La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche

Origami geometry and the resolution of algebraic equations

Maria Teresa Borgato - Rudy Salmi[1]

Abstract

This article presents the history of origami geometry, with particular focus on the paper folding methods that allow the resolution of algebraic equations. The origins are to be found in the work by Sundara Row, a little known Indian mathematician of the late nineteenth century, who was the first to publish a manual of elementary geometry using paper folding as the basic tool. This work became a subject of study for some western mathematicians, among whom Margherita Beloch, Professor of geometry at the University of Ferrara from 1927 to 1954. Beloch's original contributions, on the resolution of a cubic by folding, initiated a significant development in the latest research on mathematical origami, like the axiomatic arrangement proposed by Huzita and the theory of alignments by Alperin and Lang, which leads to the resolution of algebraic equations of any degree through a readaptation of the origami methods proposed by Beloch.

La presente ricerca trae origine dalla mostra *Donne e matematica in Italia* (Ferrara, 4 maggio - 15 giugno 2017) in cui alcuni pannelli, vari documenti d'archivio e pubblicazioni erano dedicati a Margherita Beloch (1879-1976) [5]. Una presentazione proiettata a ciclo continuo e distribuita su CD illustrava il suo metodo di piegatura della carta applicato alla risoluzione dell'equazione cubica.[2]

---

[1] Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Ferrara. *E-mail*: bor@unife.it; rudy.salmi@unife.it.

[2] Indipendentemente su questo tema è stato pubblicato un altro lavoro [9] e in maggio 2018 è apparso un volume dedicato interamente alla storia del *paper folding* applicato alla matematica [6].

Il libro di Sundara Row

Alle origini della geometria degli origami troviamo l'opera di Tandalam Sundara Row (1853-?), intitolata *Geometric Exercises in Paper Folding*, pubblicata a Madras, in India, nel 1893 [10].

Si sa molto poco su questo matematico indiano. Studiò nel College dipartimentale di Kumbakanam (South India), dove il padre T. Gopal Row era direttore, conseguendo la laurea nel 1874. Fu membro delle società matematiche indiana e londinese ed entrò al servizio del governo nella tesoreria dipartimentale, arrivando a ricoprire il ruolo di direttore generale amministrativo del distretto. Nel 1911 fu insignito del titolo onorifico di *Rao Bahadur*.[3]

Il suo manuale, che era destinato ad un insegnamento innovativo della geometria nelle scuole e nei college, si presentava come una raccolta di costruzioni della geometria piana euclidea in cui però l'uso della riga e del compasso era completamente soppiantato dall'uso di un foglio di carta su cui si poteva agire soltanto mediante una successione di piegature.

Questo volume, suddiviso in 14 capitoli, si presenta con un titolo piuttosto modesto, ma in realtà gli intenti sono ben più ambiziosi in quanto non solo c'è un ampio recupero di tutta la geometria euclidea, ma negli ultimi capitoli Sundara Row si spinge alla costruzione per punti di sezioni coniche, e anche di curve algebriche di ordini superiori e di curve trascendenti.

In analogia con la geometria della riga e del compasso, ogni costruzione origami può essere descritta come una successione di ripiegamenti basilari. Anche se non vengono elencate esplicitamente, Sundara Row utilizza cinque operazioni di piegatura che sono sufficienti per riprodurre ogni costruzione con riga e compasso (fig. 1).

Le prime quattro piegature equivalgono alla possibilità di tracciare una retta per due punti, l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo e la perpendicolare ad una retta per un punto dato. La quinta operazione, che consiste nella piega passante per A che porta un punto B su una retta r, equivale a ricercare le eventuali intersezioni della retta r con la circonferenza di centro A e raggio AB. Nonostante nella geometria origami non sia possibile tracciare con continuità delle circonferenze, esiste questa quinta operazione che funge da compasso.

[3] Le informazioni biografiche su Sundara Row provengono dal *The Indian Biographic Dictionary* (1915) e da *Who's who* in India (Supplement, 1914). Oltre alla sua opera più famosa Sundara Row è autore di un volume di geometria solida elementare: *Elementary Solid Geometry* (St. Joseph's College Press, Trichinopoly, India, 1906-07).

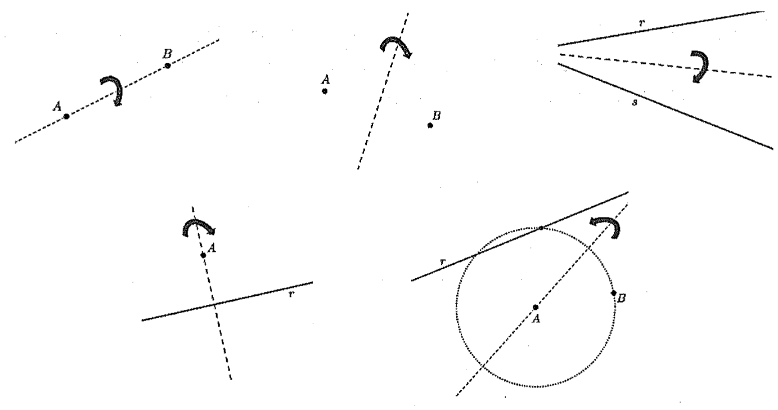


Fig. 1

Presentiamo a titolo di esempio due costruzioni di Sundara Row che sono rilevanti nel nostro contesto. La prima è una delle costruzioni per punti di una parabola. Supponiamo di aver segnato su un foglio di carta un punto F esterno ad una retta r (fig. 2). Vogliamo costruire per piegatura la parabola di fuoco F e direttrice r. Allora consideriamo un punto X a piacere sulla retta r e pieghiamo il foglio in modo da sovrapporre F su X. Dopodiché consideriamo la piega che passa per X e porta la retta r a sovrapporsi su se stessa. Il punto d'intersezione delle due pieghe è un punto della parabola. Ripetendo il procedimento per più posizioni di X, si costruisce per punti la parabola ricercata. In particolare è da osservare che ogni qualvolta si porta un punto su una retta, la piega creata è una tangente alla parabola che ha per fuoco e direttrice rispettivamente il punto e la retta considerati.

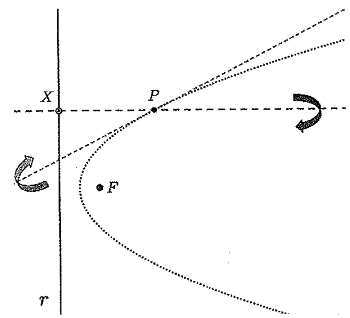


Fig. 2

Un altro problema proposto da Sundara Row è la costruzione per piegatura di una progressione geometrica di ragione r (fig.3). Partendo dai segmenti assegnati OP_1 e OP_2 di lunghezza 1 e r, si può costruire per piegatura una spezzata rettangolare che individua una successione di segmenti OP_1, OP_2, OP_3, ... le cui lunghezze formano una progressione geometrica di ragione r.

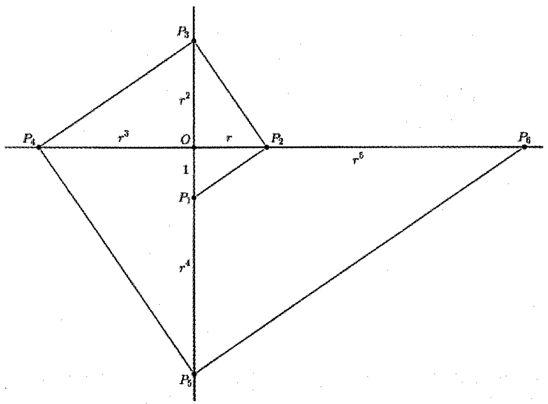
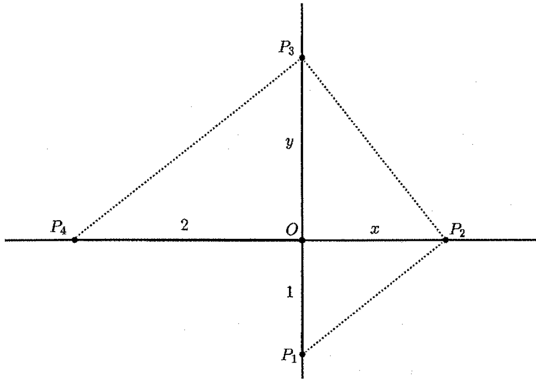


Fig. 3

Questa costruzione è strettamente collegata al problema classico della duplicazione del cubo, la cui risoluzione equivale alla ricerca di due medie proporzionali tra i segmenti OP_1 e OP_4 di lunghezze 1 e 2 (fig. 4). Quindi in base alle osservazioni precedenti, se si riuscisse a costruire la spezzata rettangolare che parte da P_1 e termina in P_4, allora il segmento OP_2 avrebbe proprio lunghezza $\sqrt[3]{2}$.



$$1 : x = x : y = y : 2$$

$$\Downarrow$$

$$OP_2 = x = \sqrt[3]{2}$$

Fig. 4

Tuttavia Sundara Row non riesce a costruire per piegatura questa spezzata e ciò lo porta a concludere che è impossibile duplicare il cubo mediante piegatura [10, Sezione 112], affermazione che sarà smentita dalle ricerche di Margherita Beloch.[4]

L'opera di Sundara Row conobbe poi una certa diffusione grazie soprattutto all'intervento autorevole di Felix Klein, che fu il primo ad attrarre l'attenzione dei matematici occidentali verso questa nuova geometria. Infatti Klein cita Sundara Row nelle sue celebri lezioni di geometria elementare (*Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Berlino, 1897) in merito alla possibilità di costruire per punti alcune curve algebriche in modo alternativo. Probabilmente Klein venne a conoscenza dell'opera di Sundara Row perché entrambi facevano parte della stessa società matematica londinese. Nei primi decenni del Novecento l'opera di Sundara Row ebbe varie ristampe[5] e vennero pubblicati alcuni articoli di carattere per lo più divulgativo che comunque non apportavano nulla di originale alla teoria.[6]

Fu invece Margherita Beloch a dare una svolta cruciale alla storia della geometria origami in una nota sugli Atti dell'Accademia delle Scienze di Ferrara del 1934, intitolata *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row*, in cui si ripropone di mostrare la superiorità dei metodi origami rispetto ai tradizionali metodi con riga e compasso [3].

Margherita Beloch e i metodi di ripiegamento della carta

Margherita Beloch nacque il 12 luglio 1879 a Frascati, in una famiglia multiculturale. Il padre, lo storico tedesco Karl Julius Beloch, sebbene fosse in Italia dal 1870, acquisì la cittadinanza solo negli ultimi anni della sua vita dopo aver insegnato storia antica nell'Università di Roma dal 1879 al 1929. La madre, l'americana Bella Bailey, originaria di Washington, apparteneva ad una famiglia di amici di Abramo Lincoln, secondo quanto scrive lo stesso Karl Julius nella sua autobiografia. Dal matrimonio, celebrato nel 1879, nacquero due figlie che hanno saputo ricoprire un ruolo autonomo nella cultura italiana:

---

[4] Per determinare le due medie proporzionali, Sundara Row suggerisce di utilizzare due pezzi di carta, operazione che esula dai metodi di ripiegamento della carta. Tuttavia questo metodo può aver suggerito a Margherita Beloch la nuova piegatura che Sundara Row non aveva trovato.

[5] L'opera di Klein venne rieditata negli Stati Uniti nel 1901, per cura di due professori di matematica: Wooster Woodruff Beman dell'Università del Michigan, e Davis Eugene Smith del college per insegnanti della Columbia University, con piccole modifiche al testo originale e la riproduzione fotografica delle illustrazioni di Sundara Row. Nel 1917 la stessa casa editrice con sede a Chicago e Londra faceva uscire una terza edizione.

[6] A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paperfolding*, School Science and Mathematics, 7, 1907, pp. 595-597. C. A. Rupp, *On a transformation by paper folding*, Amer. Math. Monthly, 31, 1924, pp. 432-435.

Margherita nel campo delle matematiche e Dorotea, allieva di Pietro Mascagni, in quello della lirica.

Margherita si laureò a Roma nel 1908 con Guido Castelnuovo, discutendo una tesi *Sulle trasformazioni birazionali nello spazio*, pubblicata l'anno seguente negli *Annali di matematica pura ed applicata*. Dopo aver svolto qualche incarico nelle scuole secondarie di Roma, mosse i primi passi in ambito accademico proprio come assistente volontaria di Castelnuovo alla cattedra di geometria analitica e proiettiva; fu poi nominata assistente di geometria descrittiva nell'Università di Pavia nel 1919. L'anno dopo ricoprì il medesimo ruolo a Palermo sotto la guida di Michele De Franchis. Nel 1916 Margherita Beloch sposò Ruggero Piazzolla, un proprietario terriero. Per questo il suo cognome è spesso abbinato a quello del marito e anche i suoi risultati, nel campo della fotogrammetria o della geometria, si trovano citati come "metodo Piazzolla".

Conseguita la libera docenza nel 1924, vinse il concorso a cattedra di geometria bandito nel 1927 dall'ateneo di Ferrara, classificandosi prima davanti a Nicolò Spampinato ed Enea Bartolotti. Insegnò nell'Università estense fino al collocamento fuori ruolo nel 1949 e a riposo nel 1954. Dopo che le fu conferito il titolo di professore emerito nel 1955, continuò ancora a lungo la sua attività scientifica e culturale. Nel 1967 curò per la Società italiana di fotogrammetria e topografia un volume che raccoglieva una selezione di suoi saggi, mentre nell'ultimo periodo della sua vita, dopo essersi trasferita a Roma, si interessò dell'eredità intellettuale del padre riunendone ed ordinandone la vasta produzione. Fu membro del consiglio direttivo della Società italiana di fotogrammetria "Ignazio Porro"; socia dell'Unione Matematica Italiana e dell'Accademia delle Scienze di Ferrara. Si spense a Roma nel 1976.[7]

Oltre all'insegnamento di geometria analitica e descrittiva, Margherita tenne per incarico per molti anni i corsi di Geometria superiore, di Matematiche complementari e di Matematiche superiori. Per questi insegnamenti compose una serie di dispense, e per le matematiche complementari furono poi redatte da Egidio Orzalesi le: *Lezioni di Matematica Complementare (La Matematica Elementare vista dall'alto)*, che ebbe due edizioni in forma litografata (1953, 1973).

Le Matematiche superiori e le Matematiche complementari erano destinate principalmente alla formazione dei docenti. Da questi incarichi didattici, dal contatto con gli insegnanti e dalla letteratura sui fondamenti può essere derivato il suo interesse per la geometria origami, su cui scrisse due articoli che sono rilevanti nella storia di questa geometria:

[7] Necrologio in: *La raccolta Montesano di opuscoli nella biblioteca dell'Istituto Matematico dell'Università di Ferrara* (a cura di G. Gambini e L. Pepe), Ferrara, 1983, pp. 3-6.

- *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row*, in Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara, 2, Vol. XI, 1934, pp. 186-189;
- *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, in Periodico di Matematiche, 16, 1936, pp. 104-108.

Anche nel suo testo del 1953, Margherita introdusse la piegatura della carta come uno dei metodi alternativi per la risoluzione di problemi di terzo e quarto grado, assieme ad altri strumenti come il trasportatore di segmenti, la riga a due orli e altri meccanismi articolati.

In questo utilizzo della piegatura della carta per la risoluzione di problemi di terzo e quarto grado sta il contributo di originalità della Beloch, che impresse uno sviluppo alla ricerca in questo campo.

Oltre a riprendere le cinque operazioni di piegatura di Sundara Row, la Beloch introduce una sesta operazione che consiste nel portare simultaneamente due punti assegnati su due rette date mediante un'unica piegatura. A differenza delle precedenti, questa piegatura non può essere riprodotta con l'uso esclusivo della riga e del compasso perché sottintende un problema del terzo ordine, ovvero quello di trovare una tangente comune alle due parabole che hanno per fuochi e direttrici i punti e le rette assegnate (fig. 5).

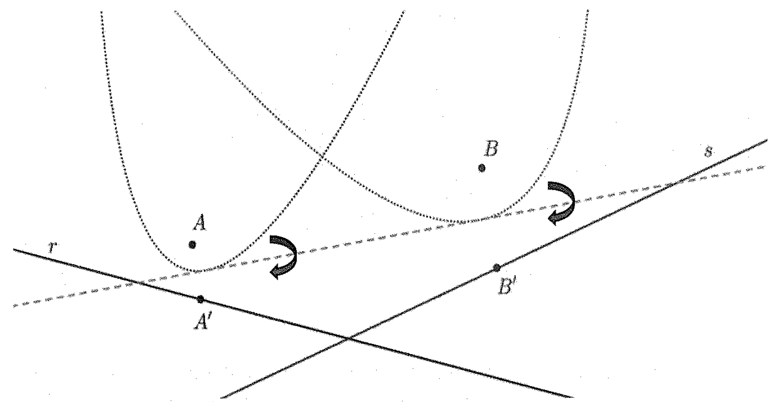


Fig. 5

Questa nuova piegatura consentì alla Beloch di risolvere un problema da lei già proposto nelle sue lezioni. Il problema è il seguente: *sono dati nel piano due rette r e s e due punti A e B. Si vuole trovare un quadrato che abbia i vertici X e Y sulle rette date e i lati XW e YZ passanti per i punti assegnati* (fig. 6) [4].

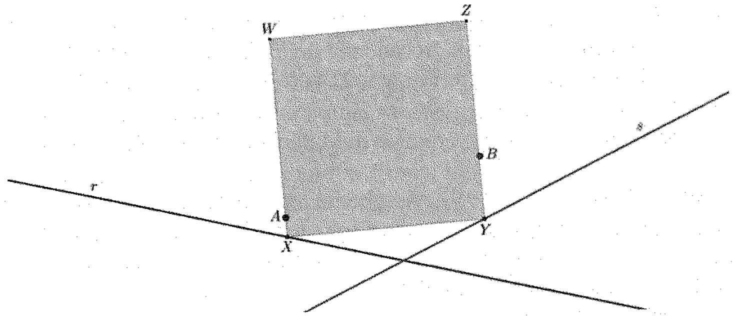


Fig. 6

Questo problema può essere risolto molto facilmente mediante una piegatura Beloch. Infatti basta tracciare per piegatura una nuova retta r' tale che la retta r sia equidistante da A e da r'. Analogamente si traccia la retta s'. Dopodiché si considera la piega Beloch che porta A su r' e B su s'. Questa piegatura è asse comune dei segmenti AA' e BB' e quindi le intersezioni della piega con le rette di partenza individuano i vertici X e Y del quadrato ricercato (fig. 7).

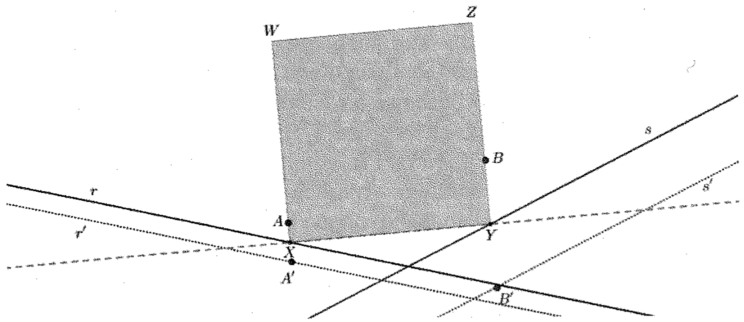


Fig. 7

La Beloch poi mostrò come la costruzione di questo quadrato potesse essere impiegata nella risoluzione di un'equazione di terzo grado. A tal fine, riprese un procedimento grafico per la risoluzione di un'equazione algebrica di grado qualunque ideato dall'ingegnere militare austriaco Eduard Lill (1830-1900), e illustrato in una sua nota del 1867 sui *Nouvelles Annales de mathématiques*.[8]

[8] E. Lill, *Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, in Nouvelles Annales de mathématiques, 6, 1867, pp. 359-362.

Il metodo di Lill consiste nell'associare ad un polinomio di grado n una spezzata rettangolare i cui segmenti hanno lunghezza e orientamento dipendenti dai coefficienti del polinomio. Dopodiché, si suppone di aver individuato un'altra spezzata rettangolare che abbia lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale della spezzata di Lill e sia tale che i suoi segmenti abbiano estremi su due segmenti consecutivi della spezzata di Lill (fig. 8). Indicando con θ l'angolo orientato che il primo segmento di questo cammino risolvente forma con il segmento a_n, si trova che $-\text{tg}\,\theta$ è radice reale del polinomio dato.

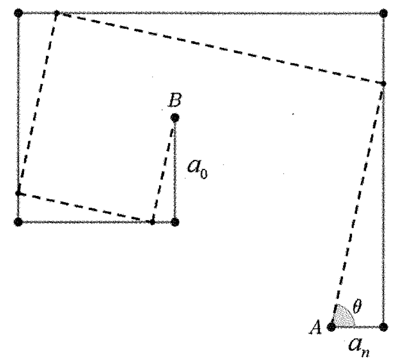


Fig. 8

Nel caso particolare in cui il polinomio sia monico e di terzo grado, la spezzata di Lill sarà costituita da quattro segmenti in cui il primo segmento ha lunghezza 1. Per considerazioni trigonometriche la lunghezza del segmento OX, presa con il segno opportuno, è radice della cubica considerata (fig. 9).

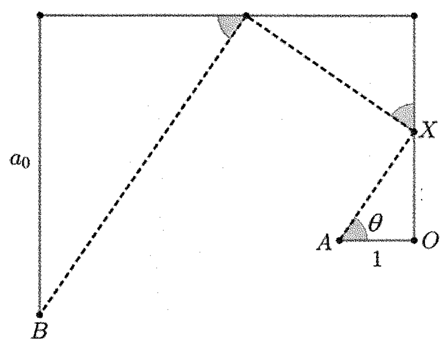


Fig. 9

Il contributo di originalità della Beloch sta nell'aver interpretato il metodo di Lill nel caso $n = 3$ come un'applicazione del suo quadrato Beloch [7]. Infatti, come mostrato in fig. 10, ricercare un cammino risolvente per una cubica equivale a trovare un quadrato Beloch $XYZW$ che abbia:

— i due vertici X e Y sulle rette r e s, che contengono rispettivamente i segmenti a_2 e a_1 della spezzata di Lill associata alla cubica;
— i lati opposti XW e YZ (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per il punto iniziale A e per il punto finale B della spezzata di Lill.

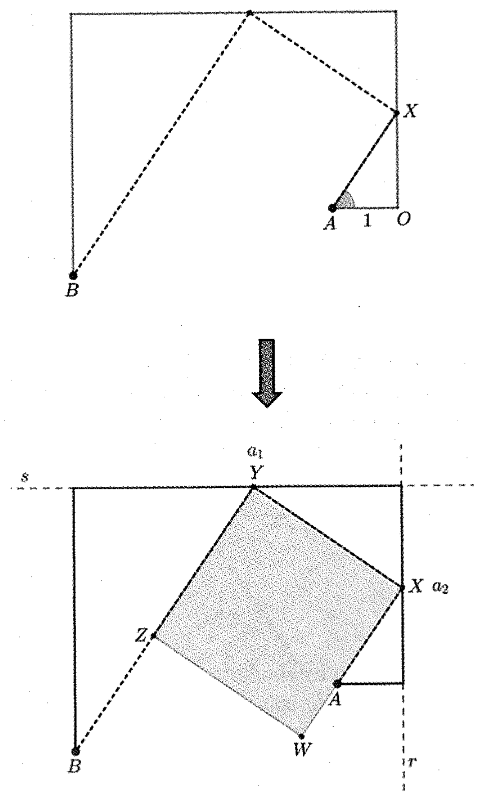


Fig. 10

Il problema della risoluzione di una cubica è quindi ricondotto alla costruzione di un quadrato Beloch per piegatura. Basta allora considerare la spezzata associata alla cubica, costruire le rette ausiliarie r' e s', trovare la piega Beloch

che porta A su r' e B su s'. Questa piega individua il lato del quadrato Beloch e di conseguenza un cammino risolvente per la cubica. In particolare il punto d'intersezione tra la retta a_2 e la piega individua il segmento OX, la cui lunghezza, presa con il segno opportuno, è una radice della cubica (fig. 11).

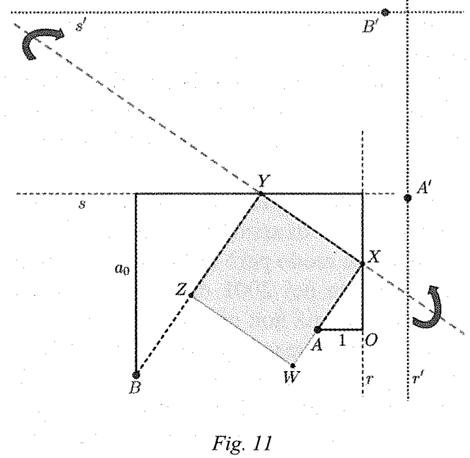


Fig. 11

Con questo metodo la Beloch provò che tutti i problemi di terzo grado, e di conseguenza pure quelli di quarto grado, possono essere risolti con il metodo di ripiegamento della carta. In particolare la Beloch risolve il problema della duplicazione del cubo, applicando il suo metodo alla cubica $x^3 - 2 = 0$ per determinare un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$ (fig. 12) [4].

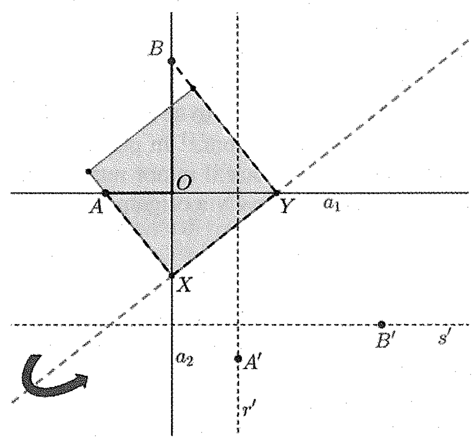


Fig. 12

Sviluppi recenti della geometria origami

Negli articoli della Beloch, come pure nell'opera di Sundara Row, non si sente l'esigenza di dare una sistemazione assiomatica a questa nuova geometria. Questo problema venne affrontato per la prima volta dal matematico giapponese Humiaki Huzita (1924-2005) nel 1989, in occasione del primo congresso internazionale sulla geometria origami che si tenne proprio a Ferrara in onore della Beloch.[9] Huzita presentò un sistema di sei assiomi che codificano a livello astratto i sei modi distinti preesistenti di sovrapporre punti e rette su un foglio di carta. Il suo sesto assioma corrisponde proprio alla piegatura Beloch [8].

Nello stesso anno un altro matematico francese di nome Jacques Justin aveva presentato un'altra lista di assiomi, che ne includeva un settimo trascurato da Huzita.[10] In qualche modo però questa lista passò inosservata e questa operazione venne riscoperta nel 2001 dal matematico giapponese Koshiro Hatori. Questo settimo assioma non estende il campo dei numeri costruibili via origami, ma non è comunque un'operazione equivalente a nessuno dei sei assiomi del sistema originale [1]. Tuttavia la riscoperta di Hatori ha poi sollevato una questione sui fondamenti della geometria origami, che riguarda la completezza di questo sistema assiomatico. Ci si chiedeva se esistessero altre piegature che non erano ancora state scoperte, questione che sarà poi risolta da Robert Lang con la sua teoria degli allineamenti.

Nel 1989, in occasione del medesimo congresso, Benedetto Scimemi, che all'epoca era professore di Algebra e Matematiche Complementari a Padova, presentò una teoria puramente algebrica per il *paper folding* che si fonda sulla definizione rigorosa di punto origami-costruibile, e di conseguenza di numero origami-costruibile. Ne diede pure una caratterizzazione algebrica in termini di estensione di campi [8].

Come corollario di questo risultato Scimemi diede un criterio di costruibilità per i poligoni regolari via *paper folding*, secondo cui l'n-agono regolare è costruibile via *paper folding* se e soltanto se n è della forma $2^r 3^s p_1 p_2 \dots p_m$ dove i p_i sono primi distinti di Pierpont.[11] In particolare l'ettagono regolare risulta essere il poligono regolare con il minor numero di lati che non è costruibile con riga e compasso, ma lo è via origami.

[9] Huzita presentò il suo sistema di assiomi in un articolo pubblicato nei *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology* (Ferrara, Casa di Lodovico Ariosto, December 6-7, 1989).

[10] J. Justin, *Résolution par le pliage de l'équation du troisième degré et applications géométriques*, Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, Humiaki Huzita ed., 1989, pp. 251-261.

[11] Un numero primo della forma $2^a 3^b + 1$ con $a, b \in \mathbb{N}$ è detto primo di Pierpont.

Questi procedimenti nascono dalla combinazione degli usuali metodi con riga e compasso, con l'aggiunta della possibilità di trisecare un angolo qualunque, che è un problema del terzo ordine, quindi risolubile via origami.

Infatti Huzita e Scimemi ripropongono nel loro lavoro una costruzione che era già stata proposta dal matematico giapponese Hisashi Abe nel 1984 in merito alla trisezione dell'angolo (fig. 13).[12] Si suppone di riportare su un foglio di carta l'angolo φ da trisecare. Si traccia a piacere una retta r che sia parallela al bordo orizzontale del foglio, si costruisce la retta r' equidistante da r e dal bordo orizzontale del foglio, basta quindi considerare la piega Beloch che porta B sulla retta s che segna l'angolo e A sulla retta r'. Chiamata A' la posizione di A dopo il ripiegamento si ha che la retta per A e A' individua un angolo di ampiezza $\varphi/3$.

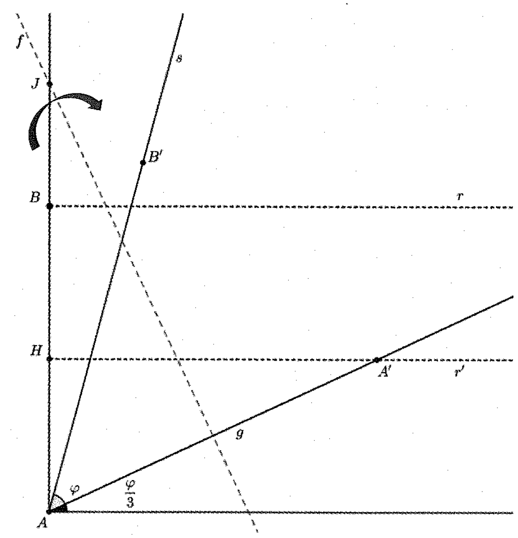


Fig. 13

La geometria origami consente di risolvere una classe più vasta di problemi rispetto alla geometria euclidea. Tuttavia rimanevano irrisolti problemi di grado superiore, come la quintisezione dell'angolo o la costruzione dell'endecagono regolare, che è il più piccolo poligono regolare che non si può costruire usando gli assiomi di Huzita. Ma nel 2003 Robert Lang, uno dei maggiori esperti contemporanei di teorie origami, ha dimostrato come quintisecare un angolo per piegatura [2]. Però nel procedimento, in un passaggio, è richiesto

[12] H. Abe, costruzione descritta in *British Origami*, no. 108, 1984, p. 9.

un doppio ripiegamento, cioè una doppia piegatura simultanea in cui non si dispiega la carta in ogni passaggio. Quindi questo tipo di ripiegamento esula dagli assiomi di Huzita che invece involgono una sola piegatura, noti come assiomi della geometria origami *one-fold*. Questa scoperta di Lang ha sollevato un'altra questione: ci si domandava se potessero essere eseguite altre costruzioni, ammettendo la possibilità di eseguire piegature multiple, doppie o più. Inoltre siccome quintisecare un angolo sottintende risolvere una quintica irriducibile, ci si chiedeva anche se in un contesto di geometria *multi-fold* fosse possibile risolvere equazioni di grado superiore al quarto.

A queste domande viene data una risposta da parte di Roger Alperin e Robert Lang, mediante una nuova teoria basata sulla nozione di allineamento che consente di riformulare gli assiomi di Huzita-Hatori [2]. In particolare, nella geometria *one-fold* si individuano cinque tipi di allineamenti: l'allineamento punto-punto, retta-retta, punto-retta a cui si aggiungono i due allineamenti che lasciano invariati per piegatura la retta o il punto. Ogni assioma di Huzita può essere visto come combinazione di uno o due di questi allineamenti. Inoltre, elencando tutte le combinazioni di questi allineamenti, si può concludere che i sette assiomi di Huzita-Hatori sono tutti e soli i possibili assiomi per la geometria origami *one-fold*: ciò prova la completezza del sistema assiomatico proposto da Huzita, con l'aggiunta del settimo di Hatori.

Inoltre la teoria degli allineamenti consente anche di codificare le piegature multiple, ovvero le piegature consentite in una geometria origami *multi-fold*. Ad esempio, nella geometria origami a doppia piegatura sono 17 i possibili allineamenti, che combinati insieme danno luogo a 489 ripiegamenti, e la quintisezione dell'angolo richiede soltanto una di queste operazioni. Invece in una geometria origami a tre piegature è possibile risolvere una generica quintica utilizzando una tripla piegatura simultanea, come ha dimostrato Lang generalizzando il procedimento Lill-Beloch al caso $n = 5$. Addirittura, nel 2006 i due matematici giapponesi T. Y. Chow e K. Fan giungono a dimostrare che sono sufficienti $n - 2$ piegature simultanee per risolvere un'equazione algebrica di grado n, sempre riadattando il procedimento Lill-Beloch al caso n qualunque [7].

Tuttavia queste piegature nella pratica sono talmente complesse che risultano irrealizzabili, quindi Lang e Alperin spostano il problema in un ambito puramente astratto, che è legato a teorie matematiche anche molto sofisticate come la teoria dei numeri, la teoria dei campi, la logica computazionale. In questo contesto la piegatura della carta non può più essere considerata uno strumento elementare.

Ripercorrendo la storia della geometria origami, a Margherita Beloch va riconosciuto il merito di aver dimostrato che i metodi origami consentono di risolvere ogni problema di terzo e di quarto grado, in particolare i problemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, impossibili da risolvere con la geometria della riga e del compasso.

Alla luce della recente sistemazione assiomatica di Huzita-Hatori, si può concludere che la piegatura Beloch risulta essere il movimento origami più complesso che si possa realizzare mediante un solo ripiegamento, nel senso che qualunque altra piegatura di questo tipo non può avere un potere algebrico superiore. In altri termini, la teoria di Margherita Beloch ha stabilito quelli che sono i limiti algebrici e geometrici delle tecniche origami che possono essere messe in pratica con un foglio di carta trasparente, senza troppe difficoltà.

Bibliografia

[1] ALPERIN R. C., *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York Journal of Math., 6, 2000, pp. 119-133.

[2] ALPERIN R. C., LANG R. J., *One-, two-, and multi-fold origami axioms*, International Meeting of Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006, pp. 371-393.

[3] BELOCH M., *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row*, in Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico – Matematiche di Ferrara, 2, Vol. XI, 1934, pp. 186-189.

[4] BELOCH M., *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, in Periodico di Matematiche, 16, 1936, pp. 104-108.

[5] BORGATO M.T., SALMI R., *Donne e matematica in Italia*, Periodico di Matematiche 10/1 S. XIV a. CXVIII, 2018, pp. 35-54.

[6] FRIEDMAN M., *A History of Folding in Mathematics*, Science Networks Historical Studies 59, Birkäuser, 2018.

[7] HULL T., *Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill*, in American Mathematical Monthly, 2011, pp. 307-315.

[8] HUZITA H., SCIMEMI B., *The algebra of paper-folding (origami)*, in Origami Science and Technology - Ferrara, Italy 1989, Proc. First Inter. Meet. Origami Science and Technology, H. Huzita, ed., Ferrara, Italy, (1990) pp. 205-222.

[9] MAGRONE P., TALAMANCA P., *Folding Cubic Roots: Margherita'a Piazzolla Beloch's contributions to elementary geometric constructions*, Aplimat 2017 Proceedings, pp. 971-984.

[10] SUNDARA ROW T., *Geometric Exercises in Paper Folding*, Open Court, Chicago, 1917.