2).

È dunque provato che anche *tutti i problemi di 3° e 4° grado si possono risolvere col metodo del ripiegamento della carta, avendo a disposizione un foglio di carta trasparente, una matita, e l'unità di misura segnata sull'orlo di un ulteriore foglio di carta, e non facendo uso di altri strumenti* (3).

---

(1) V. F. Klein. *loc. cit.* pag. 267.

(2) Metodo che si può sostituire all'uso della carta trasparente millimetrata o delle due squadre del procedimento di Lill.

(3) V. anche: M. Piazzolla-Beloch: *Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta.* (Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936).