Il fusionismo: moda didattica o riflessione sui fondamenti della geometria?

*Maria Teresa Borgato**

Abstract

The "fusionism" was an attempt to reform the teaching of elementary geometry involving the Italian school (after the French, German and Danish ones) in the last decades of the 1800s and the early 1900s. It intended to introduce plane and solid geometry at the same time, inferring the theorems in plane from space analogs and linking to researches on the foundations of elementary geometry. The treaties that have marked this evolution are the ones by De Paolis (1884) and Lazzeri and Bassani (1891). At the base of the fusionist setting up an important theoretical role was represented by the Desargues's theorem, brought to light by Peano and Hilbert. Mathesis was deeply involved in the debate over the opportunity to reform school curricula in a fusionist perspective.

Tra le questioni più rilevanti nell'insegnamento della matematica, che furono dibattute nell'ambito della Mathesis nei primissimi anni della sua fondazione, vi fu quella del *fusionismo*. Si trattava di un orientamento nell'insegnamento della geometria elementare che proponeva di trattare contemporaneamente argomenti di geometria piana e geometra solida.

Il movimento sorse in Europa negli anni Quaranta dell'Ottocento, ma in Italia si manifestò più tardi, dopo l'Unità nazionale e un primo riordino della pubblica istruzione su nuove basi.

Nel mio intervento intendo mostrare, sulla base anche del dibattito che ebbe luogo in seno alla Mathesis, che non si trattò solo di una moda didattica ma che il fusionismo traeva le sue giustificazioni nei fondamenti della geometria, che era un tema cruciale della ricerca matematica di quel periodo.

*Università di Ferrara, Dipartimento di Matematica e Informatica *bor@unife.it*

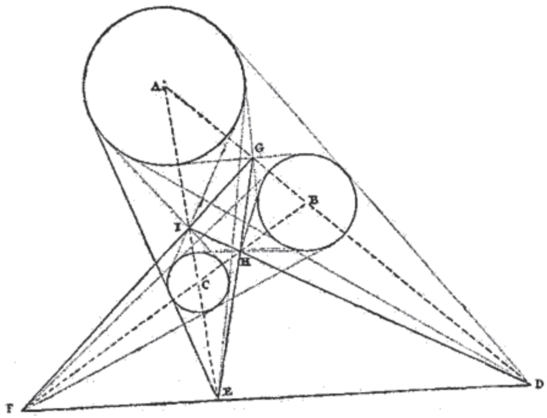
Dalla geometria piana alla geometria solida o viceversa?

L'utilità di considerazioni di geometria dello spazio nelle dimostrazioni di proposizioni di geometria piana, era stata riconosciuta nell'ambito della geometria proiettiva da Monge, Brianchon e Poncelet.
Così Michel Chasles[1] esordiva per illustrare le grandi potenzialità del 'metodo di Monge':

> Monge nous donna, dans son Traité de Géométrie descriptive, les premiers exemples de l'utilité de l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes [...] Les procédés par lesquels Monge transforma les figures de l'espace en figures planes, par des projections orthogonales sur deux planes rectangulaires qu'il suppose abattus l'un sur l'autre, offrent en particulier un moyen de découvrir une foule de propositions de Géométrie plane sur les figures que résultent de l'ensemble de ces deux projections.

Uno dei primi esempi dell'*alliance intime* di cui parla Chasles è fornito dal teorema di Monge sui centri di omotetia di tre cerchi:[2]

Tre cerchi qualunque del piano considerati a due a due hanno le tangenti comuni esterne che si incontrano in tre punti allineati.



Questa proposizione è dimostrata da Monge con grande semplicità immaginando i cerchi dati come sezioni centrali di tre sfere e quindi considerando i tre

[1] M. CHASLES (1837), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, Bruxelles, Hayez. pp. 191-194.

[2] G. MONGE (1798-99), *Géométrie descriptive, leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République*, Paris, Baudouin, an VII. pp. 54-55, fig. 22.

coni inviluppati dai piani che ne toccano esternamente due qualunque. Si consideri il piano tangente esternamente a tutte e tre le sfere: questo piano sarà tangente esternamente anche ai tre coni circoscritti alle sfere considerate a due a due, e passerà per i loro vertici *D*, *E*, *F*. Ma questi tre vertici sono pure nel piano dei tre centri, dunque si trovano all'intersezione di due piani distinti, e per conseguenza sono in linea retta.

La direzione indicata da Monge fu poi seguita da altri matematici, in particolare da Brianchon e Poncelet che erano stati suoi allievi all'Ecole polytechnique.

Il fusionismo in Francia, Germania e Danimarca

Risultati come questi avevano suggerito l'opportunità di applicare un metodo simile anche nella trattazione della geometria elementare, ma vi si opponeva la tradizionale concezione di planimetria e stereometria come discipline separate, per cui le proprietà dello spazio venivano esposte solo dopo aver esaurito quelle delle figure piane.
Così affermava Joseph-Diez Gergonne sulle «Annales de Mathématiques Pures et Appliquées»:[3]

> Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en géométrie plane et géométrie de l'espace est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader.

In Francia e in Germania comparvero contemporaneamente due monografie di geometria elementare basate sul metodo della fusione: nel 1844 venivano pubblicate di Gabriel Alcippe Mahistre le *Analogies de la Géométrie élémentaire*,[4] in cui nella prima parte erano trattate la geometria piana e le sue analogie con quella dello spazio, mentre nella seconda la geometria dello spazio era presentata in modo indipendente.

Lo stesso anno veniva pubblicato il trattato di geometria elementare per i ginnasi e le scuole secondarie superiori di Anton Bretschneider: *Lehrgebäude der niederen Geometrie für den Unterricht ab Gymnasien und höheren Realschulen*,[5] in cui veniva cancellata ogni linea di demarcazione esistente tra la geometria piana e quella dello spazio. La geometria sintetica era divisa in tre parti: *Geometrie der Lage* (Geometria di posizione);

[3] J. D. Gergonne (1826), *Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*, «Annales des Mathématiques Pures et Appliquées», XVI n. 6, pp. 209-231.p. 209.

[4] *Les Analogies de la géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la géométrie plane, Ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de luimême, s'élever immédiatement, et presque sans efforts, à tous les cas semblables de la Géométrie dans l'espace*, Paris, Hachette.

[5] Jena, Fr. Frommann.

Geometrie der Gestalt (Geometria di forma); *Geometrie des Maßes* (Geometria della misura). Vi era sostenuta l'utilità della fusione, in quanto il trattenere a lungo un giovane sulla geometria piana ne riduceva le capacità intuitive e, in base all'esperienza, il metodo tradizionale non dava risultati migliori, tuttavia gli argomenti erano organizzati in modo da poter essere trattati anche secondo una linea separatista.

In seguito, nel 1858, Adolph Steen, seguendo le tracce di Bretschneider, pubblicò il trattato: *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Indledning til Geometrien*[6] (panoramica delle principali forme dello spazio come introduzione alla geometria), che venne adottato nelle scuole danesi, in cui già dal 1844 la separazione tra geometria piana e geometria solida era stata soppressa.

Successiva in ordine di tempo è l'opera di Charles Méray, i *Nouveaux éléments de géométrie*, pubblicata in Francia nel 1874, in cui la fusione della geometria piana con la solida è completa:[7]

> J'ai abandonné la distinction d'usage entre la Géométrie plane et la Géométrie dans l'espace. Outre qu'elle n'est pas dans la réalité des choses, puisque la nature ne nous offre que des figures dans l'espace, elle met un long intervalle entre la théorie de la ligne droite et celle du plan, dont chacune cependant est nécessaire à la parfaite intelligence de l'autre; elle nécessite même une interruption dans l'étude de la ligne droite. Enfin, elle est encore plus nuisible dans l'enseignement professionnel, car la pratique des Arts réclame bien plus la connaissance approfondie des principales combinaisons de droites et de plans, que celle de propositions théoriques comme les propriétés des sécantes du cercle. Ces inconvénients m'ont paru surpasser de beaucoup les avantages que cette méthode peut avoir comme artifice didactique; si elle divise et aplanit un peu les premières difficultés de la Géométrie, on ne peut nier qu'elle soit pour beaucoup dans la lenteur que mettent les élèves à acquérir la faculté de *lire dans l'espace*.

Il titolo dell'opera è lo stesso di un celebre trattato di Antoine Arnauld di due secoli prima (1667, 1683), in cui il tradizionale impianto euclideo della geometria piana era stato radicalmente modificato.

Méray abbandona l'usuale divisione in libri adottandone una nuova in ventisette capitoli e raggruppando diversamente gli argomenti: tratta innanzi tutto generalità relative a rette e piani, poi il parallelismo, l'intersezione di rette e piani, la perpendicolarità. Segue il confronto fra segmenti rettilinei, e poi tra angoli piani e fra diedri. Solo successivamente tratta le proprietà dei triangoli, le distanze di punti rette e piani, e così via.

L'opera di Méray, che non ebbe inizialmente grande successo, venne poi ripresa in considerazione un quarto di secolo dopo. Il libro di Méray fu infatti adottato in

---

[6] Kopenhagen, C. A. Reitzels (2a ed. 1868).

[7] C. Méray (1874), *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, F. Savy (2a ed. Dijon 1903), p. xi.

diverse scuole francesi: una sperimentazione fu portata avanti da Chanchenotte, docente della Scuola Primaria Superiore di Digione nei tre anni consecutivi dal 1876 al 1878. La sperimentazione tuttavia non proseguì, interrotta dalle autorità scolastiche.

Il fusionismo ebbe poi in Francia un ritorno di interesse intorno al nuovo secolo, in seguito alle ricerche portate avanti in Italia e principalmente alla diffusione del volume di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani. Il libro di Méray venne adottato da Billiet, insegnante alla Scuola Normale degli Istitutori di Auxerre, nei due anni scolastici consecutivi dal 1898 al 1900, con risultati estremamente soddisfacenti.

Nel 1898 Charles-Ange Laisant trattò la questione della fusione in Francia nel libro: *Mathématiques, Philosophie, Enseignement* [8] e nel 1899, sulla rivista «Enseignement Mathématique» da lui diretta, apparve una recensione (di Léon Ripert) del volume di Lazzeri e Bassani e un articolo di Giacomo Candido sulla storia del metodo della fusione della geometria elementare in Italia.[9] Altri interventi a favore della fusione furono quelli di Laisant e di Chailan nel 1901.[10] Venne allora rivalutato il libro di Méray, e quindi ristampato nel 1903: l'anno successivo era insegnato in una trentina di scuole francesi.[11]

Testi di geometria in Italia

Nella prima metà dell'Ottocento il panorama italiano dei testi di geometria elementare era stato dominato dalle traduzioni del trattato di Adrien-Marie Legendre, gli *Élémens de géométrie*, in cui il ricorso all'algebra aveva permesso di eliminare alcune delle teorie più astratte contenute negli *Elementi* di Euclide come la teoria delle proporzioni, talvolta anche a scapito del rigore.

Nel periodo immediatamente precedente e subito dopo l'Unità comparvero traduzioni in italiano di testi di geometria più moderni: di A. Amiot, a cura di Giovanni Novi, e di Richard Baltzer, a cura di Luigi Cremona, in cui la geometria era insegnata senza alcuna contaminazione di tipo algebrico e in cui trovavano posto anche risultati e concetti nuovi tratti dalla geometria proiettiva.

Nelle zone di influenza austriaca buon successo ebbero le traduzioni del testo di Franz Mocnik, di impostazione tradizionale, con l'aggiunta della trigonometria e della geometria analitica piana.

La forza della tradizione ebbe tuttavia il sopravvento nei programmi ministeriali

[8] C.-A. LAISANT (1898), *Mathématiques, Philosophie, Enseignement*, Paris, Carré et Naud.

[9] «Enseignement Mathématique», I, pp. 62-65 ; pp. 204-215.

[10] C.-A. LAISANT (1901), *Une exhumation géométrique*, «Enseignement Mathématique», III n. 2, pp. 98-105. E. CHAILAN (1901), *Un progrès mathématique à réaliser*, «L'enseignement Chrétien», 1 marzo. Si veda anche: *La fusione della planimetria e della stereometria in Francia* (1901), «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. V n. 1, pp. 42-48.

[11] C. MÉRAY (1904), *Justification des procédés et de l'ordonnance des Nouveaux éléments de géométrie*, «Enseignement Mathématique», VI N.2, PP. 89-123.].

del 1867 redatti da Betti e Brioschi, che rendevamo obbligatorio il testo degli *Elementi* di Euclide per l'insegnamento della geometria nei ginnasi e nei licei. Betti e Brioschi firmarono anche l'edizione degli *Elementi* che uscì l'anno seguente, basata sulla traduzione seicentesca di Vincenzo Viviani con le note di Luigi Cremona, con un'appendice contenente i risultati archimedei su cilindro, cono e sfera.

Nella scuola di stato edificata dopo l'Unità nazionale sulla base della Legge Casati, il ruolo della matematica era importante, e alla geometria euclidea impostata secondo il modello ipotetico-deduttivo si attribuiva una funzione formativa centrale, sia nelle scuole classiche, che negli istituti tecnici.

Al tentativo di riproporre direttamente il testo euclideo nelle scuole secondarie superiori fecero seguito nuove esposizioni della geometria elementare, sempre di indirizzo purista, curate da alcuni dei maggiori matematici della fine dell'Ottocento. Questi testi, più che da finalità didattiche, erano guidati dalla preoccupazione di mantenere il massimo rigore, poiché gli studi sui fondamenti della geometria avevano messo in rilievo l'incompletezza del sistema di assiomi euclideo.

Il primo di questi trattati fu quello di Achille Sannia ed Enrico d'Ovidio, fedele ai modelli classici, con una netta separazione fra planimetria e stereometria, e tra il metodo puramente geometrico e le applicazioni dell'algebra alla geometria, ma con le estensioni di un moderno trattato di geometria elementare. Ebbe moltissime edizioni.

Un altro testo di larga diffusione, con varie edizioni e versioni, per diversi tipi di scuole, fu scritto da Aureliano Faifofer.

Diamo qui di seguito un elenco di questi testi scolastici:

A. Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire*, 1ª ed. Paris, Dezobry, 1850

G. Novi, *Trattato di geometria elementare di A. Amiot. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte*, Firenze, Le Monnier, 1858

R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik*, 1ª ed. Leipzig, Hirzel, 1853

L. Cremona, *Elementi di matematica*, Genova, Tip. R. I. Sordo-Muti, 1865 (in sei volumi corrispondenti alle sei parti del trattato di Baltzer, esteso a tutte le matematiche elementari, con molte note storico-critiche).

F. Mocnik, *Corso di geometria ad uso dei ginnasi superiori*, traduzione fatta sulla seconda edizione, Vienna, s,n.t., 1857

E. Betti, F. Brioschi, *Elementi d'Euclide*, 1ª ed., Firenze, Le Monnier, 1868

A. Sannia, E. d'Ovidio, *Elementi di Geometria*, 1ª ed. Napoli, Tip. Belle Arti, 1869 (2ª ed. Napoli, Trani, 1871)

A. Faifofer, *Elementi di geometria*, 1ª ed. Venezia, Tip. Emiliana, 1878; *Elementi di geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici*, Venezia, Tip. Emiliana, 1883

Il fusionismo in Italia

L'origine in Italia del fenomeno del fusionismo è più tarda rispetto agli altri paesi europei, e risale alla pubblicazione nel 1884 del trattato di Riccardo De Paolis: *Elementi di geometria* (Loescher, Torino). Più che di un testo scolastico, è un trattato sul fusionismo e i fondamenti della geometria. Dopo aver studiato all'Università di Roma con Luigi Cremona, Eugenio Beltrami e Giuseppe Battaglini, Riccardo De Paolis era docente di geometria superiore all'Università di Pisa e svolgeva la sua ricerca nel campo delle trasformazioni cremoniane e delle superfici algebriche.

L'opera presenta diversi elementi innovativi. De Paolis fondava la sua teoria su undici gruppi di assiomi e in particolare sui postulati di movimento sviluppava la teoria dell'uguaglianza dei triangoli e dei poligoni. Bisogna ricordare comunque che in quei postulati la nozione di movimento non è compiutamente analizzata, e solo successivamente si arrivò alla formulazione di postulati di uguaglianza o di movimento soddisfacenti (Peano, Veronese, De Franchis). Il trattato è diviso in sei libri: I. Verità fondamentali. II. Le figure fondamentali della geometria. III. Cerchio, cono, cilindro, sfera. IV. Teoria dell'eguaglianza. V. Teoria della proporzionalità. VI. Teoria della misura.

Un ruolo fondamentale nel libro di De Paolis gioca il teorema sui triangoli omotetici, che viene dimostrato facilmente con considerazioni stereometriche, senza l'uso della teoria delle proporzioni:

> Quando i vertici e i lati di due triangoli si corrispondono, in modo che le tre rette determinate dalle tre coppie di vertici corrispondenti passano per uno stesso punto, e che siano paralleli i lati corrispondenti di due coppie, anche quelli della terza coppia sono paralleli.

La teoria dell'equivalenza è poi svolta da De Paolis secondo le nuove vedute di Duhamel, Faifofer e De Zolt, cui segue l'applicazione all'equivalenza dei poligoni, dei prismi e dei poligoni sferici.

Il teorema sui triangoli omotetici consente anche la dimostrazione di un teorema base della teoria della similitudine dei triangoli, che corrisponde alla proposizione VI, 4 di Euclide:

> Dati due triangoli, se ciascun angolo di uno è uguale ad un angolo corrispondente dell'altro, il rettangolo di un lato di uno e di un lato non corrispondente dell'altro è equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti

Ossia, in termini di proporzioni: in due triangoli con gli angoli uguali i lati sono in proporzione. Tale teorema diventava dunque indipendente, insieme a tutti quelli che ne discendono, dalla teoria delle proporzioni.

De Paolis poi sviluppa la teoria della misura sulla base dei "limiti delle grandezze variabili", ispirandosi alle nuove teorie dei numeri irrazionali secondo le impostazioni di Lipschitz e Arzelà.

L'originalità dell'opera venne sottolineata da una recensione di Giovanni Frattini sul primo numero del *Periodico di Matematica* del 1886: «Di questo libro, come di tutte le migliori opere dell'ingegno, si parlerà da molti, per molto tempo e in varie guise».[12]

Il testo di De Paolis era diretto alle scuole medie superiori, ma pur nel rispetto del rigore e della completezza, era di difficile comprensione per gli studenti e troppo innovativo per alcuni insegnanti, e anche se venne adottato in qualche liceo, ebbe scarsa diffusione.

Di ispirazione fusionista uscirono poco dopo di Angelo Andriani, gli *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*, in cui però la scelta dei postulati fu giudicata insoddisfacente.[13]

Maggior fortuna ebbero invece gli *Elementi di geometria* di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani, pubblicati per la prima volta nel 1891 e poi nel 1898. Lazzeri era stato allievo di De Paolis ed aveva appreso da quest'ultimo il metodo fusionista. Divenuto professore di matematica alla Regia Accademia Navale di Livorno nel 1886, seguì tale metodo nell'insegnamento della geometria, e successivamente scrisse, assieme a Bassani che era insegnante di matematica nella stessa scuola, un libro che meglio si adattava alle esigenze degli studenti, essendo il risultato di sperimentazioni dirette, e che fu utilizzato come libro di testo in molti licei.

La struttura del libro è la stessa di quello di De Paolis, con alcune varianti. I postulati sono divisi in dodici gruppi, in particolare è aggiunto un gruppo di postulati riguardanti il punto, la linea e la superficie. È diviso in cinque libri: I. Retta e piano. Segmenti, angoli e diedri. Prime nozioni sul circolo e sulla sfera. Rette parallele, rette e piani paralleli. II. Poligoni, angoloidi, poliedri. Distanze. III. Relazioni fra rette, piani e sfere. Relazioni di poligoni con un circolo e di poliedri con una sfera, Superfici e solidi di rotazione. IV. Teoria generale dell'equivalenza. Equivalenza di poligoni e superfici poliedriche; di poligoni sferici e di piramidi sferiche; dei prismi. Grandezze limite. Equivalenza dei poliedri: Equivalenza del circolo e dei corpi rotondi. V. Teoria delle proporzioni. Figure simili. Misure. Applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Originale è l'introduzione della teoria degli assi e dei piani radicali, e della teoria delle figure omotetiche, svincolate dalle teorie dell'equivalenza e delle proporzioni: questi argomenti nuovi nell'insegnamento della geometria piana erano influenzati dalla geometria delle trasformazioni di Klein, dalla geometria dei cerchi e delle rette di Gaultier, dalla geometria delle inversioni o affinità circolari di Möbius. La teoria delle figure simili discende poi da quella dell'omotetia, ed è pertanto resa indipendente da quella delle proporzioni.

---

[12] «Periodico di Matematica», I (1886), pp. 20-31.

[13] A. Andriani (1887), *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo* Napoli, Pellerano (2ª ed. 1894).

Il libro ebbe recensioni favorevoli di Rodolfo Bettazzi sul «Periodico di Matematica» (1891) e di Francesco Giudice sulla «Rivista di Matematica» (1891) anche per la scelta dei postulati, più precisi e completi che altrove, non essendo stato ancora stato esplicitato un sistema completo di assiomi per la geometria elementare.

Nella nuova edizione del 1898 purtroppo fu soppressa la teoria degli assi e piani radicali e dei centri di similitudine, che costituiva una delle più riuscite applicazioni del metodo fusionista ma che non rientrava nei programmi di insegnamento. Notiamo la estensione 'fusionista' dell'assioma di Archimede:

> Se su un segmento (o angolo, o diedro) si portano successivamente dei segmenti (o angoli, o diedri) uguali, di modo che ciascuno di essi sia adiacente al precedente e che il primo abbia un estremo (o un lato, o una faccia) in comune con quello assegnato, si arriverà a trovare un punto (o un lato o una faccia) che cade fuori del segmento (o angolo, o diedro) assegnato.

Una recensione di Léon Ripert («Enseignement Mathématique», I, 1899) riportò anche in Francia l'attenzione sulla fusione *intime et systématique* di geometria piana e geometria dello spazio.

Fusionisti e separatisti

I testi di De Paolis e di Lazzeri e Bassani influenzarono anche altri testi destinati alle scuole secondarie superiori: i *Complementi di geometria* di Giuseppe Zaccaria Reggio del 1898[14] e gli *Elementi di geometria* di Giuseppe Ingrami del 1899.[15] Oltre a questi testi ne furono pubblicati molti di indirizzo separatista: celebre fra tutti gli *Elementi di geometria* di Federigo Enriques e Ugo Amaldi del 1903,[16] di chiara impostazione hilbertiana, che ebbe moltissime edizioni fino agli anni Settanta. Inoltre furono elaborati testi scolastici che rappresentavano una via intermedia tra il metodo fusionista e quello separatista, consentendo di alternare gli argomenti, come gli *Elementi di geometria* di Achille Sannia e Enrico D'Ovidio del 1888,[17] gli *Elementi di geometria* di Giuseppe Veronese del 1897[18] e la *Geometria elementare* di Michele De Franchis del 1909.[19] Fin dal 1873, così scriveva Luigi Cremona nella prefazione del suo libro di geometria proiettiva per gli istituti tecnici:[20]

---

[14] G. Z. Reggio (1891), Complementi di geometria, Zoppelli, Treviso (2a ed. 1898).

[15] G. Ingrami (1899), *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori*, Cenerelli, Bologna.

[16] F. Enriques, U. Amaldi (1903), *Elementi di geometria* ad uso delle scuole secondarie superiori, Bologna, Zanichelli.

[17] A. Sannia, E. D'Ovidio (1888), *Elementi di geometria,* Napoli, Pellerano.

[18] G. Veronese (1897), *Elementi di geometria*, Padova, Drucker.

[19] M. De Franchis (1909), *Geometria elementare ad uso dei licei, dei ginnasi superiori e delle scuole tecniche*, Palermo, Sandron (2° ed. 1911).

[20] L. Cremona (1873), *Elementi di geometria projettiva*, Torino, Paravia.

> Fin dal principio io alterno senza distinzione i teoremi della geometria piana con quella della solida, giacché l'esperienza m'ha insegnato, e altri (Bellavitis, Chasles) lo aveva già osservato, che le considerazioni stereometriche suggeriscono bene spesso il modo di rendere facile ed intuitivo ciò che in geometria piana sarebbe complicato e di malagevole dimostrazione; di più, esse acuiscono l'intelletto e aiutano lo svolgimento di quella immaginativa geometrica che è qualità essenziale dell'ingegnere, perché si possa pensare le figure nello spazio anche senza il sussidio di un disegno o di un modello.

Altri argomenti a favore dell'alternanza di geometria piana e solida troviamo nell'introduzione del libro di Giuseppe Veronese del 1897 (p. XV):

> Ciò che … riesce senza dubbio utile anche didatticamente è la trattazione simultanea delle teorie speciali, dopo aver premesse le proprietà generali della retta, del piano, dello spazio, cioè le teorie della congruenza e simmetria, della equivalenza, delle proporzioni delle figure simili e della misura; raccogliendo così in un solo capitolo le proprietà della retta, del piano e dello spazio che dipendono dagli stessi principi. In tal modo non solo si consegue nell'insegnamento un notevole risparmio di tempo, ma ciò che più importa, lo scolaro comprende meglio le relazioni che sussistono tra le figure piane e solide raccolte nello stesso capitolo e s'accorge di leggervi che molte dimostrazioni date per le seconde sono una facile estensione di quelle date per le prime. Con ciò è possibile ovviare all'inconveniente da molti lamentato, e cioè, al contrario di quanto avviene nell'Istituto Tecnico, nel Liceo non si svolgono che alla fine della classe I o in principio della II le proprietà delle figure solide utili ad alcune parti della Fisica e della Cristallografia.

Abbiamo testimonianza di alcune sperimentazioni del metodo fusionista: nel 1886-87 Francesco Giudice, al Regio Liceo di Palermo, adottò il testo di De Paolis; nel 1892-93 e nel 1898-99, Vittorio Murer, in una prima classe del Liceo, seguì il testo di Lazzeri e Bassani; nel 1896-98, Gaetano Scorza, in prima e seconda classe del biennio, nell'Istituto Tecnico di Reggio Emilia, utilizzò il testo di Faifofer, con un approccio di tipo misto.

La teoria degli assi radicali

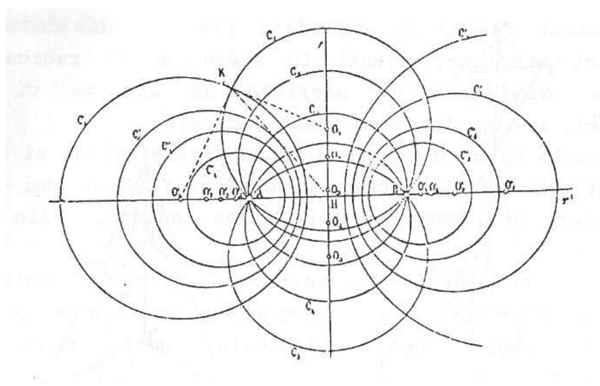
Vediamo ora alcuni esempi in cui la trattazione fusionista risultò particolarmente efficace: tra questi la teoria degli assi radicali.

Le proprietà elementari del cerchio e della sfera sono contenute negli *Elementi* di Euclide e nelle opere di Archimede, ma la cosiddetta *geometria dei cerchi e delle sfere* che studia insiemi infiniti di tali enti, ed in particolare i sistemi lineari (fasci) ebbe origine soltanto nei primi decenni dell'Ottocento, in connessione coi nuovi metodi sintetici ed analitici che portarono al rinnovamento della geometria, avvalendosi dei contributi di Monge, Gaultier, Gergonne, Poncelet, Steiner, Dupin, Chasles. La fondazione della relativa teoria delle inversioni circolari si deve a Möbius, Plücker, Thomson, Liouville, Reye.

Un riflesso di questi risultati si ritrova nei trattati di geometria di Lazzeri e Bassani. L'impostazione fusionista consente agli autori di sviluppare con semplicità la teoria degli assi e dei piani radicali svincolandola dalla teoria dell'equivalenza e dalla teoria delle proporzioni.

Consideriamo ad esempio i seguenti teoremi sui cerchi:[21]

> Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due circoli, non concentrici, siano uguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due circoli, esterna ai circoli dati. [...]
> Dati due circoli in un piano non concentrici:
> 1) Esistono infiniti circoli che, presi a due a due, hanno per asse radicale la retta dei centri dei due circoli dati; il luogo dei loro centri è l'asse radicale dei due circoli dati.
> 2) Esistono infiniti circoli che, presi a due a due, hanno per asse radicale quello dei due circoli dati; il luogo dei loro centri è la retta dei centri dei cerchi dati.

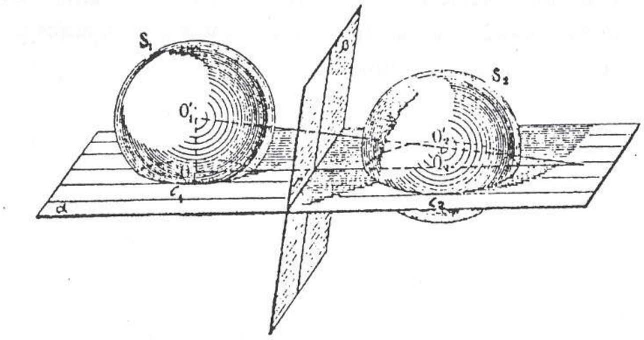


Questi sono fatti seguire, o messi in parallelo, coi rispettivi teoremi sulle sfere:

> Il luogo dei punti tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere uguali siano uguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo. [...]
> Date due superfici sferiche non concentriche:
> 1) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a tre a tre, hanno per asse radicale la retta dei centri delle due sfere date; il luogo dei loro centri fa parte del piano radicale delle due superfici sferiche date.
> 2) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a due a due, hanno per piano

[21] LAZZERI - BASSANI, 1891, pp. 187-196. Una prima osservazione sulla dimostrazione di questo teorema per via stereometrica si deve ancora a De Paolis, si veda: G. FRATTINI (1896), *Una bella osservazione del De Paolis*, «Periodico di Matematica», XI n. 3, p. 105.

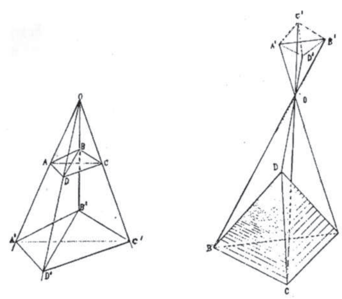
radicale quello delle due superfici sferiche date; il luogo dei loro centri fa parte della retta dei centri delle due sfere date.



La teoria delle figure omotetiche

Un'altra teoria che arricchisce la geometria elementare di nuovi risultati riguarda le figure omotetiche. La fusione di geometria piana e solida consente anche in questo caso di svincolare la trattazione di questa teoria da ogni considerazione di proporzioni fra grandezze. Nel trattato di Lazzeri e Bassani, si parte dal teorema fondamentale[22]:

> Se due triangoli si corrispondono, in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli.

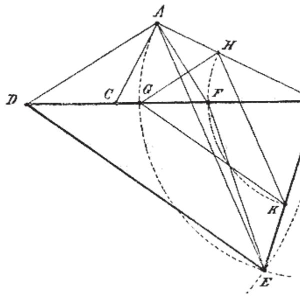


Segue quindi la definizione di figure omotetiche, direttamente o inversamente e le proprietà delle figure omotetiche, della relazione di omotetia e delle possibili omotetie di due figure. Dalla teoria delle figure omotetiche si costruisce una teoria della similitudine, indipendente dalla teoria delle proporzioni (che nel trattato di

[22] LAZZERI - BASSANI, 1891, p. 197. DE PAOLIS p. 91.

Lazzeri e Bassani è fondata sulle proporzioni tra numeri).

Questo teorema è pure alla base della teoria dei poligoni regolari. La costruzione infatti dei poligoni regolari di 5, 10, 20,… lati, e quindi anche di 15, 30, 60, … lati, si basa, come in Euclide (IV, 10-12), sulla costruzione di un triangolo isoscele in cui gli angoli uguali sono doppi del terzo angolo. Mentre però Euclide utilizza la sezione aurea, De Paolis fornisce un'elegante costruzione[23] basandosi sul precedente teorema dei triangoli omotetici, svincolata dalla teoria delle proporzioni ed anche dalla teoria dell'equivalenza (come ad esempio nel libro di Sannia e D'Ovidio).



Dato il segmento *AB*, si costruisce il triangolo rettangolo *ABC*, con il cateto *AB* doppio del cateto *AC*. Si prende poi sul prolungamento di *BC* un segmento *DC* = *CA* e si costruisce il triangolo isoscele *DBE* in cui *DE* = *DB* e *BE* = *BA*. Il triangolo *DBE* è il triangolo cercato. Infatti, detto *F* il punto medio dell'ipotenusa *BC*, essendo isosceli i triangoli *ACF*, *ACD*, risulta: *F.AC* = *A.CF*, *D.AC* = *A.CD*, quindi l'angolo *A.DF* = *F.AC* + *D.AC* risulta uguale alla metà della somma degli angoli del triangolo *ADF*, e quindi è retto.[24] Ne segue che gli angoli *A.FB* e *D.CA* sono uguali, in quanto complementari dello stesso angolo *CAF*. Inoltre, prendendo sopra *BD*, *BA* rispettivamente i punti *G*, *H* in modo che *BG* = *BA*, *BH* = *BF*, risultano uguali (congruenti) i triangoli *ABF*, *GBH*, dunque *G.HB* = *D.AB*, e le rette *AD*, *GH* sono parallele.

Preso quindi sopra *BE* il punto *K* in modo che sia *BK* = *BH*, i triangoli *ABE*, *HBK* sono isosceli ed hanno in comune l'angolo *B.AE*, dunque *A.BE* = *H.BK*, e le rette *AE*, *HK* sono parallele. Considerando i due triangoli *ADE*, *HGK*, dal teorema precedente risultano parallele anche le rette *DE*, *GK*, per cui *G.BK* = *D.BE*; ma i triangoli *BGK*, *BFE* sono uguali, dunque è anche: *E.BF* = *G.BH* = *D.BE*. Risulta poi, per il teorema dell'angolo esterno, *F.BE* = *E.BF* + *E.FD* = *E.BD* = *B.DE* poiché *BDE* è isoscele, dunque è isoscele anche *BEF*, per cui *BE* = *FE*. Poiché per costruzione è *BE* = *BA* = 2 *AC* = *DF*, si deduce che *DEF* è isoscele, e perciò *B.DE* = *F.BE* = 2 *D.BE* e dunque *BDE* è il triangolo cercato.

[23] De Paolis, capitolo III libro II, p. 92.

[24] Abbiamo mantenuto la notazione di De Paolis che mette in evidenza il vertice dell'angolo: *F.AC* indica l'angolo convesso di vertice *F* e lati *AF*, *FC*.

La costruzione precedente consente di determinare un angolo che è un quinto di quattro angoli retti, e quindi, assumendo tale angolo come angolo al centro di un cerchio si può costruire il pentagono regolare inscritto.

Il dibattito in seno alla Mathesis

L'associazione Mathesis era stata appena fondata in Italia (1895), quando fu coinvolta nel dibattito sul fusionismo. L'associazione raccoglieva gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie, con lo scopo del miglioramento della scuola e il perfezionamento degli insegnanti, attraverso la promozione della ricerca scientifica e didattica in relazione all'insegnamento della matematica.[25] Tra i soci fondatori vi erano Rodolfo Bettazzi, che fu il presidente del primo biennio 1896-98, Giovanni Frattini che ne fu il vice-presidente, Francesco Giudice (segretario-economo), Paolo Gazzaniga, Enrico De Amicis, Antonio De Zolt, Giuseppe Sforza, Giulio Lazzeri che furono membri del Comitato Direttivo lo stesso biennio, ed inoltre Antonio Maria Bustelli, Francesco Palatini, Gaetano Riboni, Angelo Andriani, Aurelio Lugli. L'associazione Mathesis, tramite il suo presidente ed il Comitato direttivo, operava proponendo varie questioni riguardanti l'insegnamento della matematica e il suo ordinamento, in particolare le materie ed i programmi relativi ai vari ordini di scuole secondarie. Queste venivano discusse dai soci in adunanze e congressi ed erano oggetto di interventi pubblicati sul *Bollettino della Associazione Mathesis* o sul *Periodico di Matematica*. In particolare molto spazio ebbe il dibattito sull'insegnamento della geometria nell'ambito di una radicale riforma dei programmi governativi proposta negli anni 1897-98, che prefigurava la costituzione di una scuola secondaria inferiore unica, attraverso la fusione delle scuole ginnasiali, delle scuole tecniche e delle complementari, che erano le scuole preparatorie alle scuole normali.

Tra le questioni che nei primi numeri del Bollettino venivano sottoposte ai soci, e più generalmente alla comunità degli insegnanti di matematica, ricordiamo le seguenti, due delle quali erano dedicate esplicitamente al metodo della fusione: [26]

> V. Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento;
> VII. Del miglior modo di trattare in iscuola la teoria dell'equivalenza;
> X. Dato che debba lasciarsi agli insegnanti libera scelta tra il metodo della fusione e quello della separazione della geometria piana e solida, formulare programmi secondo i quali tale scelta sia possibile.

[25] Sul primo periodo della Mathesis si può vedere: A. Procissi (1972), *Dalle origini della Mathesis al 1° congresso (1895-1898),* «Periodico di Matematiche», *s.*V, v.49, n. 1 -2, pp. 15-21; L. Giacardi, C. S. Roero (1996), *La nascita della Mathesis (1895-1907)*, in *Dal compasso al computer*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, pp. 7- 49.

[26] «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. I, 1896-97, n. 1, pp. 9-10; a. II, 1897-98, n. 1, p. 8.

Tra il 1897 e il 1798 dunque il tema della fusione fu uno dei più dibattuti nelle adunanze della Associazione Mathesis, di cui resta testimonianza nei resoconti pubblicati sul Bollettino dell'associazione.

Nel 1897 si tennero diverse adunanze parziali: a Torino (28 Febbraio), a Palermo (14, 17, 21 e 26 febbraio), a Firenze (5 maggio), i cui risultati vennero riassunti e coordinati nel Primo Congresso generale di Torino (9-14 settembre 1898). Rodolfo Bettazzi redasse a nome dell'Associazione un memoriale per il Ministro della Pubblica Istruzione (13 Maggio).[27] Pur con diverse posizioni, apparve comunque generalmente condivisa l'opinione che si dovesse lasciare la possibilità di sperimentare un insegnamento contemporaneo di planimetria e stereometria, e dunque come prima questione da affrontare in un dibattito più approfondito nell'anno 1898, il Comitato direttivo della Mathesis ripropose la possibilità di scelta tra fusione e separazione e la conseguente formulazione di programmi adeguati.

La questione fu quindi dibattuta nella adunanze parziali di Torino (21 e 22 febbraio), Sondrio (14 marzo), Milano (3 aprile), Bologna (3 aprile), Sassari (7 aprile), Recanati (28 e 29 giugno). Sul Periodico di Matematica del 1899 furono inseriti una presentazione di Francesco Giudice e quindi un rendiconto della discussione di Giulio Lazzeri.[28]

Nel congresso nazionale all'unanimità fu proclamata la necessità di modificare i programmi per consentire la libertà di scelta. Fu anche precisato ciò che si intendeva per fusionismo: non semplicemente la presentazione alternata, ma la trattazione simultanea di argomenti affini di geometria piana e solida. Fu proposta quindi la seguente distribuzione della materia, che permetteva la libera scelta fra i due metodi: nei licei al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza (ossia le proprietà *affini* e la teoria della congruenza), al secondo le teorie dell'equivalenza e della similitudine, al terzo la teoria della misura e la trigonometria piana; negli istituti tecnici al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza, al secondo le teorie dell'equivalenza, della similitudine e della misura, al terzo la trigonometria e le questioni complementari.

In realtà la proposta non fu votata e fu rimandata ad un esame globale della più generale proposta di riforma dei programmi portata avanti da Antonio Maria Bustelli.[29]

Molte delle proposte nate nell'ambito della Mathesis furono recepite dal decreto del ministro Gallo del 24 ottobre 1900, ed in particolare quella di pro-

[27] «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. I, 1896-97, n. 4, pp. 11-16.

[28] «Periodico di Matematica», XIV, pp. 34-36; pp. 117-124.

[29] A. M. BUSTELLI (1899), *Relazione sulla quarta questione proposta dal Comitato dell'Associazione Mathesis: Ripartizione dell'insegnamento della matematica elementare tra i vari gradi e le varie specie di scuole secondarie*, «Periodico di Matematica», XIV, pp. 58-99. Cfr. p. 77. «[…] le ragioni di opportunità didattica che consigliano la fusione, consistente soprattutto nello studio simultaneo degli argomenti affini di planimetria e stereometria con indirizzo al fecondo principio di dualità».

grammi di geometria che permettessero di scegliere tra il metodo fusionista e quello separatista.

Quattro anni dopo, una valutazione della sperimentazione del metodo fusionista fu avviata da Rodolfo Bettazzi i cui risultati furono pubblicati sul Bollettino e a proposito della quale Lazzeri intervenne nuovamente sul «Periodico di Matematica».[30] Il 2 gennaio 1904 venne inviata una circolare a tutti i professori di liceo del Regno con la domanda se la fusione della geometria piana colla solida fosse utile nell'insegnamento. Risposero 66 professori, di cui 28 si dichiaravano favorevoli, e 33 contrari.

I principali argomenti a sostegno della fusione erano: il risparmio di tempo che si realizzava trattando simultaneamente argomenti affini di geometria piana e solida, la semplificazione di alcune teorie di geometria piana se trattate con considerazioni stereometriche, il miglior coordinamento dello studio della matematica con quello delle altre discipline scientifiche come la fisica e la cristallografia, insegnate nei licei e istituti tecnici.

Nelle risposte ai questionari, come pure nei resoconti delle adunanze, si discussero soprattutto la prima e la terza di queste argomentazioni, più legate all'organizzazione della didattica, mentre il dibattito sui fondamenti si sviluppò principalmente sulle riviste.

Tra i principali sostenitori del fusionismo ricordiamo, oltre a Rodolfo Bettazzi, Enrico de Amicis,[31] Francesco Giudice[32], Giovanni Frattini, Giacomo Candido, Gino Loria.[33]

Le obiezioni alla fusione riguardarono essenzialmente gli inconvenienti didattici derivanti dalla difficoltà dei giovani studenti nel concepire una intuizione spaziale, anche per la mancanza di modelli adeguati (così si pronunciava ad esempio Giuseppe Sforza), la mancata gradualità nel passare da argomenti più semplici a più complessi, il ritardo nella esposizione di teorie, come quella della misura, necessaria per le applicazioni dell'algebra alla geometria. Tra i critici citiamo anche Virginio Retali («con la fusione non si fa che della confusione»), Vittorio Murer che era riuscito a far approvare dal Ministero un programma ad hoc ed aveva sperimentato,

---

[30] *Inchiesta sulla utilità della fusione della geometria piana colla solida nell'insegnamento secondario (1903-04)*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. IX n. 4, pp. 46-52. G. LAZZERI (1903-04), *A proposito dell'inchiesta fatta dall'associazione Mathesis sulla fusione della geometria piana colla solida*, «Periodico di Matematica», IX, pp. 233-240.

[31] Celebre l'intervento di De Amicis*, Pro fusione*, pubblicato sia sul «Bollettino» (II n. 4, pp. 73-96) che sul «Periodico di Matematica» (XIII, pp. 49-72).

[32] F. GIUDICE (1891), *G. Lazzeri, A. Bassani, Elementi di geometria* (recensione), «Rivista di Matematica», I NN. 8-9, PP. 160-162. Giudice, autore di un testo in cui la fusione non viene attuata (*Geometria piana*, Palermo, 1980), si dichiara tuttavia a favore, sia per «far rilevare subito un gran numero di proposizioni correlative per indirizzare di buon'ora al fecondo importantissimo principio di dualità", sia per poter "sviluppare meglio alcune teorie» come la similitudine.

[33] G. LORIA, *La fusione della planimetria con la stereometria, una pagina di storia contemporanea*, «Periodico di Matematica», XIV, 1899-1900, pp. 1-7.

con esito deludente, il testo di Lazzeri e Bassani in prima liceo nel 1892-93, Francesco Palatini[34] che polemizzò direttamente con De Amicis, Francesco Angeleri che presentò una comunicazione al Congresso Mathesis di Napoli (14-17 settembre 1903), Federigo Enriques che si pronunciò sfavorevolmente in un'adunanza Mathesis del 1903.

A queste obiezioni i sostenitori del fusionismo opponevano argomenti ugualmente opinabili, come l'immediatezza e la naturalezza della visione spaziale, la riduzione della fatica dello studio per l'eliminazione di ripetizioni di teoremi analoghi per il piano e lo spazio, la breve sperimentazione del metodo fusionista a fronte dei duemila anni di studi ed esperienze in ambito separatista, e così via.

La questione dei fondamenti e il ruolo del teorema di Desargues

A prescindere da considerazioni di tipo didattico, l'ambizione che realmente sottendeva la scelta fusionista era quella di rendere più semplice e rigorosa l'esposizione della geometria elementare, rendendo esplicita la dipendenza dagli assiomi delle diverse teorie che alla geometria appartengono, e di attualizzare l'insegnamento secondario introducendo nuovi concetti e risultati della ricerca geometrica recente.

Per meglio comprendere questo punto esaminiamo in particolare alcune argomentazioni di De Amicis, il quale affermava[35]:

> È certamente ottimo principio (possibilmente seguito non solo dai fusionisti in geometria, ma da chiunque si occupi di scienze di natura specialmente deduttiva), che ogni proposizione sia dimostrata senza ricorrere a teorie dalle quali essa non dipende necessariamente; consideriamo anche come progresso logico e scientifico non indifferente lo svincolare la dimostrazione sia pure di un solo teorema da teorie alle quali esso non appartiene.

Questa impostazione rispondeva ad un'esigenza di rigore generale nella ricerca sui fondamenti, che trovava appoggio anche in alcuni indirizzi pedagogici, secondo i quali una dimostrazione, che attinga a concetti estranei, anche se elegante, è didatticamente un male. Così anche Aurelio Lugli, a proposito delle condizioni cui deve soddisfare un libro di aritmetica richiedeva che: «ciascuna teoria per essere stabilita senza eccezione non dovrebbe valersi di enti estranei alla propria natura».[36]

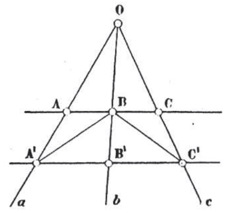
De Amicis metteva a confronto le diverse dimostrazioni della seguente proposizione:

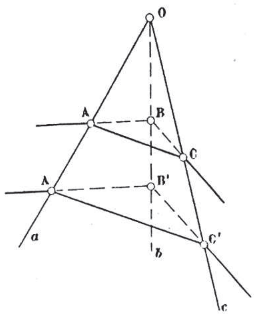
[34] F. Palatini (1897-98), *Osservazioni sulla nota "Pro fusione" del Prof. De Amicis*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», a. II n. 5, pp. 120-124. F. Palatini (1900), *Una conversazione coi fusionisti*, «Periodico di Matematica», an. XV, pp. 205-208.

[35] De Amicis, *Pro fusione* p. 90.

[36] «Periodico di Matematica», VIII, 1893, p. 199.

Se *a*, *b*, *c* sono tre semirette complanari uscenti da uno stesso punto *O* ed incontranti rispettivamente due rette parallele nei punti *A* e *A'*, *B* e *B'*, *C* e *C'* in modo che *AB* = *BC*, dimostrare che *A'B'* = *B'C'*





Questa proposizione, che utilizza concetti di teoria del parallelismo e teoria della congruenza, si può dimostrare sia ricorrendo alla teoria delle proporzioni, che a quella dell'equivalenza, che a considerazioni stereometriche.

Basandosi sulla teoria delle proporzioni si ha infatti subito:

$A'B' : AB = OB' : OB = B'C' : BC$ da cui $A'B' : AB = B'C' : BC$ e, da $AB = BC$, segue $BC = B'C'$.

Ma si può prescindere dalla teoria delle proporzioni, facendo ricorso a quella dell'equivalenza: dalla equivalenza dei triangoli *OAB* e *OBC* (che hanno le basi *AB AC* uguali e uguale altezza) e dalla equivalenza dei triangoli *A'AB* e *C'CB* si può dedurre l'equivalenza dei triangoli *OBA'* e *OBC'*. Avendo questi la medesima base *OB*, sono uguali le rispettive altezze, che sono anche altezze dei triangoli *BB'A'* e *BB'C'*, i quali sono pure equivalenti avendo la medesima base *BB'*. Ma essi possono anche considerarsi aventi le basi *A'B'* e *B'C'* e corrispondentemente la medesima altezza, per cui queste basi devono essere uguali ossia A'B' = B'C'.

Oppure, infine, facendo ruotare il semipiano *OBC* attorno alla retta *OB* di un angolo minore di 180°, e congiungendo A con C e A' con C', essendo *BA* parallela a *B'A'* e *BC* parallela a *B'C'*, il piano *ABC* è parallelo al piano *A'B'C'* e perciò sono parallele le loro intersezioni *AC* e *A'C'* col piano delle semirette *a* e *c*. Pertanto *BAC* = *B'A'C'* e *ACB* = *A'C'B'* ma *AB* = *BC* e perciò *BAC* = *ACB*, da cui *B'A'B'* = *A'B'C'* e infine quindi *A'B'* = *B'C'*. In questo ultimo caso non intervengono nella dimostrazione se non considerazioni relative al parallelismo e alla congruenza.

L'esempio precedente è emblematico del fatto che tutte le questioni e teorie, in cui il metodo fusionista era più diretto, permettendo di dimostrare teoremi e proprietà proiettive senza fare uso delle proprietà metriche o collegate alla congruenza, potessero ricondursi al *teorema di Desargues sui triangoli omologici*:

> Se in due triangoli *ABC* e *A'B'C'*, i vertici omologhi concorrono in un punto O (proprio o all'infinito) le rette dei lati omologhi si incontrano in punti allineati, e viceversa.

Una prima spiegazione si può rintracciare nella celebre memoria del 1894 *Sui fondamenti della geometria*[37], dove Giuseppe Peano costruisce la geometria di posizione (come allora si chiamava quella parte della geometria elementare che riguarda esclusivamente le relazioni di associazione e ordinamento) sui concetti primitivi di punto e segmento e dimostra in particolare che il teorema dei triangoli omologici nel piano è conseguenza del postulato spaziale: «Dato un piano, si può segnare un punto fuori di esso», ed inoltre che questo è necessario per dimostrare il teorema di Desargues.

Un chiarimento ulteriore della questione si trova nei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert (1899).

Dopo aver posto gli assiomi della geometria elementare su tre concetti primitivi (punto, retta, piano) e secondo cinque gruppi, I di appartenenza, II ordine, III congruenza, IV delle parallele, V continuità, Hilbert dimostrava che: [38]

> C'è una geometria piana nella quale sono soddisfatti tutti gli assiomi lineari e piani, ad eccezione dell'assioma III.5 [quinto assioma di congruenza], mentre non vale il teorema di Desargues.
> *In una geometria piana in cui siano soddisfatti gli assiomi dei gruppi I, II e IV** [ossia l'assioma delle parallele nella forma forte: per un punto esterno esiste una ed una sola parallela ad una retta data]*, la validità del teorema di Desargues è condizione necessaria e sufficiente affinché questa geometria possa venire considerata come una parte di una geometria dello spazio in cui siano soddisfatti tutti gli assiomi I, II, IV**.

In altri termini: il teorema di Desargues nel piano, pur coinvolgendo proprietà solo affini, non legate alla congruenza, non può essere dedotto senza gli assiomi citati, ossia per la sua dimostrazione occorrono necessariamente o gli assiomi dello spazio o l'assioma della congruenza dei triangoli. Il teorema di Desargues si caratterizza per la geometria piana come il risultato della eliminazione degli assiomi dello spazio.

Conclusioni

Le successive vicende della questione fusionista si stemperano dopo il 1904 nelle più gravi e generali questioni che agitarono la comunità degli insegnanti di matematica. Una nuova riforma dei programmi dell'istruzione classica avvenuta col De-

---

[37] PEANO, 1894, cfr. p. 73 e PEANO, 1959 cfr. p. 139.
[38] HILBERT, cap. V, pp. 85-104.

creto Orlando (11 novembre 1904), consentiva agli studenti che avessero ottenuto la promozione nella seconda classe liceale di optare nei corsi successivi tra l'insegnamento del greco e quello della matematica. I programmi permettevano ancora di scegliere tra i due metodi di insegnamento della geometria. Le proteste e le reazioni furono vivaci nell'ambito della Mathesis.[39]

In previsione di una riforma generale dell'ordinamento degli studi secondari in Italia, nel 1906 la Commissione Reale, di cui facevano parte il fisico Pietro Blaserna e il matematico Giovanni Vailati, sottoponeva un *Questionario* a tutto il corpo insegnante, alle facoltà universitarie, alle associazioni e ai corpi scientifici e letterari. Per quanto riguarda la matematica, troviamo ancora al punto ottavo la richiesta di dare una opinione sulla opportunità della fusione della geometria piana con la solida. Gli insegnanti espressero opinione favorevole all'impiego della fusione per la trattazione della geometria razionale, insegnata nel secondo quadriennio, e comunque la convinzione generale che l'insegnante dovesse essere lasciato libero di seguire il metodo tradizionale o quello fusionista. Assieme alle risposte ai quesiti, il Comitato Direttivo dell'Associazione Mathesis tramite il suo presidente De Amicis presentò una sua proposta di riforma.[40]

Ancora negli anni 1910-11 Alessandro Padoa, allievo di Peano, presentava un progetto di riforma della scuola media, in cui l'insegnamento della matematica doveva svolgersi in tre corsi successivi, detti preparatorio, deduttivo e complementare, di cui i primi due, di tre anni ciascuno, comuni a tutti gli indirizzi di scuole.[41] Per l'insegnamento della geometria nel corso deduttivo, Padoa proponeva un metodo fusionista nell'ambito delle sue ricerche sui fondamenti della geometria e in particolare di una nuova teoria della congruenza basata su gruppi finiti di punti.[42]

La polemica sul fusionismo si esauriva dopo i primi decenni del nuovo secolo con il tacito ritorno alla separazione tra la geometria piana e quella solida.

Concludendo, possiamo dire che il dibattito sul fusionismo contribuì alla chiarificazione dei legami esistenti tra i postulati e le teorie facenti parte della geometria elementare. La questione del fusionismo inoltre costituisce una prova evidente degli stretti legami tra gli indirizzi della didattica della matematica e gli sviluppi della ricerca, sempre esistenti ma particolarmente evidenti nel periodo postunitario e nel primo Novecento, quando molti docenti universitari iniziavano la loro carriera come insegnanti di scuola secondaria.

---

[39] *Pro-Memoria sulla riforma Orlando per l'opzione tra il Greco e la Matematica nei Licei*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», 1909, n. 1, pp. 3-9. A. PADOA, *Relazione sul Decreto Orlando*, Ibidem, pp. 43-45.

[40] «Bollettino dell'Associazione Mathesis,» a. X, 1905-06, n. 3-4, p. 49; Ibidem, 1907-08, n. 1-2-3, pp. 1-20.

[41] A. PADOA (1912), *Osservazioni e proposte circa l'insegnamento della matematica nelle scuole elementari, medie e di magistero*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», pp. 215-234.

[42] A. PADOA (1910), *Alcune considerazioni di geometria elementare*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», II nn. 4-6, pp. 38-44; ID, *Un nuovo sistema di definizioni per la geometria euclidea*, «Periodico di Matematica», (3) I, an. XIX, pp. 74-80.

Quando la geometria descrittiva smise di interessare i geometri e le ricerche sui fondamenti della geometria elementare poterono considerarsi conclusi, finirono anche le discussioni sul fusionismo. Non si può escludere tuttavia, che i nuovi strumenti di geometria dinamica, consentendo di costruire facilmente modelli tridimensionali e quindi di superare la principale difficoltà didattica del fusionismo, e il ruolo della visualizzazione nella formazione di concetti figurali messo in luce dalle ricerche in didattica della matematica, portino nuovamente di attualità un approccio fusionista alla geometria elementare, all'inizio di questo nuovo millennio.

Bibliografia

G. BOLONDI (a cura di) (2002), *La Mathesis. La prima metà del Novecento nella "Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche"*, «PRISTEM/Storia» 5, Springer.

M. T. BORGATO (2006), *Il fusionismo e i fondamenti della geometria*, in: Giacardi L. (a cura di), *Da Casati a Gentile, momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, pp. 125-157, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.

E. DE AMICIS (1897-98), *Pro fusione: relazione alla questione V proposta nel N. 1 (anno I) del Bollettino dell'Associazione Mathesis "Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento"*, «Bollettino dell'Associazione Mathesis», II n. 4, pp. 73-96. [14 novembre 1897]; ID., (1898), *Pro fusione*, «Periodico di Matematica», XIII, pp. 49-72.

R. DE PAOLIS (1884), *Elementi di geometria*, Torino, Loescher.

L. GIACARDI (2005), *L'insegnamento della matematica in Italia dal 1895 al 1923. Il ruolo della Mathesis*, in: *Conoscere attraverso la matematica; linguaggio, applicazioni e connessioni interdisciplinari*, Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Roma, pp. 303-344.

D. HILBERT (1899), *Grundlagen der Geometrie*, traduzione italiana: *Fondamenti della geometria*, Milano, Feltrinelli, 1970.

C. G. LACAITA, M. FUGAZZA (a cura di) (2013), *L'istruzione secondaria nell'Italia unita*, FrancoAngeli Storia

G. LAZZERI, A. BASSANI (1891), *Elementi di geometria: libro di testo per la* R. *Accademia Navale*, Livorno, Giusti, (2ª ed 1898).

G. PEANO (1894), *Sui fondamenti della geometria*, «Rivista di Matematica», IV, pp. 51-90 = *Opere scelte*, vol. III, Roma, Cremonese, 1959, pp. 115-157.

L. PEPE (2016), *Insegnare matematica. Storia degli insegnamenti matematici in Italia*, Bologna Clueb.

E. ULIVI (1977), *Una moda didattica in matematica, il fusionismo*, «Archimede», 29, pp. 212-216.