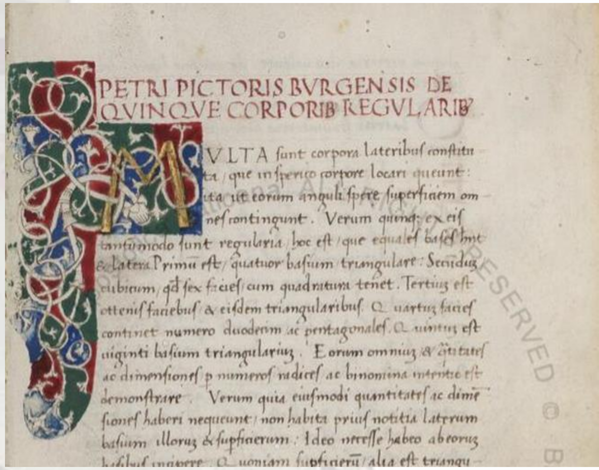
Tra matematica dell'abaco e tradizione archimedea: Piero della Francesca e il volume della volta

Between abacus mathematics and Archimedean tradition: Piero della Francesca and the volume of the vault


PETRI PICTORIS BVRGENSIS DE QVINQVE CORPORIB REGVLARIB

MVLTA sunt corpora lateribus constituta, que in sperico corpore locari queunt: ita ut eorum anguli spere superficiem omnes contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia, hoc est, que equales bases hnt & latera. Primū est, quatuor basium triangulare. Secundum cubicum, qd sex facies cum quadratum tenet. Tertium est octenis faciebus & eisdem triangularibus. Quartum facies continet numero duodecim ac pentagonales. Quintum est uiginti basium triangularium. Eorum omnium & quantitates ac dimensiones p numeros radices ac binomina intentio est demonstrare. Verum quia eiusmodi quantitates ac dimensiones haberi nequeunt, non habita prius notitia laterum basium illorum & superficierum: Ideo necesse habeo ab eorum basibus incipere. Quoniam superficierū alia est triangu-

Veronica Gavagna (veronica.gavagna@unifi.it)

University of Florence,

Department of Mathematics and Computer Science

9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education

http://dmi.unife.it/it/ricerca-dmi/mathesis/materiali-esu-9

1. Material1 Abacus mathematics and Archimedean tradition (Gavagna)
   Gavagna_notes.pdf

2. Material2 Abacus mathematics and Archimedean tradition (Gavagna)
   Gavagna_Salerno_ESU9.pdf

3. Material1 Abacus mathematics and Archimedean tradition (Gavagna)
   Gavagna_stampa.pdf

<u>A chi è rivolta questa attività</u>: studenti di scuola superiore

Obiettivi:

- Migliorare le capacità di visualizzazione e di controllo concettuale di oggetti geometrici tridimensionali
- Porre gli studenti di fronte al problema di trovare il volume di un oggetto non standard (la doppia volta) con strumenti elementari
- Studio critico dell'argomentazione di Piero (ed eventuale confronto con l'analogo problema archimedeo)
- Riflessione sul concetto di definizione

- Lettura di una fonte originale (o più fonti originali: testo latino di Piero, traduzione in volgare di Luca Pacioli
- Questioni storiografiche: la dimostrazione mancante di Archimede e la fonte sconosciuta di Piero

Who this activity is for: high school students

Goals:

- Improve visualization and conceptual control abilities of three-dimensional geometric objects
- To confront students with the problem of finding the volume of a nonstandard object (the double vault) with elementary tools
- Critical study of Piero's argument (and possible comparison with the analogous Archimedean problem)
- Reflection on the concept of definition

- Reading of original source(s): Latin text by Piero, vernacular translation by Luca Pacioli
- Historiographical issues: Archimedes' missing demonstration and Piero's unknown source

- Il contesto storico (matematica dell’abaco e tradizione archimedea nel medio evo e primo Rinascimento)

- Le fonti: *Libellus de quinque corporibus regularibus* di Piero della Francesca, *Divina Proportione* di Luca Pacioli (1509)

- Il problema matematico attraverso i testi: il volume dell’intersezione di due cilindri di uguale base che si tagliano perpendicolarmente

Perché questo problema è così legato ad Archimede?

The historical context (abacus mathematics and Archimedean tradition in the Middle Ages and early Renaissance)

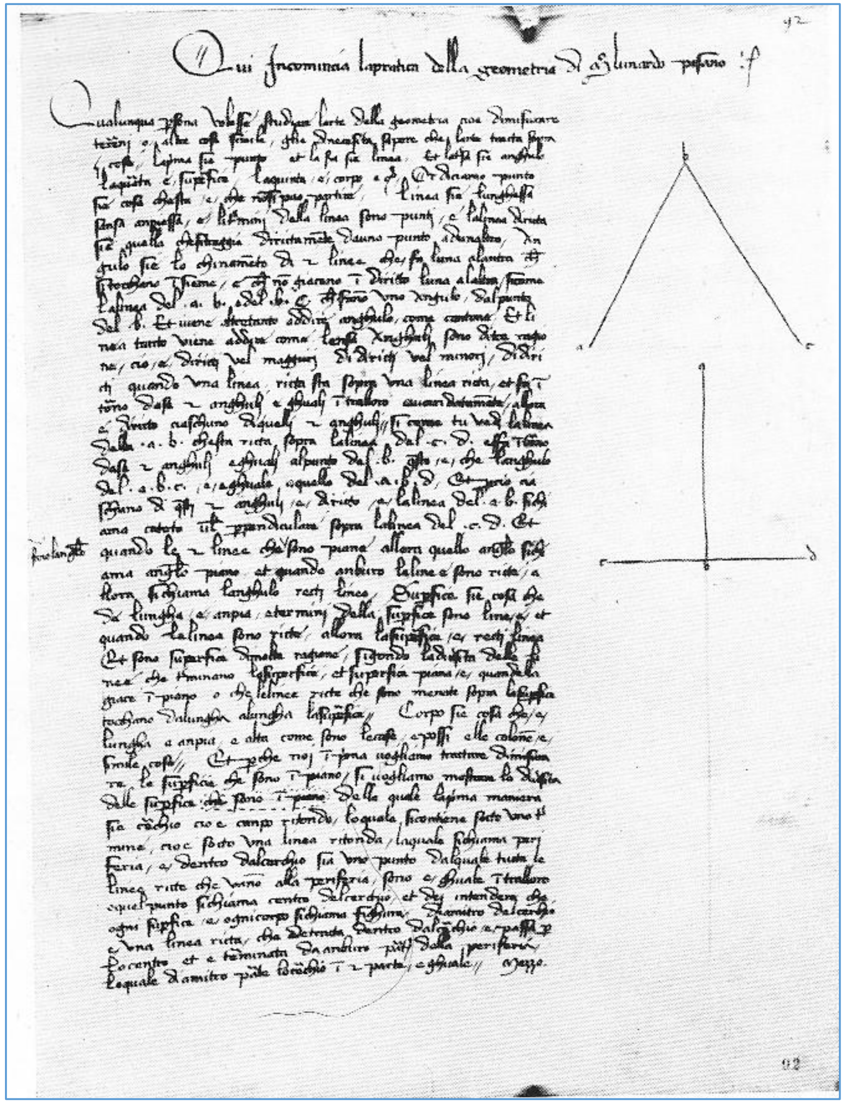
The sources: Piero della Francesca's *Libellus de quinque corporibus regularibus*, Luca Pacioli's *Divina Proportione* (1509)

The mathematical problem through the texts: the volume of the intersection of two cylinders of equal base that are cut perpendicularly

Why is this problem so connected with Archimedes?

Che cos’è la matematica dell’abaco?

È un tipo di matematica che comincia ad affermarsi nella prima metà del Duecento con l’apparire dell’opera di Leonardo Pisano e inizia a declinare nella seconda metà del Cinquecento. I temi tipici della matematica mercantile sono: calcolo di interessi e sconti, baratti, conversione di unità di misura, compagnie etc A questi si aggiungono gli argomenti di geometria pratica in gran parte legati al calcolo di aree e volumi.



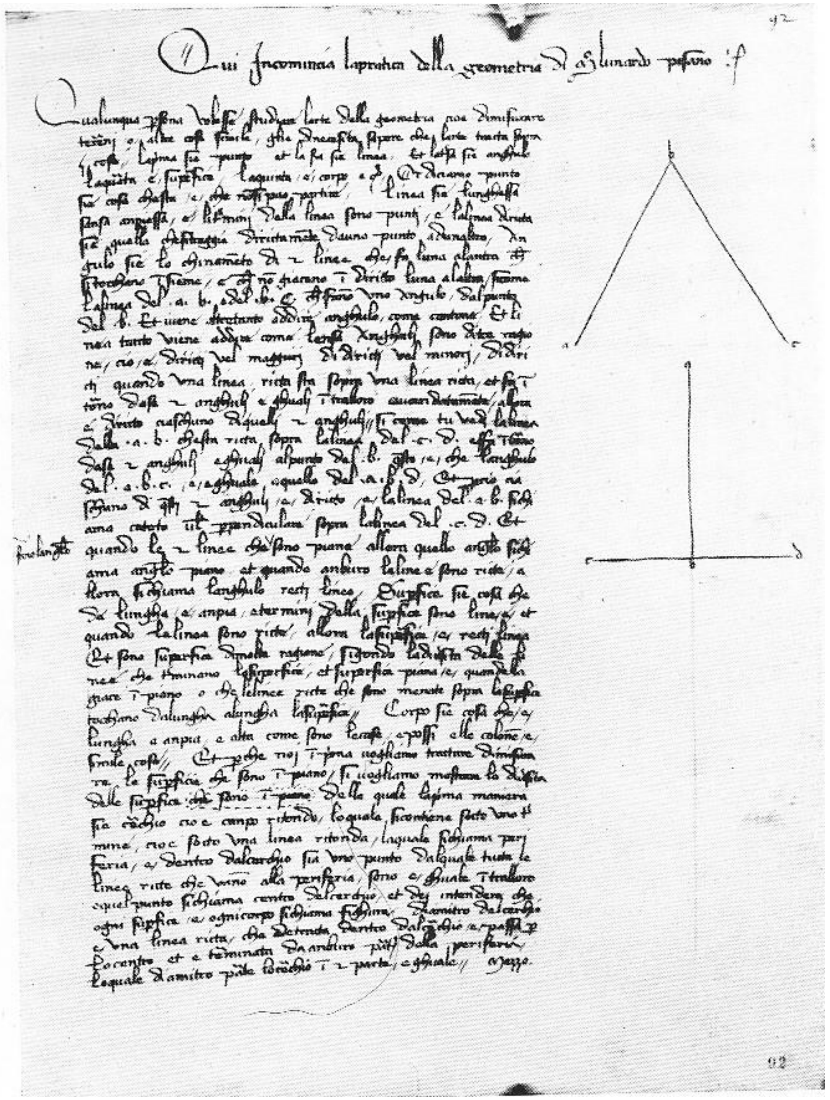
La matematica abachistica, oltre che per i contenuti e lo stile, si contraddistingue (anche)

- Per la lingua: il volgare
- Per la scrittura: la mercantesca

What is abacus mathematics?

It is a kind of mathematics that begins to establish itself in the first half of the Thirteenth century with the appearance of the work of Leonardo Pisano and begins to decline in the second half of the Sixteenth century. The typical topics of mercantile mathematics are: calculation of interest and discounts, barters, conversion of units, companies etc To these are added the topics of practical geometry largely related to the calculation of areas and volumes. Abacus mathematics, in addition to its content and style, is distinguished (also)

- For language: the vernacular
- For the handwriting style: the “mercantesca”



I trattati d’abaco che sono sopravvissuti sono circa trecento e sono conservati per lo più nelle biblioteche di Firenze, Siena e Pisa.

I trattati d’abaco non sono libri di testo per gli studenti ma, con ogni probabilità, repertori di casi per i maestri d’abaco e per i clienti della bottega.
Si tratta infatti di raccolte di problemi risolti, raggruppati per temi, in cui il problema ha la funzione di “exemplum”. L’approccio è di tipo analogico e induttivo: si parte da un caso o da un gruppo di casi particolari che fungono da paradigma di un caso più generale. Il termine “dimostrare” è usato nel senso di “mostrare”, la prova assume il significato di “riprova” (si ripercorre il procedimento “all’indietro”).

Non ci sono argomentazioni astratte ma sempre basate su esempi numerici.

The extant abacus treatises are about three hundred and are mostly preserved in the libraries of Florence, Siena, and Pisa.

The abacus treatises were not textbooks for students but, in all likelihood, case repertories for abacus masters and customers.

They are in fact collections of solved problems, grouped by themes, in which the problem has the function of an *exemplum*. The approach is analogical and inductive: starting with a particular case or group of cases that serve as a paradigm of a more general case.
The term "prove" is used in the sense of "show," proof takes on the meaning of "reproof" (we retrace the process "backwards"). There are no abstract arguments but always based on numerical examples.

Nell'*incipit* della Quinta Parte del *General Trattato di numeri et misure* (1556-1560), Niccolò Tartaglia spiega chiaramente la differenza tra "l'essequir un problema mathematicamente" e "naturalmente"

Come s'intenda eſſequir un problema mathematicalmente.

AEſſequire vn problema mathematicalmente s'intende quando che in tal eſſecutione ſi procede con atti ſcientifici, che con ragioni aſtratte ſi poſſino dimoſtrare, & ſoſtentare, ſi come coſtuma Euclide, Apollonio Pergeo, Archimede Siracuſano, Prolomeo nel Almageſto, & altri ſcientifici geometri.

Come s'intenda eſſequir un problema naturalmente.

AEſſequir vn problema naturalmente s'intende quãdo, che in tal eſſecutione ſi procede per vn certo modo, che la natura infonde generalmente in ogni qualita di huomini, cioe a taſtone. Eſſempi gratia s'io proponeſſe a qual ſi voglia ſimplice huomo, che in vn propoſto cerchio mi ſcriueſſe vn penthagono equilatero, quel tale per natural

La dimostrazione matematica adduce ragioni astratte mentre la dimostrazione naturale va per tentativi, ma "tal sorte di prova non è accettata dal mathematico perché in molte cose il senso n'inganna"

In the *incipit* of the Fifth Part of *General Trattato de numeri et misure* (1556-1560), Niccolo Tartaglia clearly explains the difference between "performing a problem mathematically" and "naturally"

Come s'intenda eſſequir un problema mathematicalmente.

AEſſequire vn problema mathematicalmente s'intende quando che in tal eſſecutione ſi procede con atti ſcientifici, che con ragioni aſtratte ſi poſſino dimoſtrare, & ſoſtentare, ſi come coſtuma Euclide, Apollonio Pergeo, Archimede Siracuſano, Ptolomeo nel Almageſto, & altri ſcientifici geometri.

Come s'intenda eſſequir un problema naturalmente.

AEſſequir vn problema naturalmente s'intende quãdo, che in tal eſſecutione ſi procede per vn certo modo, che la natura infonde generalmente in ogni qualita di huomini, cioe a taſtone. Eſſempi gratia s'io proponeſſe a qual ſi voglia ſimplice huomo, che in vn propoſto cerchio mi ſcriueſſe vn penthagono equilatero, quel tale per natural

Mathematical demonstration adduces abstract reasons while natural demonstration goes by trial and error, but "such a kind of proof is not accepted by the mathematician because in many things the sense deceives us."

Le scuole d’abaco promuovono la diffusione della matematica e alzano il livello di alfabetizzazione matematica in diversi strati sociali, creando anche diverse aspettative nei confronti della disciplina e contribuiscono a creare un clima culturale favorevole alla ricezione dei classici greci che partecipano di quel fenomeno culturale che va sotto il nome di Umanesimo (matematico).

The abacus schools promoted the spread of mathematics and raised the level of mathematical literacy in different social strata, also creating many expectations of the discipline. Abacus schools helped creating a cultural climate able to appreciate and understand the Greek Classics contributing to the birth of (mathematical) Humanism.

L'opera di Archimede è particolarmente ostica: intere parti di dimostrazioni sono lasciate al lettore ed è necessario avere molti strumenti matematici (per esempio la teoria delle coniche) per comprendere queste dimostrazioni.
Si richiede un tremendo sforzo intellettuale e questo è uno dei motivi per i quali la traduzione medievale di Guglielmo di Moerbeke, eseguita alla corte papale di Viterbo attorno alla metà del Duecento, non conosce quasi diffusione nella comunità scientifica.

La *Practica geometriae* di Leonardo Pisano è uno dei più importanti tramiti della diffusione delle conoscenze archimedee nel mondo della cultura dell'abaco, sostanzialmente limitate alla *Misura del cerchio* e alla *Sfera e il cilindro*. La fonte fondamentale di Leonardo non è tuttavia una fonte diretta, ovvero gli scritti di Archimede, ma la tradizione indiretta dei *Verba filiorum*.

La conoscenza dell'opera archimedea si limita tuttavia all'uso dei risultati relativi al cerchio e alla sfera.

Archimedes' work is particularly difficult: entire portions of demonstrations are left to the reader, and it is necessary to know many (advanced) mathematical tools (e.g., conic theory) to understand these demonstrations.

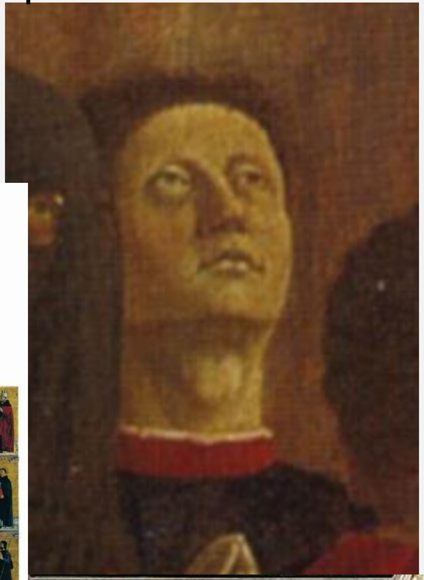
Tremendous intellectual effort was required, and this is one of the reasons why William of Moerbeke's medieval translation of Codes A and B, done at the papal court in Viterbo around the middle of the thirteenth century, knew almost no circulation.

Leonardo Pisano's *Practica geometriae* is one of the most important means of the dissemination of Archimedean results in the abacus culture. Leonardo's fundamental source, however, is not Archimedes’text, but the indirect tradition of the *Verba filiorum.*

However, knowledge of the Archimedean work is limited to the use of the results relating to the circle and the sphere.

Piero della Francesca (Borgo San Sepolcro circa 1412 – Borgo San Sepolcro 1492) is mostly known as a painter

Self portrait



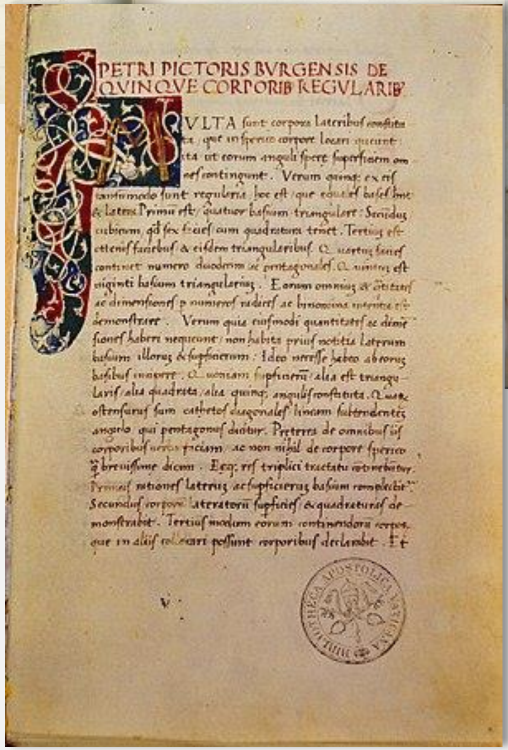
The Resurrection

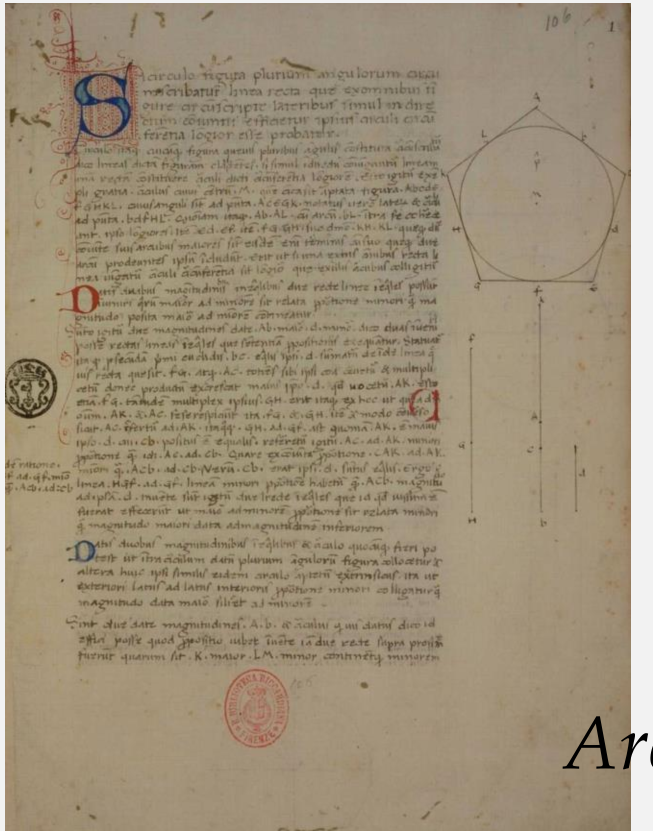
Polyptych of Saint Anthony

The Flagellation

The Montefeltro altarpiece

- *Trattato d'abaco*
- *De prospectiva pingendi*
- *Libellus de quinque corporibus regularibus*

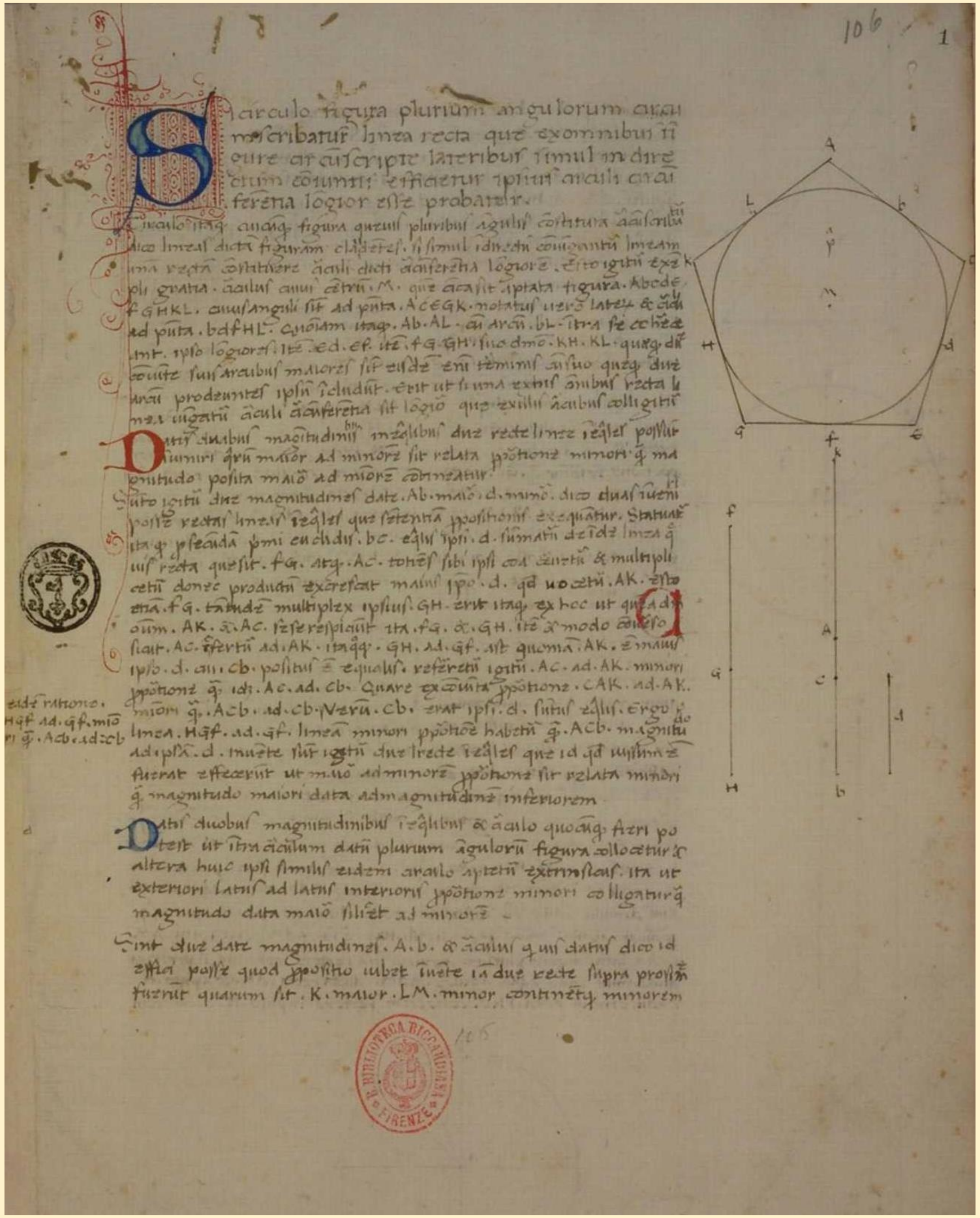


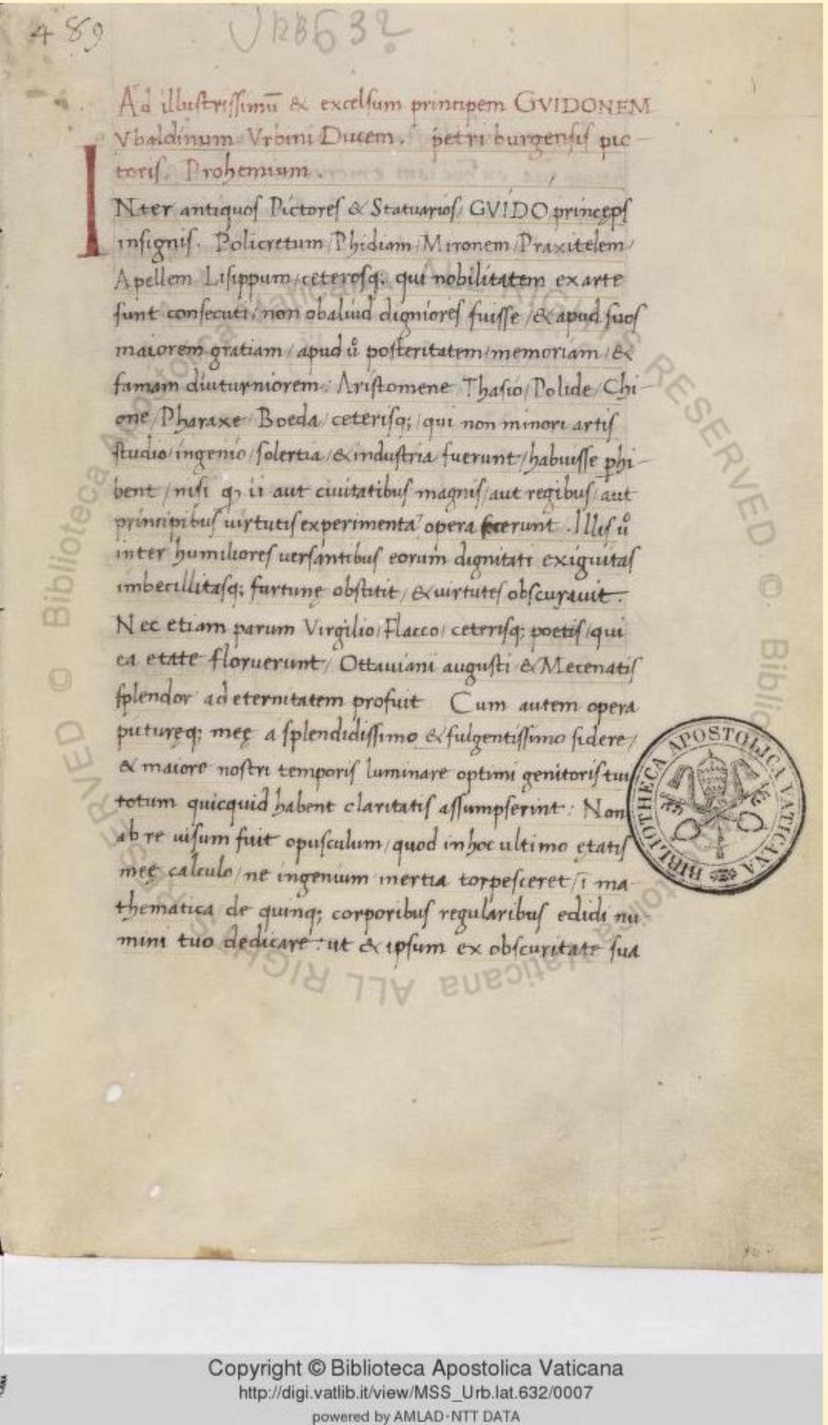


Archimedes' works

Ci sono pervenuti due codici “archimedei” di Piero della Francesca:

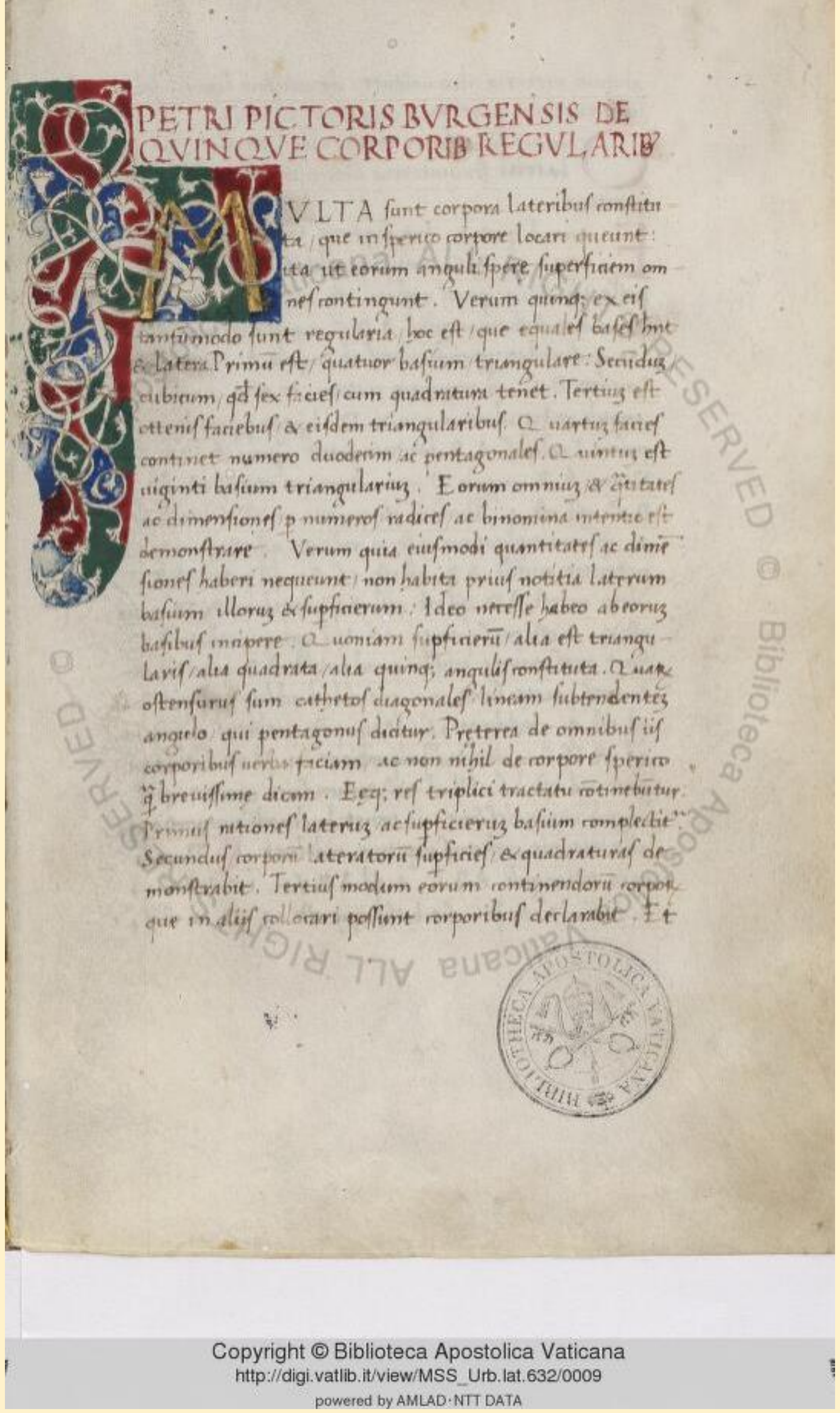
- **Codice 106** della Biblioteca Riccardiana di Firenze (siglum R): copia manoscritta del *corpus* archimedeo esemplata sulla base del codice A tradotto in latino da Iacopo di San Cassiano (*Sulla sfera e il cilindro*, *Misura del cerchio*, *Conoidi e sferoidi*, *Equilibrio dei piani*, *Quadratura della parabola*, *Arenario*)





Vat. Urb. Lat. 632 della Biblioteca Vaticana di Roma: copia manoscritta del *Libellus de quinque corporibus regularibus*

https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

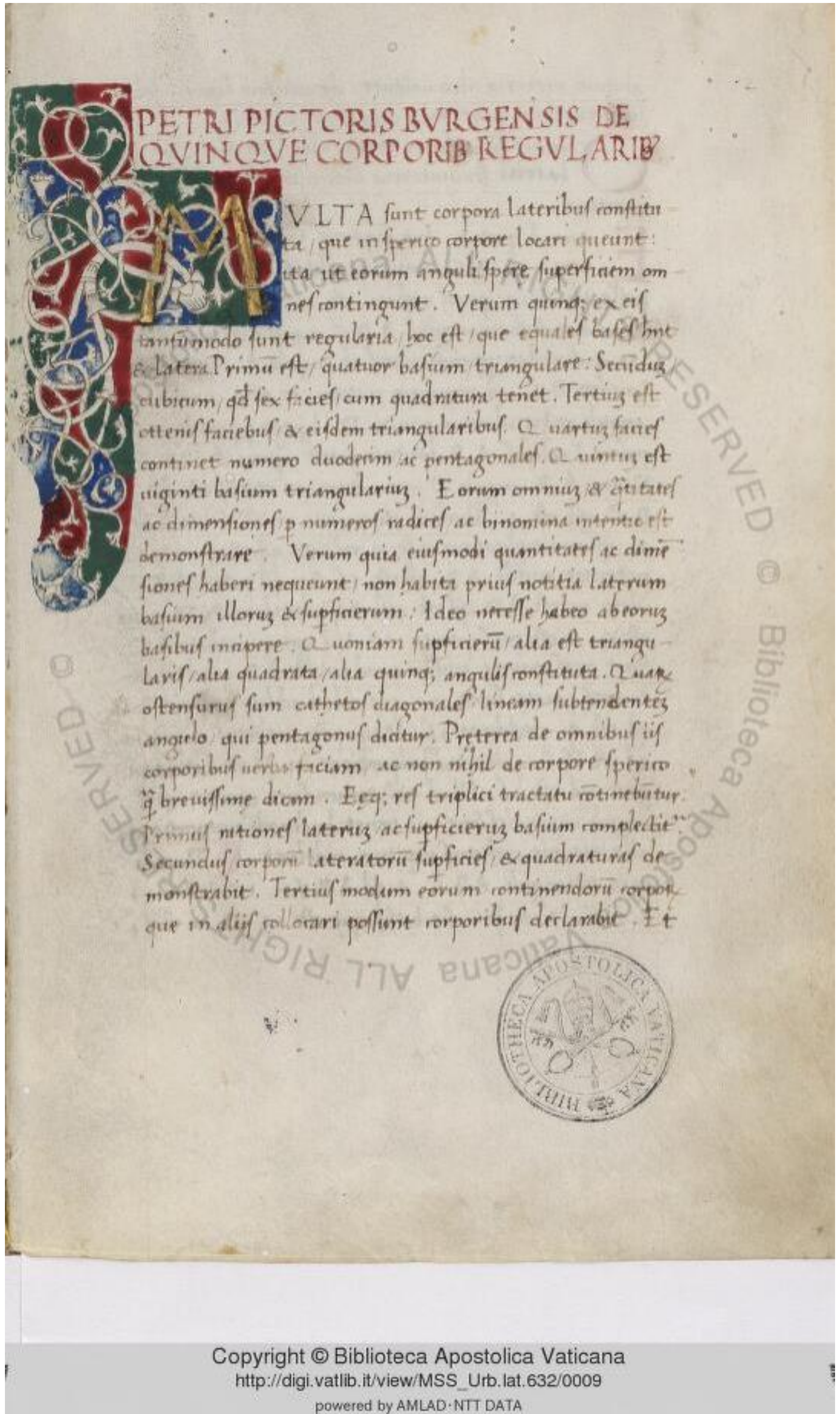


There are two extant «archimedean» works:

- **Ms 106** in the Biblioteca Riccardiana of Firenze (siglum R): handwritten copy of the Archimedes' *corpus* based on Manuscript A translated into Latin by Iacopo di San Cassiano (*On the Sphere and cylinder, Measurement of a circle, On Conoids and Spheroids, On the equilibrium of planes, Quadrature of the parabola, The Sand-reckoner*)

- **Ms Vat. Urb. Lat. 632** Biblioteca Vaticana di Roma: *Libellus de quinque solidis regularibus*

https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

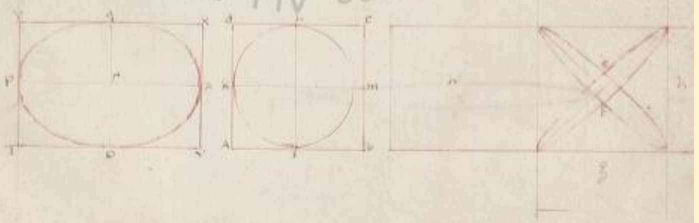


[illegible]

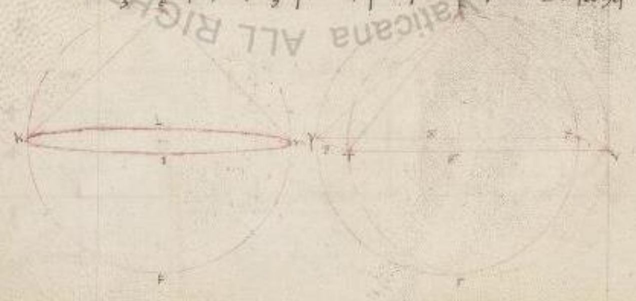
X Est quedam coluna rotunda ad circinum, cuius dyameter est
q. brachiorum. id est cuiuslibet eius basis & alia coluna
eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. queritur que quan
titas auferatur a prima coluna per ipsum foramen.

Scire debes quod coluna perforata & in concavitate sua ubi
incipit foramen & in concavitate ei opposita, ubi foramen
desinit, perforatur ad rectam lineam. Et axis colune perforantis trans
it per assem colune perforate ad angulum rectum & ipsarum linee se
ficiunt unum quadratum in eorum concavitate & superius & infe
rius se in duobus punctis contingunt, id est uno in superiori & al
tero in inferiori parte. Exemplum. Sit coluna perforata H. &

cotuna pforans. G. & foramen sit. ABCD. & puncta se tangetia
in earum concauitate sit EF. Et hu⁹ foraminis queritur qtitas.
Diximus q cuiuslibz cotune grossities erat. 4 brachioru. Igr
quadratum ABCD. est. 4. brachioru in quolibet latere / que lata
in se mltata faciut. 16. & EF. que est grossities cotune est. 4.
qd mltatum cum supficie basis / que est. 16. conficit. 64. qd di-
uidas p. 3. remanet. 21$\frac{1}{3}$. Et hoc duplicatu fit 42$\frac{2}{3}$. & tantu
aufert de cotuna. H. pp dictum foramen. id est brachia 42$\frac{2}{3}$.
Probatur sic. Tu scis q dicte cotune in foramine conficiut qua-
dratum qd est ABCD. Ideo facias una supficiem quadrata eius-
dem magnitudinis / que sit etiam ipsa. ABCD. in qua facias ci-
culum / qui sit. IKLM. & centru eius sit. N deinde facias alia
supficiem / cui duo latera opposita / quodlibz sit equale diagonali
AC foraminis dce cotune. Et alia duo latera / quodlibz equale
AB. qui sit TVXY. in quo describas unu circulu pportionabile
tangentes quodlibz latus dti quadrati in punctis. O.P.Q.R. &
eius centrum sit. S. dico eam pportione esse quadrati ABCD.
ad quadratu TVXY. que est circuli IKLM. ad suu quadratu
ABCD. que est circuli. OPQR. ad quadratu suu. TVXY. pro
ut per qntam tertij Archimedis de conoidalibus ostenditur.
Nunc diuidas quadratu. ABCD. in partes equales cu linea
KM. Postea trahas lineam KL. ML. conficietur triangulus
KLM. & diuidas in equales partes quadratum. TVXY. cum
linea. PR. Postea lineas. PQ. QR. Fiet triangulus. PQR.
Dico eam esse pportione trianguli. KLM. ad triangulu PQR
que est quadrati. ABCD. ad quadratum. TVXY. & ea que est
Trianguli KLM ad suu quadratu. ABCD. eadez est trianguli
PQR. ad suu quadratu TVXY. Et supius dctu fuit q talis



proportio erat circuli. IKLM. ad supficiem ABCD. qualis erat cir-
culi. OPQR. ad supficiem TVXY. Sequitur itaq; ex comuni scientia
talem esse proportione trianguli KLM ad suu circulu. IKLM. qua-
lis est trianguli PQR. ad suu circulu OPQR. Et hoc intel-
lecto faciemus figuras corporeas. Prima erit sperica notata. E.
KMF. & eius axis EF. & alia que circumdat quadratu TVXY. sut
duo corpora. Vnu est. TRXS. & aliud. VRVS. que se interfecat
in puncto R. & in puncto S. In quibus figuris corporeis faciaz in
qualibet unam pyramide in spera. EKMF. Lineabo KM circu-
lariter. postea traham lineas. KE. EM. & fiet KEM. pyramis sup
base rotunda. KLMI. Postea faciam aliam pyramide in alia figa
corporea / que erit. TR. VR. XR. VR. que pyramides sibi inuicem
sunt in proportione / sicut sut ipsaru matres / id est figure corporee
in quibus sunt fabricate / sicut supius ostenditur in supficiebz pla-
nis. sicut circulus TRXS. est equalis circulo OPQR in supficie.
TVXY. & latera pyramidis. TR. RX. sut equalia duobus laterib3
trianguli PQR. id est PQ. QR. & KEM. latera pyramidis spere
id est. KE. EM. sunt equalia duobus lateribus trianguli KLM. circuli
IKLM. id est. KL. LM. Concludamus eam esse pportione pyramidis
TR. VR. XR. VR. ad suu corpus. TRXS. que est pyramidis KEM. cu-
ius basis circularis est IKLM ad suu corpus spericu. KEMF. Igitur
p. xxxiiiam. pmi Spere & Coni Archimedis. ubi dicit quamlibet spera
esse quadruplam suo cono / cui⁹ basis est equalis maiori circulo spe.
Et axis equalis semidyametro. Capias itaq; basem. TVXY. que
pro quolibz latere / quatuor brachia. Mltata in se fiut. 16. brachia
que mltca cum suo asse / q est. 2. fit. 32. & hoc diuidas p. 3. re-
manet 10$\frac{2}{3}$. & eius corpus. TRXS. est quater tantu. Ideo mltca
10$\frac{2}{3}$. cum. 4. fit 42$\frac{2}{3}$. pro ut superius dictum fuit. Et sic hes



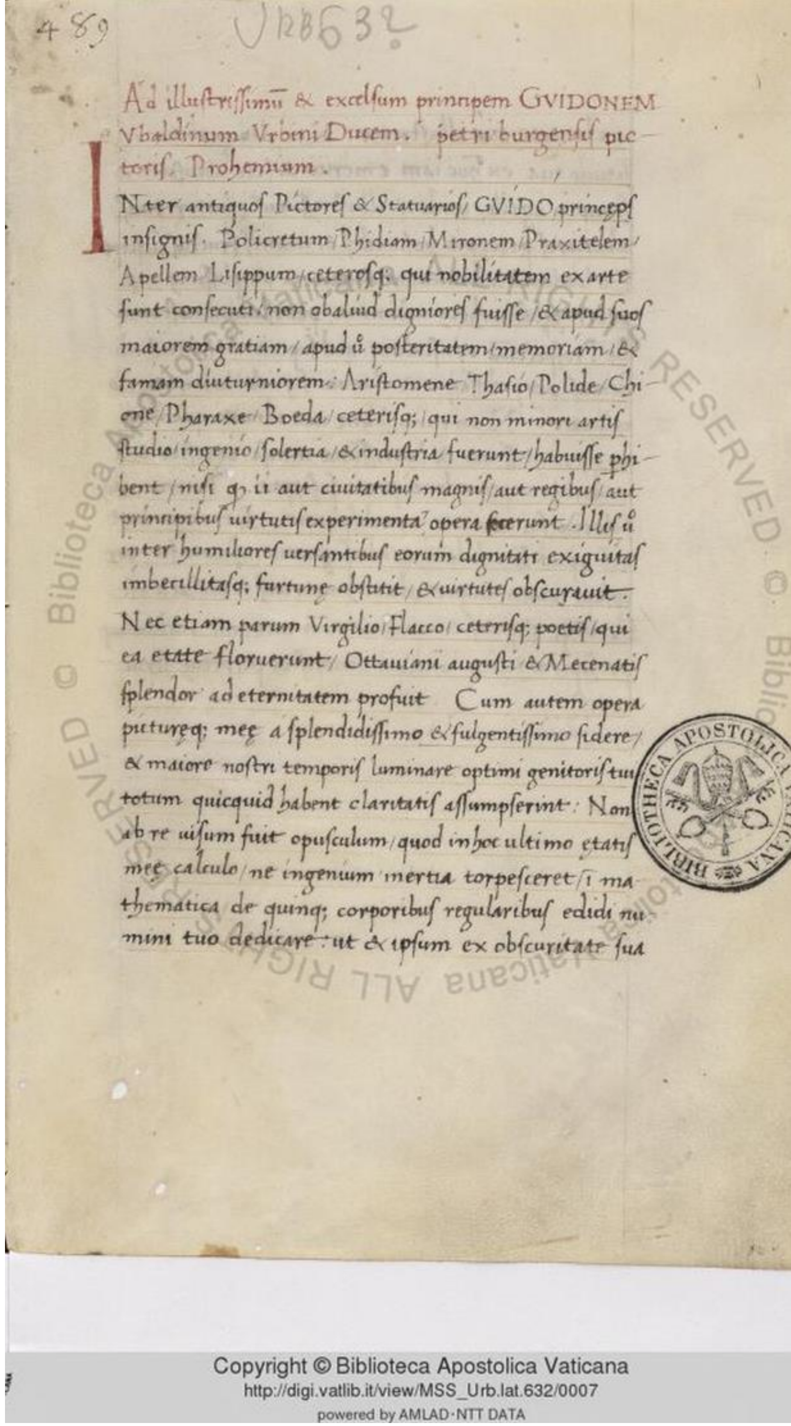
q aufertur a cotuna H. p illud foramen brachia 42$\frac{2}{3}$.

XI EST quedam testudo / seu uolta p modu crucis / que est pro
qualibz facie. 8. brachia. & in altitudine. 4. brachia / tam i
summitate arcuu q i medio uolte. Queritur de supficie concaua.
Scire debes q testudo in modu crucis facta componitur ex
duobus semicanonis / qui se inuicem intersecantes in corp
coniuctione conficiut. 4. puncta / ad similitudine. 4. punctor
facieru triangularium / seu scarhettoru pile. & posamente super. 4.
bases coniunguntur ad bina puncta / terminando in uno solo
puncto. Vt apparet in demonstratione / cui⁹ basis est ABCD.
& primus arcus est. AGB. Secundus. BHC. Tertius. CID. qua-
tus. DKA. & cruceria BED. & axis est. EF. cui⁹ uolte / qrit AEC. &
de supficie concaua ipsorum duoru semicanonor. AGB. CID.
& alterius. AKD. BHG. quoru cuilibet dyameter est 8. brachior
& altitudo. 4 / qui semicanoni simul uncti conficiut unuz
canonu pfectum & rotundu / cui⁹ diameter est 8. brachiorum
& est longus p totidem brachia. & eius supficies concaua est
201$\frac{1}{7}$. de qua uolumus extrahere supficiem. 4. scarchettoru
AEB. BCE. CED. DEA. Et cum auxilio precedentis figure.
In qua habes q eadem est proportio pyramidis rotunde ad di-
midiam eius speram / que est pyramidis quadrate ad suu cor
pus circulare in base quadrata / si sint eiusdem altitudinis. Et
p. xxxiiiam. i. Spere & Coni Archimedis. que est q spera cui
cuius basa sit maior circulus spere. & axis sit equalis semidya
metro spere / & est quadrupla suo cono. Igitur dimidiuz spere
est duplum suo cono. Et nos ponimus conu AE. BE. CE. DE.
cui basis. ABCD. est. 8. pro quolibz latere; eius supficies est. 64.
quod mltca cum axe qui est. 4. fit 256. & diuidas p. 3. remaet

Il codice Vat. Urb. 632 è scritto da due mani molto simili in umanistica corsiva.
La mano di Piero interviene per correggere, aggiungere etc e per fare i disegni. Le figure geometriche di mano di Piero sono state disegnate prevalentemente nel margine inferiore dei fogli, più raramente nel margine destro.
Probabilmente molte figure sono state disegnate prima della redazione del testo (forse il copista aveva come modello un altro trattato e ne seguiva l'impaginazione).

La redazione di questo codice si potrebbe far risalire alla fine degli anni Settanta o ai primi anni Ottanta del Quattrocento.

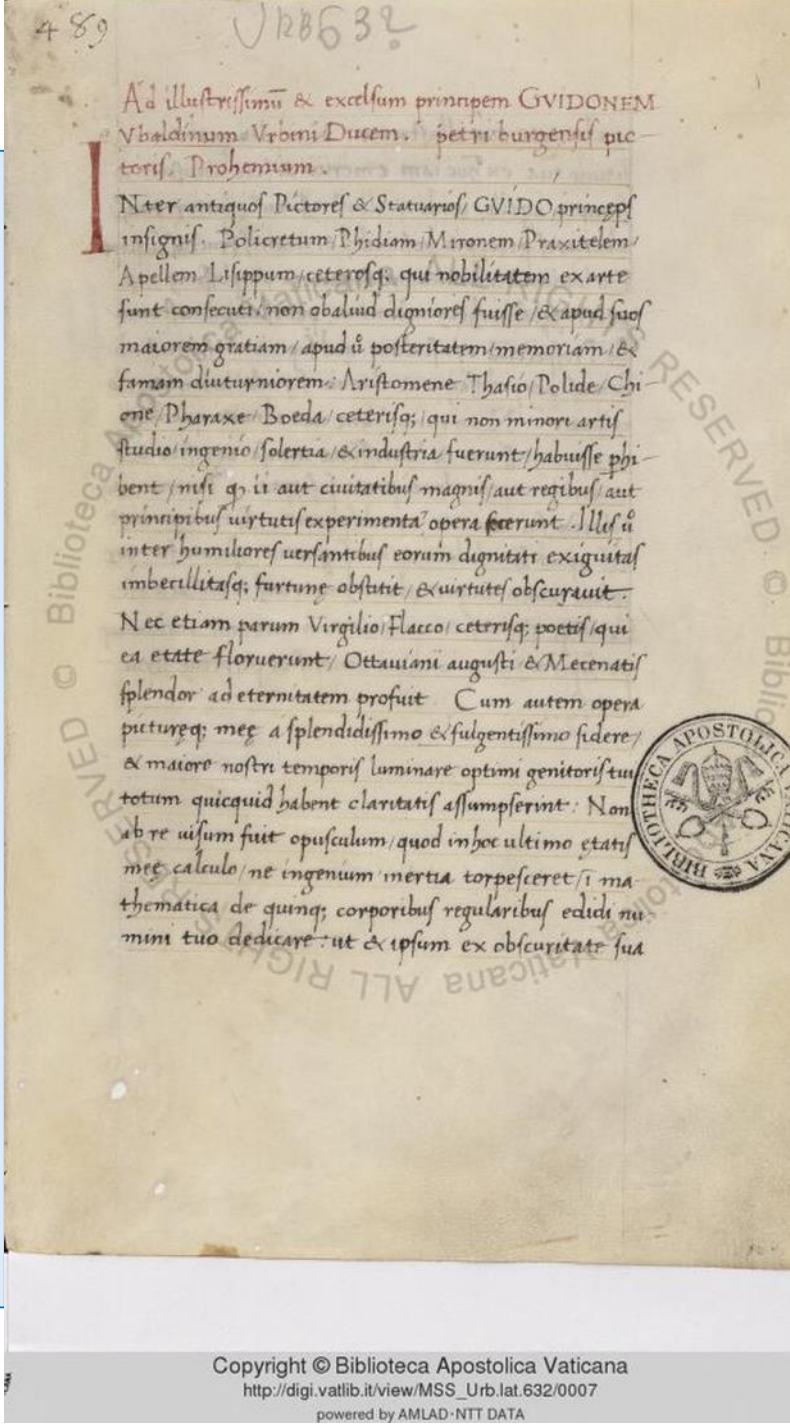
Omaggio di Piero al duca appena insediato, il manoscritto rimase a Urbino finché la biblioteca ducale viene trasferita alla Vaticana nel 1657 al tempo di Alessandro VII (Fabio Chigi).


489 Urb 632
Ad illustrissimu & excelsum principem GVIDONEM Vbaldinum Vrbini Ducem. petri burgensis pictoris. Prohemium.
INter antiquos Pictores & Statuarios GVIDO princeps insignis. Policretum Phidiam Mironem Praxitelem Apellem Lisippum ceterosq. qui nobilitatem ex arte sunt consecuti non obaliud digniores fuisse & apud suos maiorem gratiam apud u posteritatem memoriam & famam diuturniorem. Aristomene Thasio Polide Chione Pharaxe Boeda ceterisq; qui non minori artis studio ingenio solertia & industria fuerunt habuisse phibent nisi q ii aut ciuitatibus magnis aut regibus aut principibus uirtutis experimenta opera fecerunt. Illes u inter humiliores uersantibus eorum dignitati exiguitas imbecillitasq; fortune obstitit & uirtutes obscurauit.
Nec etiam parum Virgilio Flacco ceterisq; poetis qui ea etate floruerunt Ottauiani augusti & Mecenatis splendor ad eternitatem profuit Cum autem opera pictureq; mee a splendidissimo & fulgentissimo sidere & maiore nostri temporis luminare optimi genitoris tui totum quicquid habent claritatis assumpserint. Non ab re uisum fuit opusculum quod in hoc ultimo etatis mee calculo ne ingenium inertia torpesceret in mathematica de quinq; corporibus regularibus edidi numini tuo dedicare ut & ipsum ex obscuritate sua

Codex Vat. Urb. 632 is written by two very similar hands in humanistic cursive.

Piero's hand intervenes to correct, to add and to make the drawings.

The geometric figures in Piero's hand were mainly drawn in the lower margin of the sheets, more rarely in the right margin. Probably many figures were drawn before the text was written (perhaps the copyist had another treatise as a model and followed the layout).
The redaction of this codex could be dated to the late 1570s or early 1580s. A gift from Piero to the Duke, the manuscript remained in Urbino until the ducal library was transferred to the Vatican Library in 1657 at the time of Alexander VII (Fabio Chigi).



Ad illustrissimū & excelsum principem GVIDONEM Vbaldinum Vrbini Ducem. petri burgensis pictoris. Prohemium.

INter antiquos Pictores & Statuarios GVIDO princeps insignis. Policretum Phidiam Mironem Praxitelem Apellem Lisippum ceterosq. qui nobilitatem exarte sunt consecuti non obaliud digniores fuisse & apud suos maiorem gratiam apud ū posteritatem memoriam & famam diuturniorem: Aristomene Thasio Polide Chione Pharaxe Boeda ceterisq; qui non minori artis studio ingenio solertia & industria fuerunt habuisse phibent nisi q̄ ii aut ciuitatibus magnis aut regibus aut principibus uirtutis experimenta opera fecerunt. Illes ū inter humiliores uersantibus eorum dignitati exiguitas imbecillitasq; fortune obstitit & uirtutes obscurauit. Nec etiam parum Virgilio Flacco ceterisq; poetis qui ea etate floruerunt Ottauiani augusti & Mecenatis splendor ad eternitatem profuit. Cum autem opera pictureq; mee a splendidissimo & fulgentissimo sidere & maiore nostri temporis luminare optimi genitoris tui totum quicquid habent claritatis assumpserint: Non ab re uisum fuit opusculum quod in hoc ultimo etatis mee calculo ne ingenium inertia torpesceret i mathematica de quinq; corporibus regularibus edidi numini tuo dedicare: ut & ipsum ex obscuritate sua

Sebbene il *Libellus* sia descritto nella dedicatoria come articolato in tre trattati, in realtà essi sono quattro:

Primo Trattato: 57 problemi di geometria piana riguardanti triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ottagoni regolari e circonferenze;

Secondo Trattato: 36 problemi sui poliedri regolari (del tipo: dato lo spigolo di un poliedro regolare, se ne determinino superficie e volume, oltre che il diametro della sfera circoscritta)

Terzo Trattato: 29 problemi, di cui 17 sui poliedri (del tipo: determinare il lato di un poliedro inscritto in un poliedro di lato noto)

Quarto Trattato: 18 problemi sui poliedri archimedei, ma anche il calcolo del volume e della superficie della volta

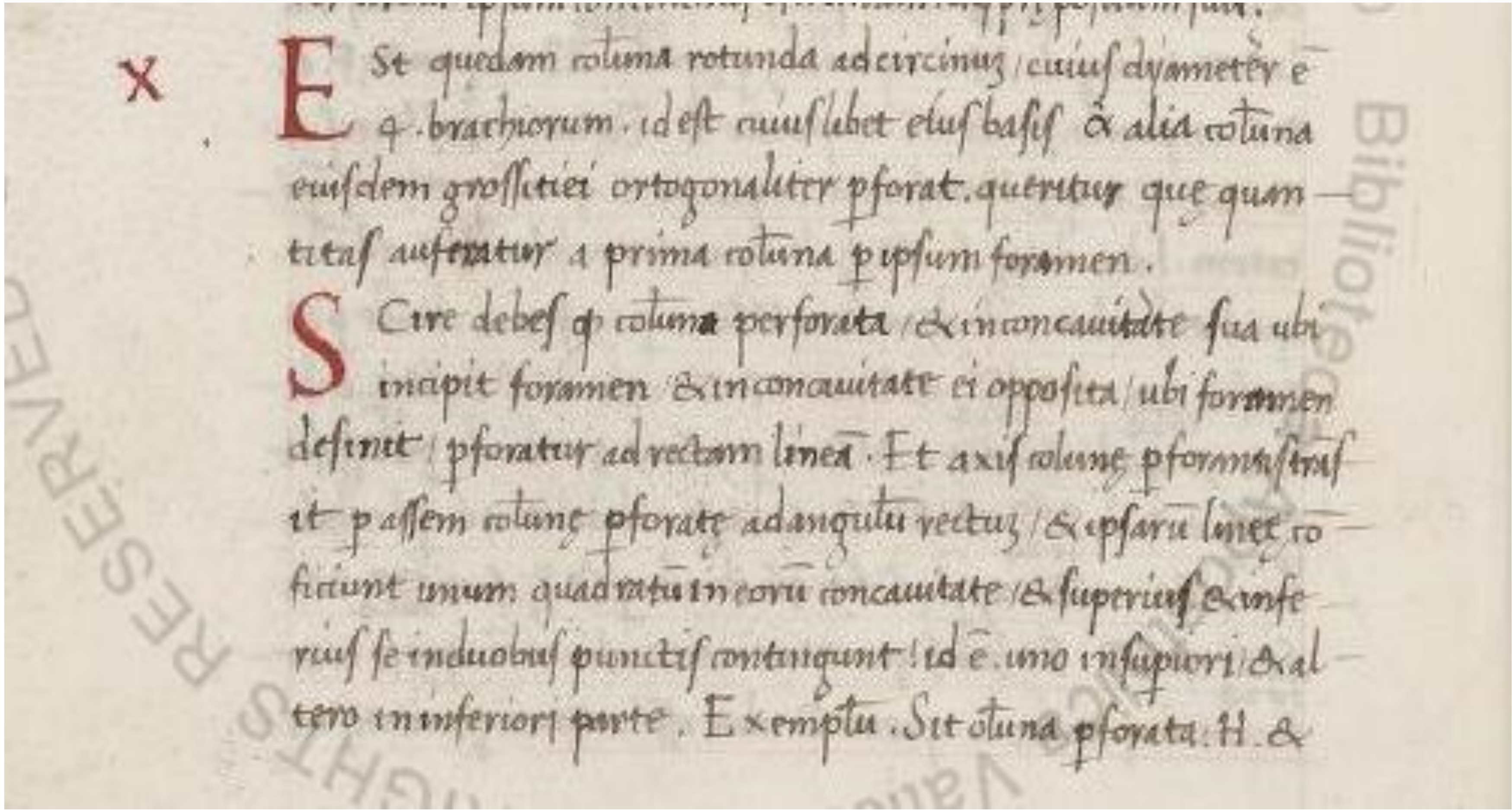
Although the *Libellus* is described in the dedicatory as being divided into three treatises, they are actually four in number:

First Treatise: 57 problems in plane geometry concerning triangles, squares, pentagons, hexagons, regular octagons and circumferences;

Second Treatise: 36 problems on regular polyhedra (of the type: given the edge of a regular polyhedron, let its surface and volume be determined, as well as the diameter of the circumscribed sphere)

Third Treatise: 29 problems, including 17 on polyhedra (of the type: determine the side of a polyhedron inscribed in a polyhedron of known side)

Fourth Treatise: 18 problems on Archimedean polyhedral, but also the determination of the volume and the surface of a (double) vault



Casus X

Est quaedam columna rotunda ad circinum, cuius dyameter est 4 brachiorum, id est cuiuslibet eius basis et alia columna eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. Quaeritur quae quantitas auferatur a prima columna per ipsum foramen.

Scire debes quod columna perforata et in concavitate sua ubi incipit foramen et in concavitate ei opposita ubi foramen desinit perforatur ad rectam lineam, et axis columnae perforantis transit per assem columnae perforatae ad angulum rectum et ipsarum lineae conficiunt unum quadratum in eorum concavitate et superius et inferius se in duobus punctis contingunt, idest uno in superiori et altero in inferiori parte

Luca Pacioli, Archimede e Piero

Come ha osservato Clagett, nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) si possono rintracciare **fonti medievali**, che prediligono un uso applicativo dei risultati archimedei e **fonti rinascimentali** che portano ai tentativi di dimostrazione o di ricostruzione delle dimostrazioni.

Quali sono le opere di Piero che si ritrovano in Pacioli?

- Nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Venezia 1494) Frate Luca pubblica una cinquantina di problemi tratti dal *Trattato d'abaco* di Piero.

- Nell'edizione del 1509 del *De divina proportione*, Luca pubblica l'intero *Libellus de quinque corporibus regularibus* in volgare, come terza parte del suo trattato, dal titolo *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*.

Luca Pacioli, Archimedes and Piero

As Marshall Clagett noted, in Pacioli’s *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) one can trace **medieval sources** that favor an applied use of Archimedean results and **Renaissance sources** that lead to attempts to demonstrate or reconstruct demonstrations.

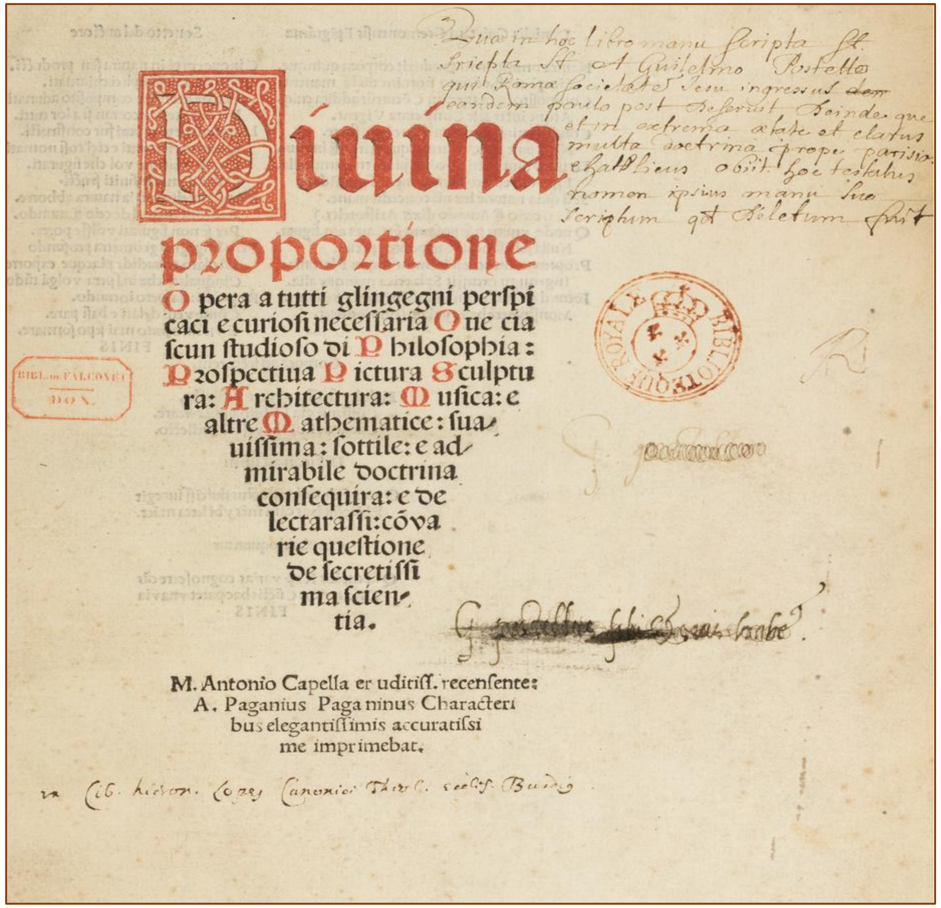
Which of Piero's works are found in Pacioli?

- In the *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* Friar Luke published about fifty problems taken from Piero's *Trattato d’abaco*.
- - In the 1509 edition of *De divina proportione*, Luca published the entire *Libellus de quinque corporibus regularibus* in vernacular, as the third part of his treatise, entitled *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*.

Secondo Margareth Daly Davis, Piero scrisse originariamente il trattato in volgare e lo fece poi tradurre in latino per farne omaggio al Duca. Tuttavia, la versione di Pacioli non è una copia dell'originale volgare di Piero ma una traduzione dalla versione latina al volgare.

Un raffronto linguistico tra i due testi mostra una significativa povertà lessicale del volgare quattrocentesco rispetto al latino umanistico.

Le conclusioni alle quali giungono Gamba e Montebelli sono che Pacioli abbia rivisto il testo latino dal punto di vista matematico ma in modo superficiale e discontinuo, correggendo gli errori più evidenti. Ha anche corretto qualche calcolo errato, ma ne ha introdotti di nuovi.

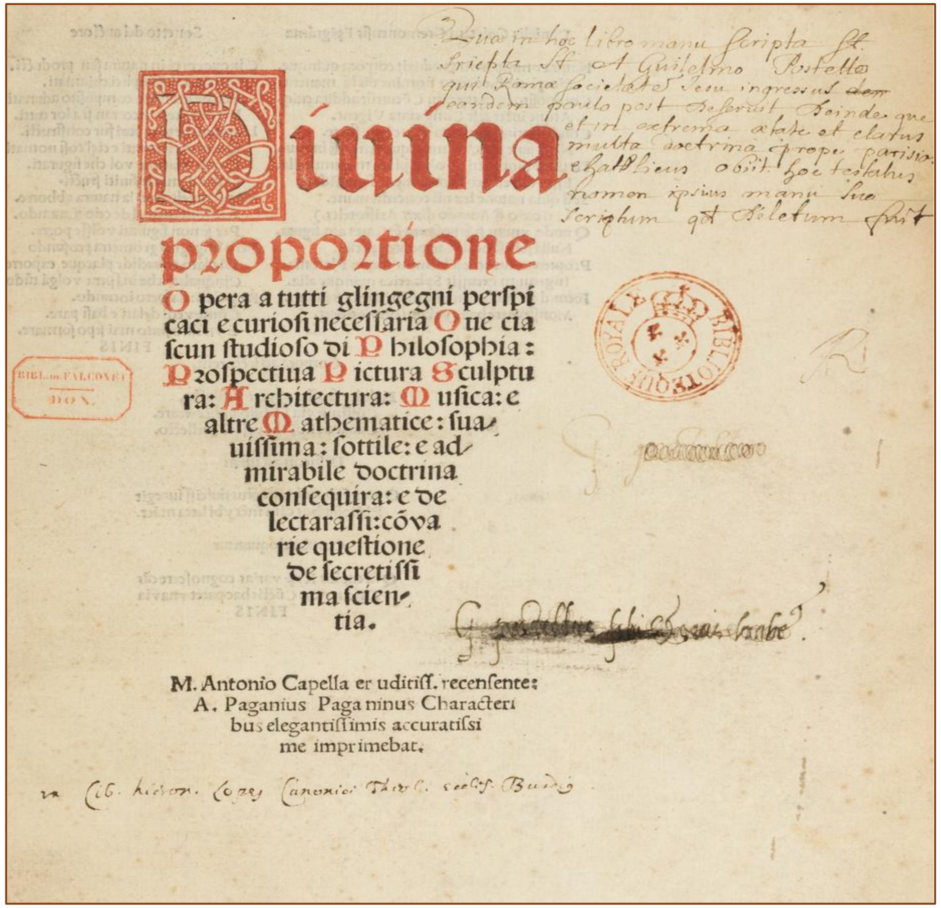

Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi: cō varie questione de secretissima scientia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente:
A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissi me imprimebat.

According to Margareth Daly Davis, Piero originally wrote the treatise in vernacular and then had it translated into Latin as a tribute to the Duke. However, Pacioli's version is not a copy of Piero's vernacular original but a translation from the Latin version to the vernacular.

A linguistic comparison between the two texts shows a significant lexical poverty of the fifteenth-century vernacular compared to humanistic Latin.

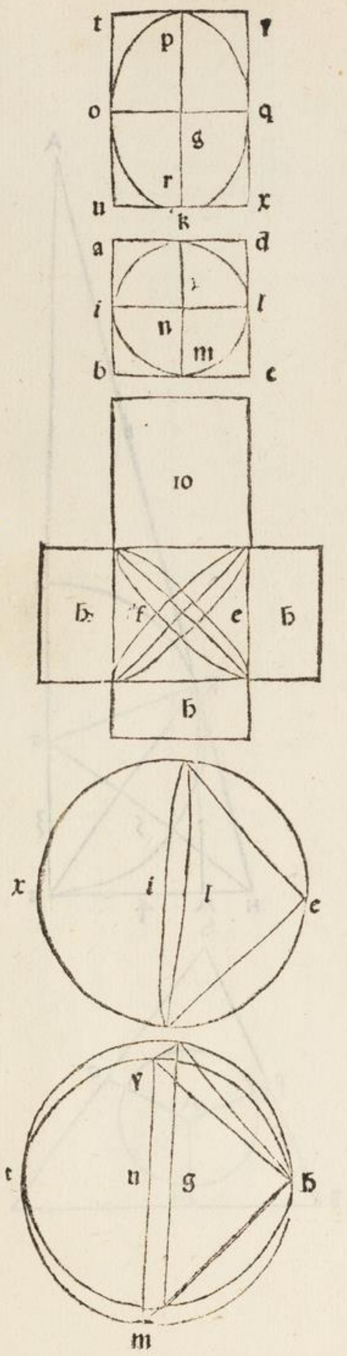
The conclusions Gamba and Montebelli come to, are that Pacioli revised the Latin text mathematically but in a superficial and discontinuous way, correcting the most obvious errors. He also corrected some erroneous calculations but introduced new ones.


Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspi
caci e curiosi necessaria Oue cia
scun studioso di Philosophia:
Prospectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Musica: e
altre Mathematice: suaui
ssima: sottile: e ad
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi: cō va
rie questione
de secretissi
ma scien
tia.
M. Antonio Capella eruditiss. recensente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

Casus ·10·

E glie vna colõna tõda a sesto che il diametro suo e.4. cioe de ciascuna sua basa & vnaltra colõna de simile grosseça la fora hortogonalmente domandase che quantita se leua de la prima colõna per quella foratura cioe che q̃tita se leua de la colõna per quello buso.

¶ Tu ai a sapere che la colõna forata e nel curuo suo doue principia il foro & doue finisci nel curuo oposto he a la linea recta & laxis de la colõna che fora passa per laxis de la forata ad angulo recto & le linee.loro fano vno quadrato nella loro curuita & desopra & de socto se coniungono in doi poncti cioe vno sopra e laltro socto. Exemplo sia la colõna forata.h. & la colõna che la fora.g. & il foro sia.a.b.c.d. & ipuncti de cõtacti de la loro curuita sia.e.f.del quale foro se cerca la sua quantita. Esse dicto che ciascuna colõna e.4.per groseçça adunqua il quadrato.a.b.c.d.e.4.per lato il quale lato multiplica in se fa.16. &.e.f.e pure.4.ch̃ la grosseçça dela colõna ch̃ multiplicato cõ la sup̃ficie dela basa che e.16.fa.64.il quale parti p.3.neuene.$21\frac{1}{3}$. & questo redoppia fa.$42\frac{2}{3}$. &.42.e.$\frac{2}{3}$.se leua dela colõna.h. p lo dicto foro. la proua tu sai che le dicte colõne nel foro fano vno quadrato che e.a.b.c.d. pero fa vna superficie quadrata de simile grandeçça che sia pure.a.b.c.d. nella quale fa vno circulo che sia.i.k.l.m. & il centro suo sia.n.da poi fa vna altra superficie che li doi lati oposti sia ciascũo eq̃le ala diagonale.a.c.del foro dela colõna & glialtri doi lati ciascuno eq̃le.a.b.il quale sia.t.u.x.y. nel q̃le descriui vno circulo pportionato tocando ciascuno lato de tale quadrato in puncti.o.p.q.r. & il centro suo sia.s.dico essere quella proportione dal quadrato.a.b.c.d.al quadrato.t.u.x.y.che e dal circulo.i.k.l.m.al circulo.o.p.q.r. & quella pportione e dal tondo.i.k.l.m.al quadrato suo.a.b.c.d. che e dal tondo.o.p.q.r.al quadrato suo.t.u.x.y. cõmo p la.5. del terço de archimede de conoidalibus hora diuidi il quadrato.a.b.c.d per equali con la linea.k m poi tira.k.l.m.l.farasse il triangulo.k.l.m. & diuidi per equali il q̃drato.t.u.x.y.con la linea.p.r.poi linea.p.q.q.r.fasse il triãgulo.p.q.r.dico quella pportione e dal triangulo.k.l.m.al triangulo.p.q.r.quale e dal q̃drato.a.b.c.d.al quadrato.t.u.x.y. & quella che e dal triangulo.k.l.m.al suo quadrato.a.b.c.d.quella e dal triangulo.p.q.r.al suo quadrato.t.u.x.y. Et desopra fu dicto che tale pportione era dal tondo.i.k.l.m.ala superficie.a.b.c.d.quale era dal circulo.o.p.q.r.ala superficie.t.u.x.y.adunqua seguita p comuna scientia che tale proportione sia dal triangulo.k.l.m.al suo circulo.i.k.l.m.quale e dal triangulo.p.q.r.al suo circulo.o.r.p.q. Et questo inteso faremo le figure corporee la prima fia la spera segnata.e.k.m.f.el suo axis e.f. & laltra che in torno al quadrato.t.u.x.y.sono doi circuli vno e.t.r.x.s. e laltro.y.r.u.s.che se intersegano in pũcto.r. & in puncto.s.nelle quali figure corporee faro in ciascuna vna piramide nella spera.e.k.m.f.linearo.k.m.circulare poi traro.k.e.e.m.che fia.k.e.m.piramide sula basa tonda.k.l.m.i.poi faro laltra piramide nel laltra figura corporea che sira.t.r.y.r.x.r.r.r.le quali piramide sono in pportione fra loro si cõmo sono le loro matrice cioe le figure corporee nelle quali sono fabricate cõmo se mostro desopra ne le superficie piane cõmo il circulo.t.r.x.s.e equale al circulo.o.p.q.r.dela superficie.t.u.x.y. & i lati de la piramide.t.r.r.x.sono equali a doi lati del triangulo.p.q.r.cioe.p.q.q.r. &.k.e.m.lati de la piramide dela spera.cioe.k.e. e.m.sono equali a doi lati del triangulo.k.l.m.del circulo.i.k.l.m.cioe.k.l. l.m.adunqua concludeno essere quella pportione dela piramide.t.r.y.r.x.r.u.r.al suo corpo.t.r.u.s.che e dala piramide.k.e.m.ch̃ la sua basa.i.k.l.m.circulare al suo corpo sperico.k.e.m.f.adunqua per la.33.del primo de spera & cono de archimede doue dici ogne spera esere q̃drupla al suo cono del quale la basa e eq̃le al magior circulo dessa spera & laxis equale al semidiametro adunqua piglia la basa.t.u.x.y.che e.4.per lato multiplica in se fa.16.li quali multiplica per lo suo axis ch̃ e.2.fa.32.e questo p̃ti per.3.neuene $10\frac{2}{3}$. & il corpo suo.t.r.x.s.e.4.tanti pero multiplica.$10\frac{2}{3}$.per.4.fa.$42\frac{2}{3}$.cõmo fu dicto desopra & ai che se leua de la colona.h.per q̃llo foro.42.e.$\frac{2}{3}$.

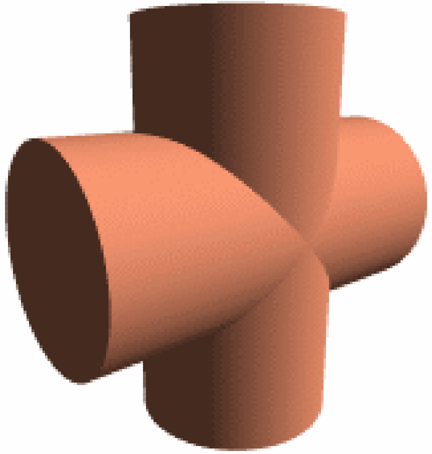


Caſus ·10·

Eglie vna colõna tõda a ſeſto che il diametro ſuo e.4. cioe de ciaſcuna ſua baſa ⁊ vnaltra colõna, de ſimile groſſeçça la fora hortogonalmente domandaſe che quantita ſe leua de la prima colõna per quella foratura cioe che q̃tita ſe leua de la colõna per quello buſo.

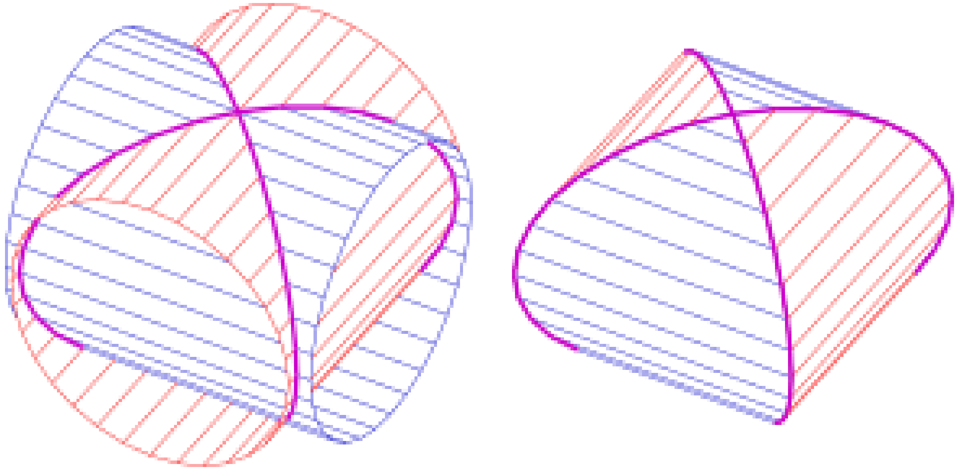
¶ Tu ai a ſapere che la colõna forata e nel curuo ſuo doue principia il foro ⁊ doue finiſci nel curuo opoſto he a la linea recta ⁊ laxis de la colõna che fora paſſa per laxis de la forata ad angulo recto ⁊ le linee.loro fano vno quadrato nella loro curuita ⁊ deſopra ⁊ de ſocto ſe coniungono in doi poncti cioe vno ſopra e laltro ſocto. Exemplo ſia la colõna forata.b. ⁊ la colõna che la fora.g. ⁊ il foro ſia.a.b.c.d. ⁊ i puncti de cõtacti de la loro curuita ſia.e.f. del quale foro ſe cerca la ſua quantita. Eſſe dicto che ciaſcuna colõna e.4. per groſeçça adunqua il quadrato.a.b.c.d.e.4. per lato il quale lato multiplica in ſe fa.16. ⁊.e.f.e pure.4.c h̃ la groſſeçça dela colõna c h̃ multiplicato cõ la ſuꝑficie dela baſa che e.16. fa.64. il quale parti ꝑ.3. ne uene.$21\frac{1}{3}$. ⁊ queſto redoppia fa.$42\frac{2}{3}$. ⁊.42.e.$\frac{2}{3}$. ſe leua dela colõna.b. ꝑ lo dicto foro. la proua tu ſai che le dicte colõne nel foro fano vno quadrato che e.a.b.c.d. pero fa vna ſuperficie quadrata de ſimile grandeçça che ſia pure.a.b.c.d. nella quale fa vno circulo che ſia.i.k.l.m. ⁊ il centro ſuo ſia.n. da poi fa vna altra ſuperficie che li doi lati opoſti ſia ciaſcũo eq̃le ala diagonale.a.c. del fo https://en.wikipedia.org/wiki/Steinmetz_solid

Casus 10.
Egli è una **colonna tonda** a sesto che il diametro suo è 4 cioè de ciascuna sua basa et un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogonalmente. Domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso.



Porch of the courtyard of the Palazzo Ducale of Urbino

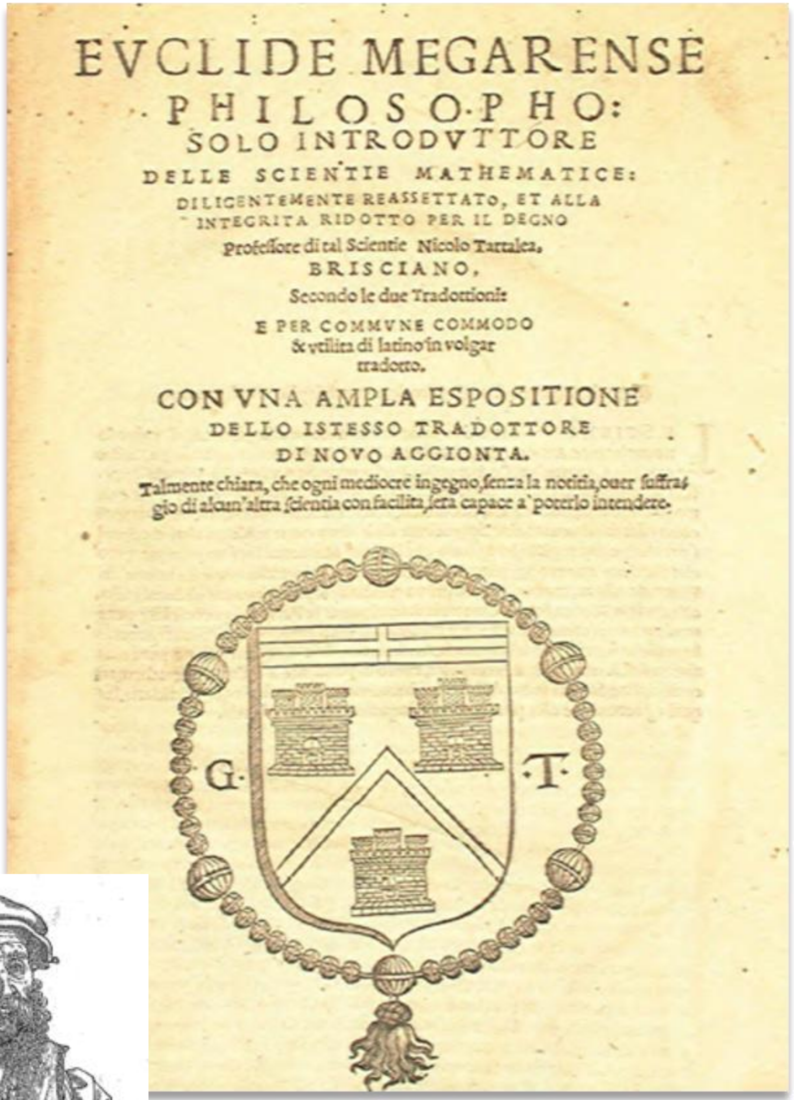
There is a certain **cylinder** whose diameter is 4 brachia – the diameter of each of its bases – and another cylinder of the same size pierces it orthogonally. We seek the quantity that is removed from the first cylinder by means of this hole.



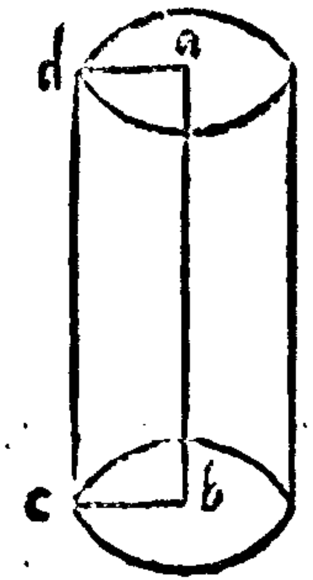
About the definition of «colonna tonda»

Niccolò Tartaglia was the author of the vernacular edition of Euclid's *Elements* (1543), the most representative symbol of Greek mathematics, translated into the language spoken by practitioners.

Tartaglia was faced with translation problems and also tries to solve them by thinking to the daily practice of artisans


EVCLIDE MEGARENSE
PHILOSOPHO:
SOLO INTRODVTTORE
DELLE SCIENTIE MATHEMATICE:
DILIGENTEMENTE REASSETTATO, ET ALLA
INTEGRITA RIDOTTO PER IL DEGNO
Professore di tal Scientie Nicolo Tartalea,
BRISCIANO,
Secondo le due Tradottioni:
E PER COMMVNE COMMODO
& vtilita di latino in volgar
tradotto.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
DELLO ISTESSO TRADOTTORE
DI NOVO AGGIONTA.
Talmente chiara, che ogni mediocre ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia con facilita, sera capace a poterlo intendere.

What is it?



From Tartaglia's *Euclid*

Questa figura columnale (diffinita di sopra secondo che se contiene in la prima tradottione [Campano n.d.r]) *in la seconda tradottione* [Zamberti n.d.r] *se chiama cylindro però bisogna notare che tanto vol dire uno cylindro quanto una colonna rotonda & similmente da Archimede è pur detta cylindro vocabol greco*

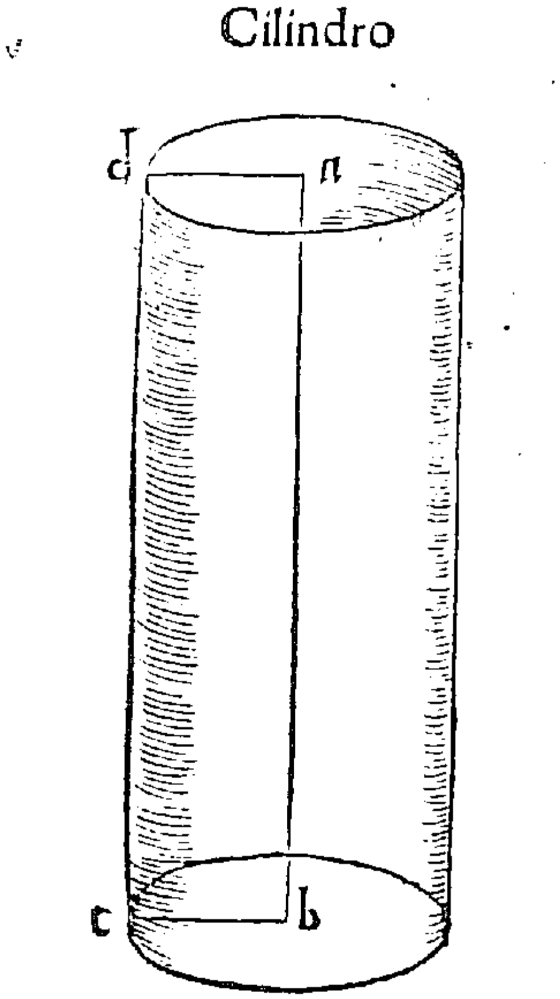
A *round column* (colonna rotonda, Campanus)
or a *cylinder* (cilindro, Zamberti) ?

Tartaglia’s choice is based on the stonecutter’s practice to obtain a round column.

The method is quite similar to that one described for obtaining a perfect stone ball: building of an iron rectangular profile that, turning, gives the shape of the column … as the Euclidean definition prescribes.

But… in the practice the profile is not a real rectangle, because it has a bulge because of optical corrections (*accioche tal colonna habbia, come è detto, un puoco di panzetta, la qual panzetta fa molto vistosa tal colonna*)

So…

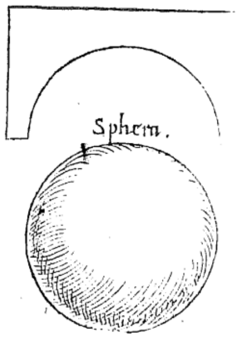


… the right name can’t be *colonna rotonda* but rather *cilindro*…

because the Euclidean definition does not pertain to the practical building of a column and certainly the term does not come from Euclid, but it has been added by Campanus or someone else

pero quel nome di colonna rotonda tengo che non sia di Euclide, ma che sia stato aggiunto dal Campano, over da qualche altro.

What is a sphere?



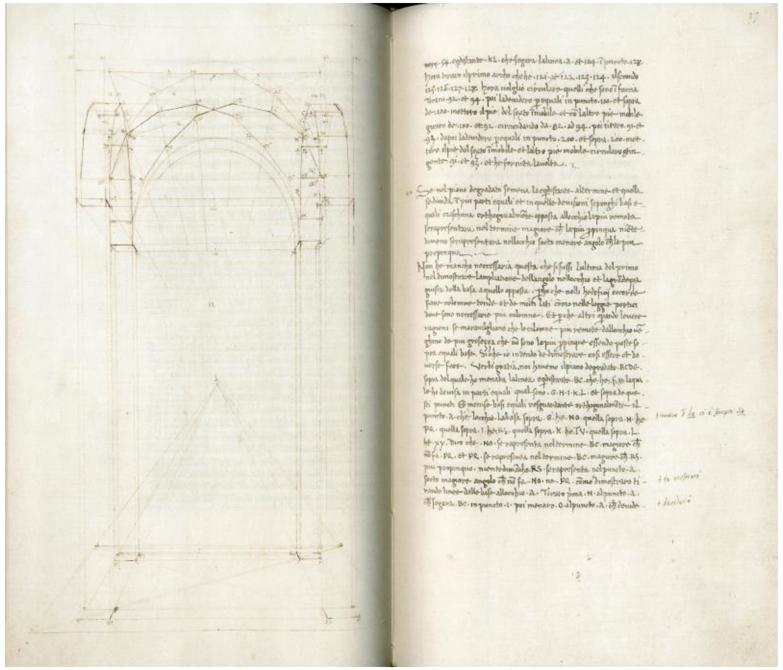
When a semicircle with fixed diameter is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a *sphere* (Def.XI.10 Tartaglia, Def. XI.14 Heiberg)

This definition has explained to the artisans how to obtain a perfect stone ball…the artisan builds a iron (or wood) semicircular shaped profile and then he chisels all around the mass of stone following the shape and using a charcoal to indicate the stone to remove

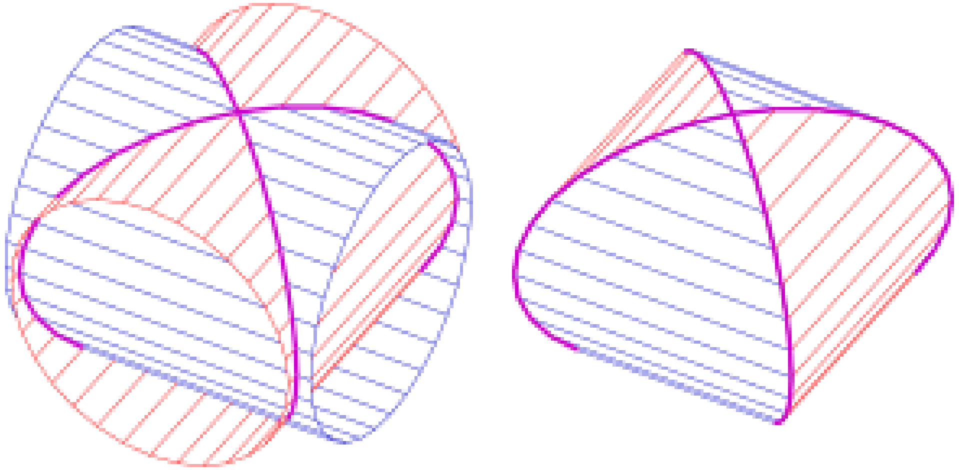
5 LA sfera (come diffiniſſe Euclide nella 10 diffinitione del ſuo 11 libro) è il tranſito del arco della circonferenza del mezo cerchio, circondutto per fino a tãto, che ritorni al luogo doue diede principio a circonuolgerſi (ſtante il diametro fermo, & fiſſo.)

Queſta diffinitione ha inſegnato alli artefici il modo di formare vna balla rotonda di pietra, o altra materia, & che queſto ſia il vero, quando che vn taia pietra vuol far vna balla rotondiſſima di pietra, lui forma prima vn mezo cerchio vacuo in qualche banda di ferro, ouer di legno, ouer di altra materia, grande, ouer piccolo ſecondo la qualita della balla, ouer balle, che vuol fare, poi va ſcarpellando attorno la pietra ſecondo l'ordine del detto mezo giuſtãdo ſpeſſo il detto mezo cer

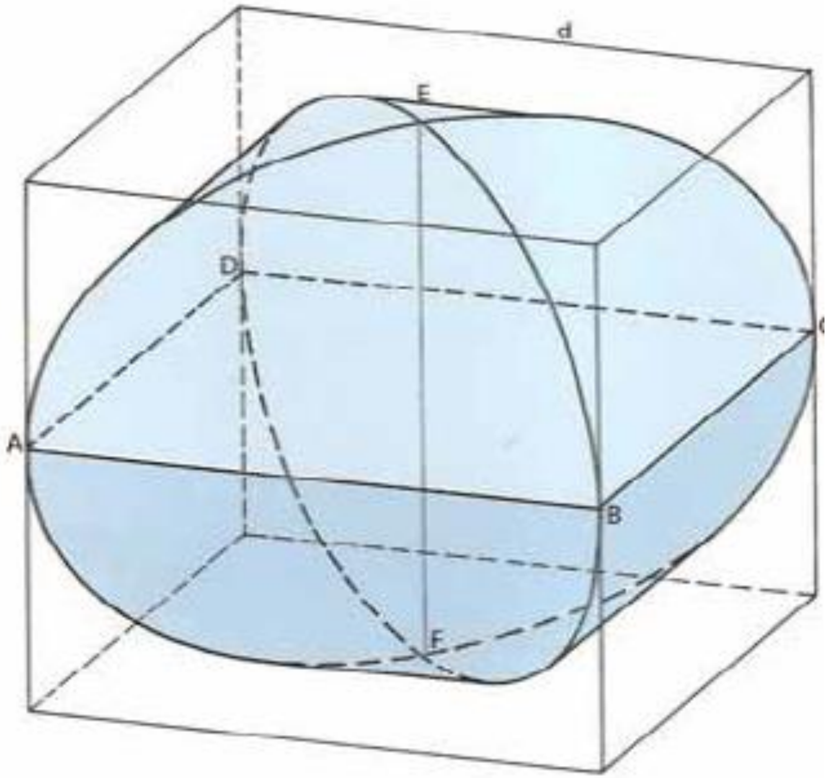
Tu ài a sapere che la colonna forata, e nel curvo suo dove principia il foro et dove finisci nel curvo oposto he [forata] a la linea recta et l'axis de la colonna che fora passa per l'axis de la forata ad angulo recto et le linee loro fano uno quadrato nella loro curvità, et de sopra et de socto se coniungono in doi poncti cioe uno sopra e l'altro socto



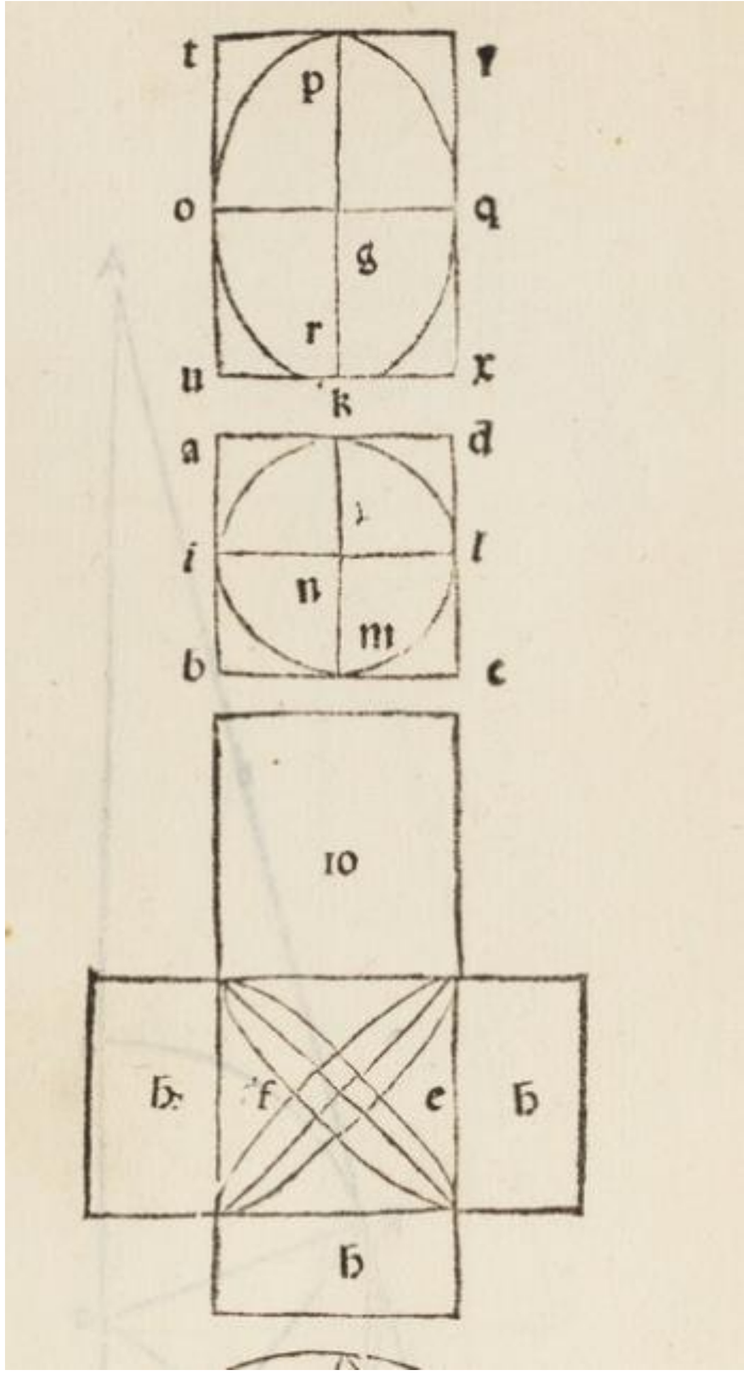
You ought to know that the perforated cylinder is perforated in a straight line both at the beginning and the end of the cavity, that is, where the hole *[in the middle horizontal plane of the common segment]* begins and ends *[or, to put it another way, the common segment of the cylinders begins and ends in its middle horizontal plane with a straight line only]* and the axis of the piercing cylinder at right angles in their cavity *[i.e. in their common segment]* and the lines of these *[cylinders parallel to, and in the plane of, the intersecting axes]* form a square *[and, in fact, the intersecting lines in all the planes above and below and parallel with the plane of the axes form squares except]* at the top and the bottom *[where single lines only intersect]* and *[there]* they touch each other in two points *[only]* one at the top and one at the bottom.

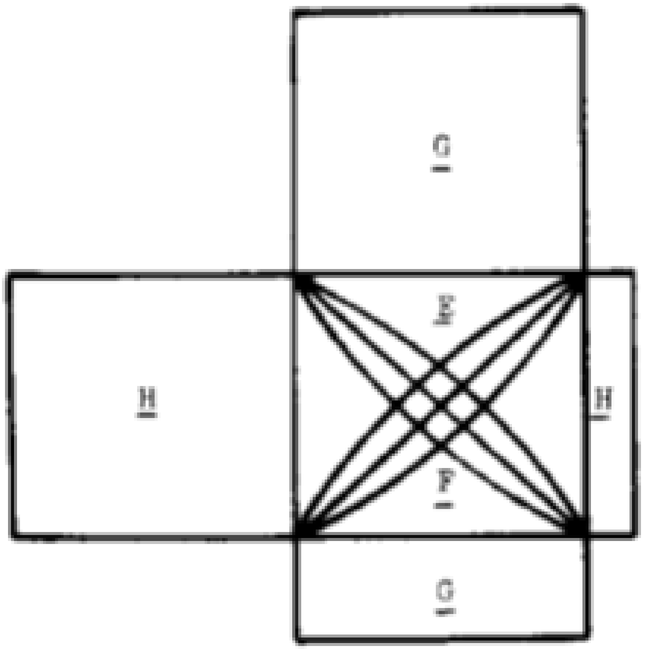


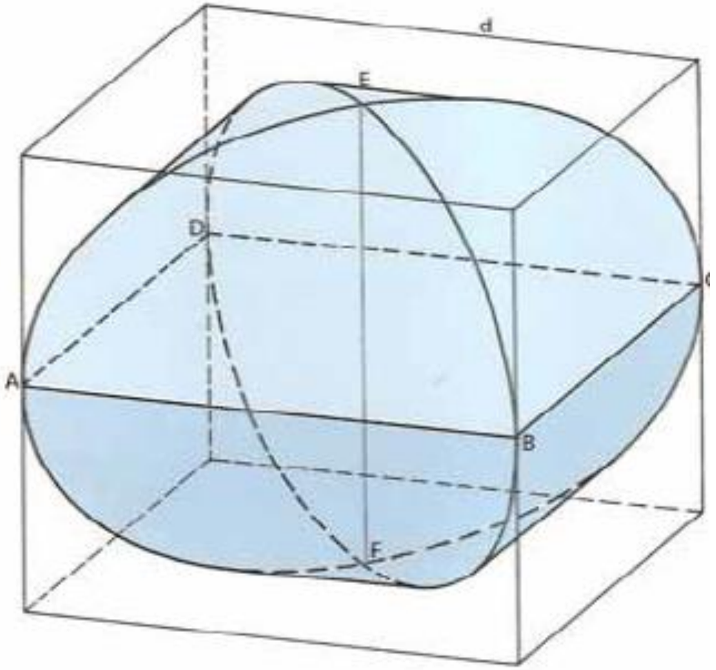
Exemplo: sia la colonna forata H et la colonna che la fora G et il foro sia ABCD et i puncti de contacti de la loro curvità sia E, F del quale foro se cerca la sua quantità. Esse dicto che ciascuna colonna è 4 per grossezza adunqua il quadrato ABCD è 4 per lato, il quale lato multiplica in sé fa 16 et EF è pure 4 ch'è la grossezza de la colonna, che multiplicato con la superficie de la basa che è 16 fa 64, il quale parti per 3 ne vene 21 1⁄3 et questo redoppia fa 42 2⁄3 et 42 e 2⁄3 se leva de la colonna H per lo dicto foro.



$$V = \frac{2}{3} d^3$$



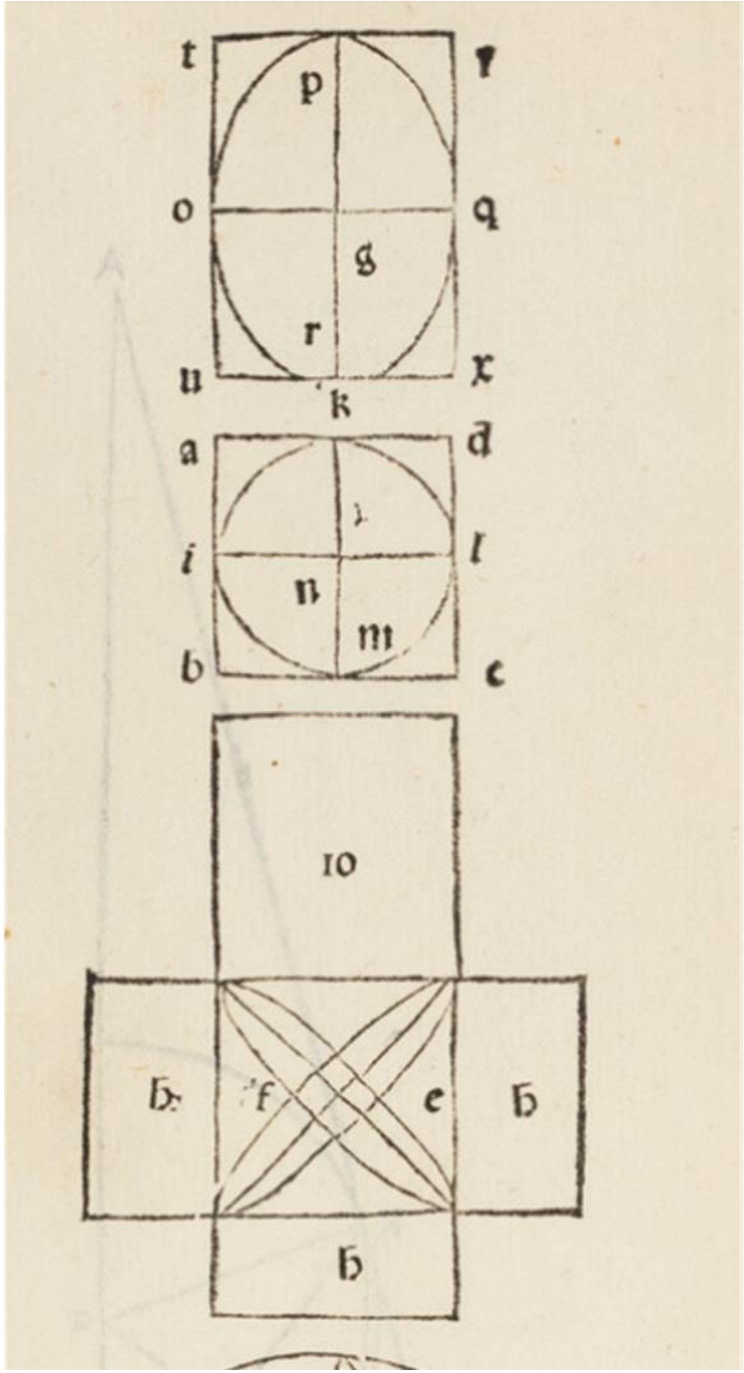


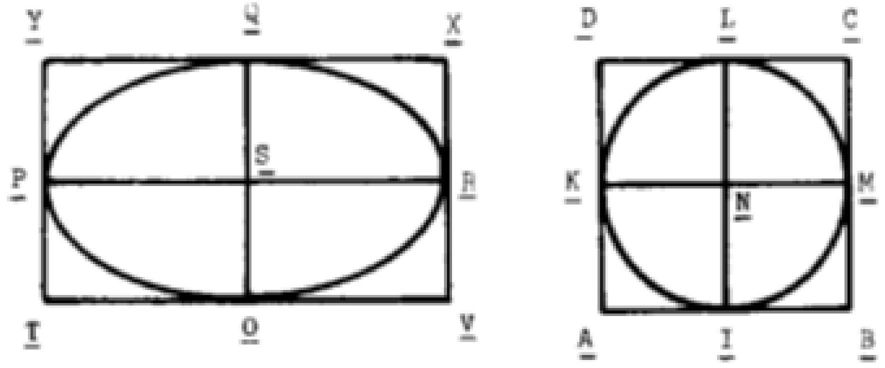


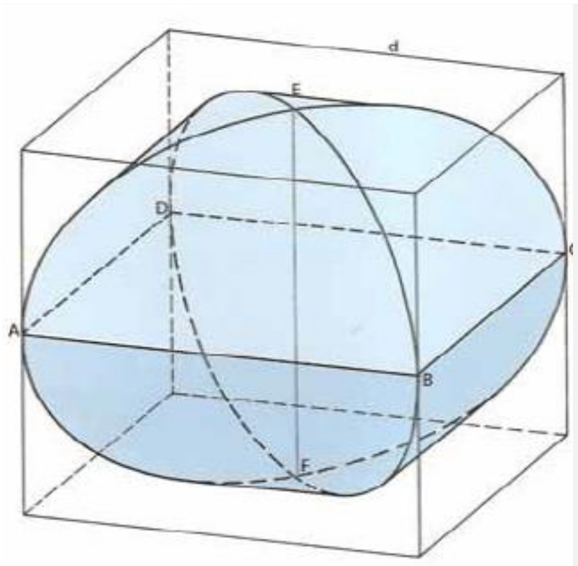
$$V = \frac{2}{3}d^3$$

Example. Let the pierced cylinder be H and the piercing cylinder be G and let the hole *[i.e., the middle horizontal element of the common segment of the intersecting cylinders]* be ABCD, and let *[the upper and the lower]* touching points in their cavity *[i.e. in their common segment]* be E and F and we seek the volume of the hole *[i.e. of the common segment of the intersecting cylinders*]. We have said that the width *[i.e. the diameter]* of each cylinder was 4 brachia. Therefore, the square ABCD, is 4 brachia on each side. These sides multiplied together make 16 and EF, which is the width (i.e. the diameter) of a cylinder, is 4, and when multiplied by the surface of the base, i.e. by 16, makes 64. This you divide by 3 and 21 1/3 is the result. This doubled becomes 42 2/3 and so much is removed from cylinder H as the result *[of the formation of the]* said hole, i.e. 42/2/3.

La prova: tu sai che le dicte colonne nel foro fano uno quadrato che è ABCD però fa′ una superficie quadrata de simile grandezza che sia pure ABCD nella quale fa′ uno circulo che sia IKLM et il centro suo sia N. Dapoi fa′ una altra superficie che li doi lati oposti sia ciascuno equale a la diagonale AC del foro de la colonna et gli altri doi lati ciascuno equale AB il quale sia TVXY, nel quale descrivi uno circulo proportionato tocando ciascuno lato de tale quadrato in puncti O, P, Q, R et il centro suo sia S. Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede *De conoidalibus.*







This is proved as follows. You know that the said cylinders make a square in the hole, which square is ABCD. Therefore, you may draw a square hole of the same size which we let be ABCD and in it you inscribe circle IKLM with center N. Then you draw another [rectangular] surface TVXY, each of whose opposite sides is equal to the diagonal AC of the said hole, while each of the other two sides is equal to AB. In this you describe a proportional circle [i.e. an ellipse] tangent to each side of the said rectangle in points O, P, Q and R. Let its center be S. I say that the ratio of square ABCD to rectangle TVXY is as circle IKLM to ellipse OPQR, and the ratio of circle IKLM is to its square ABCD as ellipse OPQR is to its rectangle TVXY as is demonstrated by the fifth [proposition] of the **third** of Archimedes, On Conoids.

Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede *De conoidalibus*.

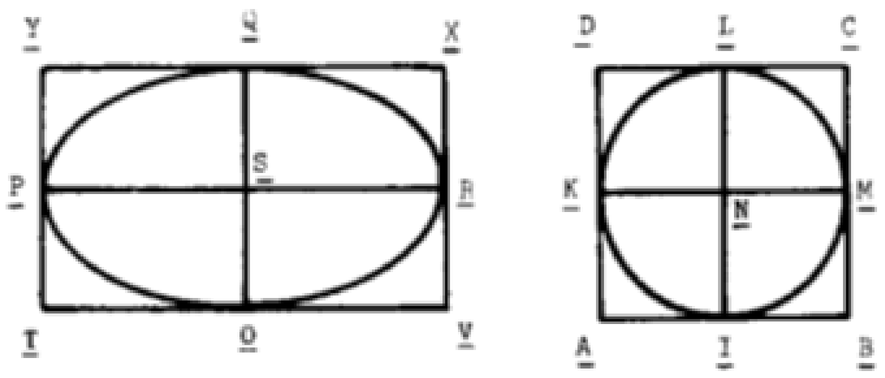
In realtà i *Conoidi e Sferoidi* archimedei sono compresi in un solo libro. Il «terzo» si può riferire alla posizione che *De conoidibus et sphaeroidibus* occupa nella successione dei testi del Vat. Urb. Lat. 261 dove al f. 51 v è riportata come prop.5 "Quodlibet spatium a koni acuti anguli sectione comprehensum ad quemcumque circulum comparetur, eam habet proportionem quam superficies ex utrisque eius sectionis diametris producta habere percipitur ad quadratum [diametri] eius circuli ad quem fuerit comparatum»

If AA', BB' be the major and minor axis of an ellipse respectively, and if d be the diameter of any circle, then

Heath, *The works of Archimedes*

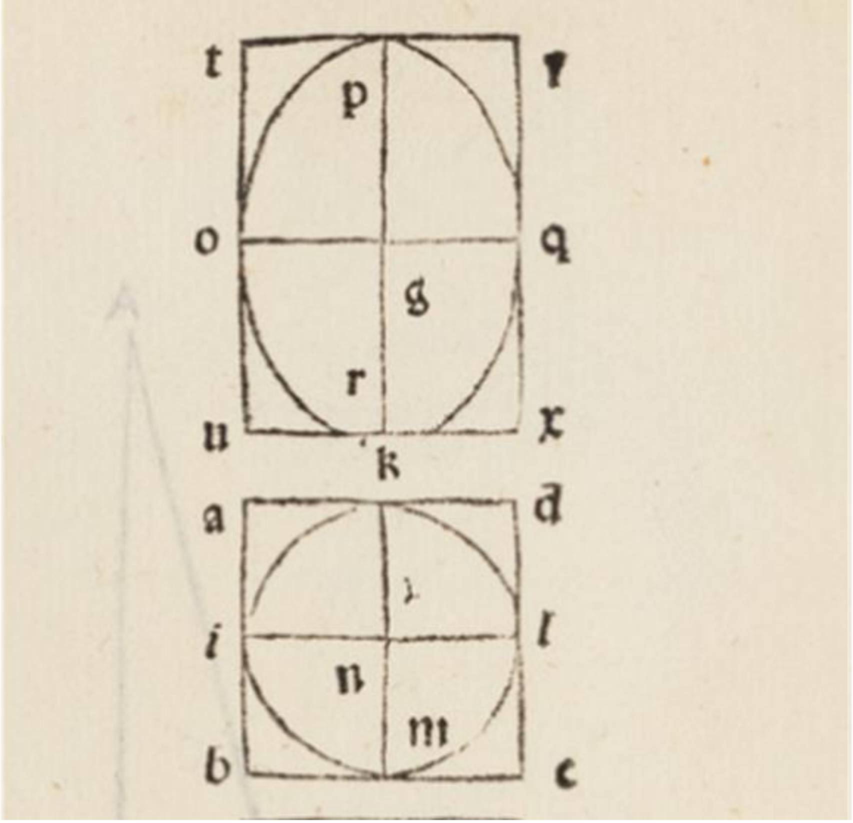
$$(\text{area of ellipse}) : (\text{area of circle}) = AA' \times BB' : d^2$$

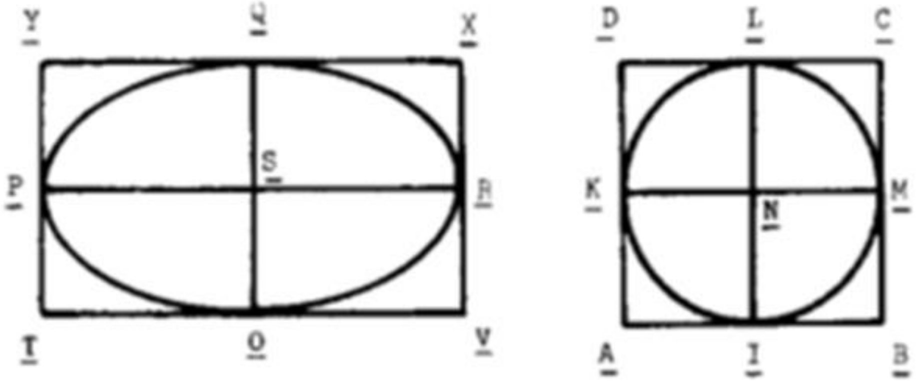
Area (ABCD) : Area (TVXY) = Area (cerchio) : Area (ellisse)



Area (ABCD) : Area (TVXY) = Area (circle) : Area (ellipse)

Hora dividi il quadrato ABCD per equali con la linea KM, poi tira KL, ML farasse il triangulo KLM et devidi per equali il quadrato TVXY con la linea PR, poi la linea PQ, QR fasse il triangulo PQR. Dico quella proportione è dal triangulo KLM al triangulo PQR quale è dal quadrato ABCD al quadrato TVXY et quella che è dal triangulo KLM al suo quadrato ABCD quella è dal triangulo PQR al suo quadrato TVXY. Et de sopra fu dicto che tale proportione era dal tondo IKLM a la superficie ABCD quale era dal circulo OPQR a la superficie TVXY, adunque seguita per comuna scientia che tale proportione sia dal triangulo KLM al suo circulo IKLM, quale è dal triangulo PQR al suo circulo ORPQ.





Now you divide square ABCD into equal parts by line KM. Then you draw lines KL and LM and △KLM will be formed; and you divide rectangle TVXY into equal parts by line PR. Then you draw lines PQ and QR, forming △PQR. I say that

$$\triangle KLM \,/\, \triangle PQR = \text{square } ABCD \,/\, \text{rect } TVXY$$

And

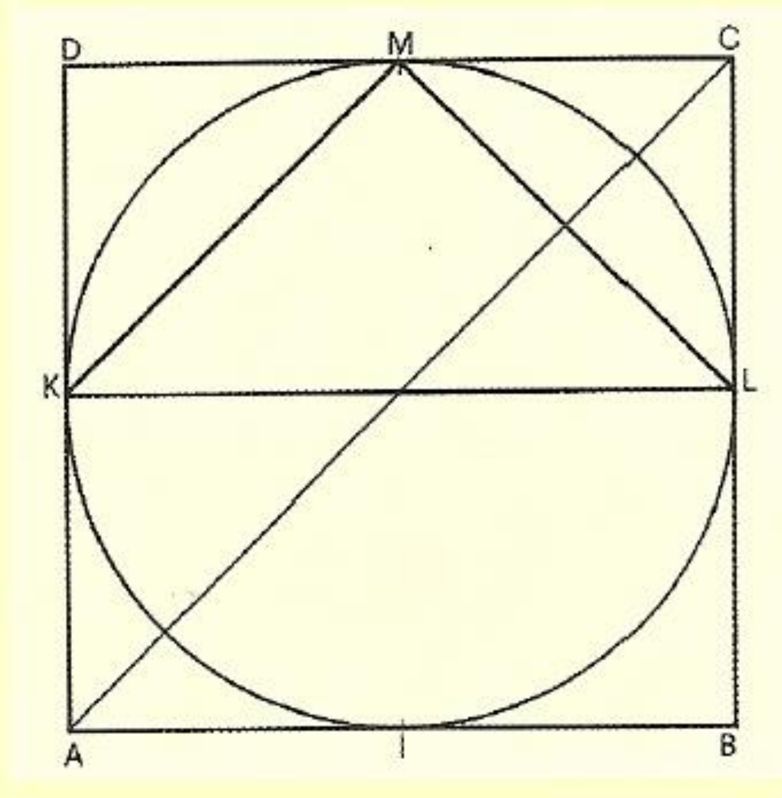
$$\triangle KLM \,/\, \text{square } ABCD = \triangle PQR \,/\, \text{rect } TVXY$$

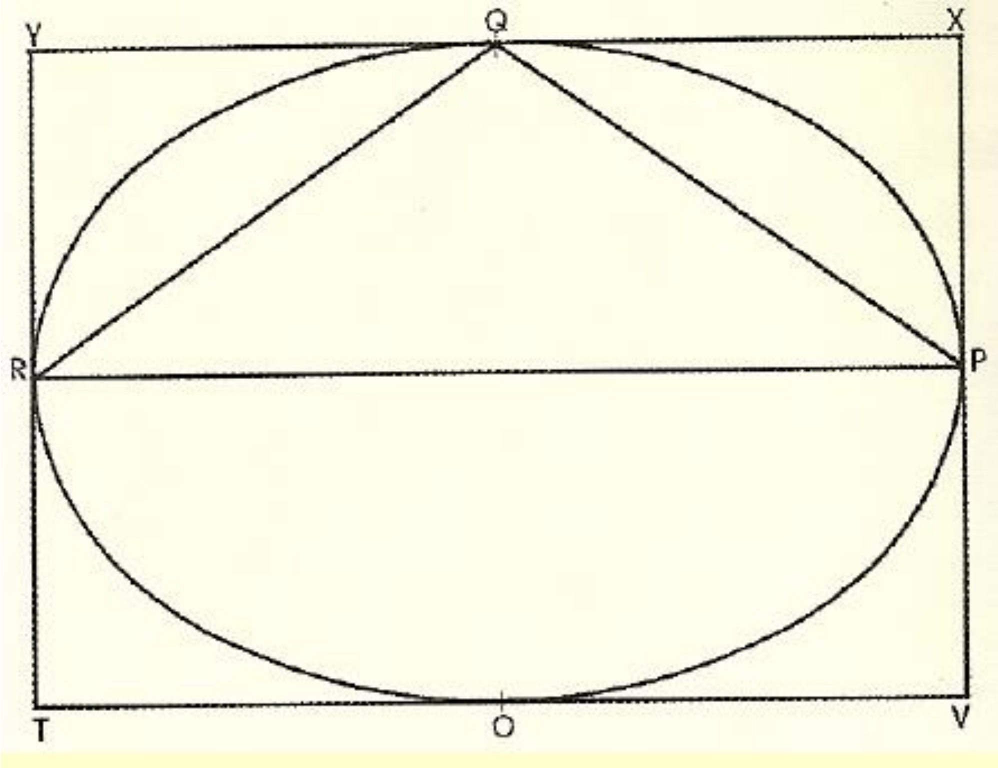
And it was said above that

$$\text{Circle } IKLM \,/\, \text{square } ABCD = \text{ellipse } OPQR \,/\, \text{rect. } TVXY$$

And so it follows from common knowledge *[viz. The axiom: quantities equal to the same quantity are equal to each other]* that

$$\triangle KLM \,/\, \text{circle } IKLM = \triangle PQR \,/\, \text{ellipse } OPQR$$





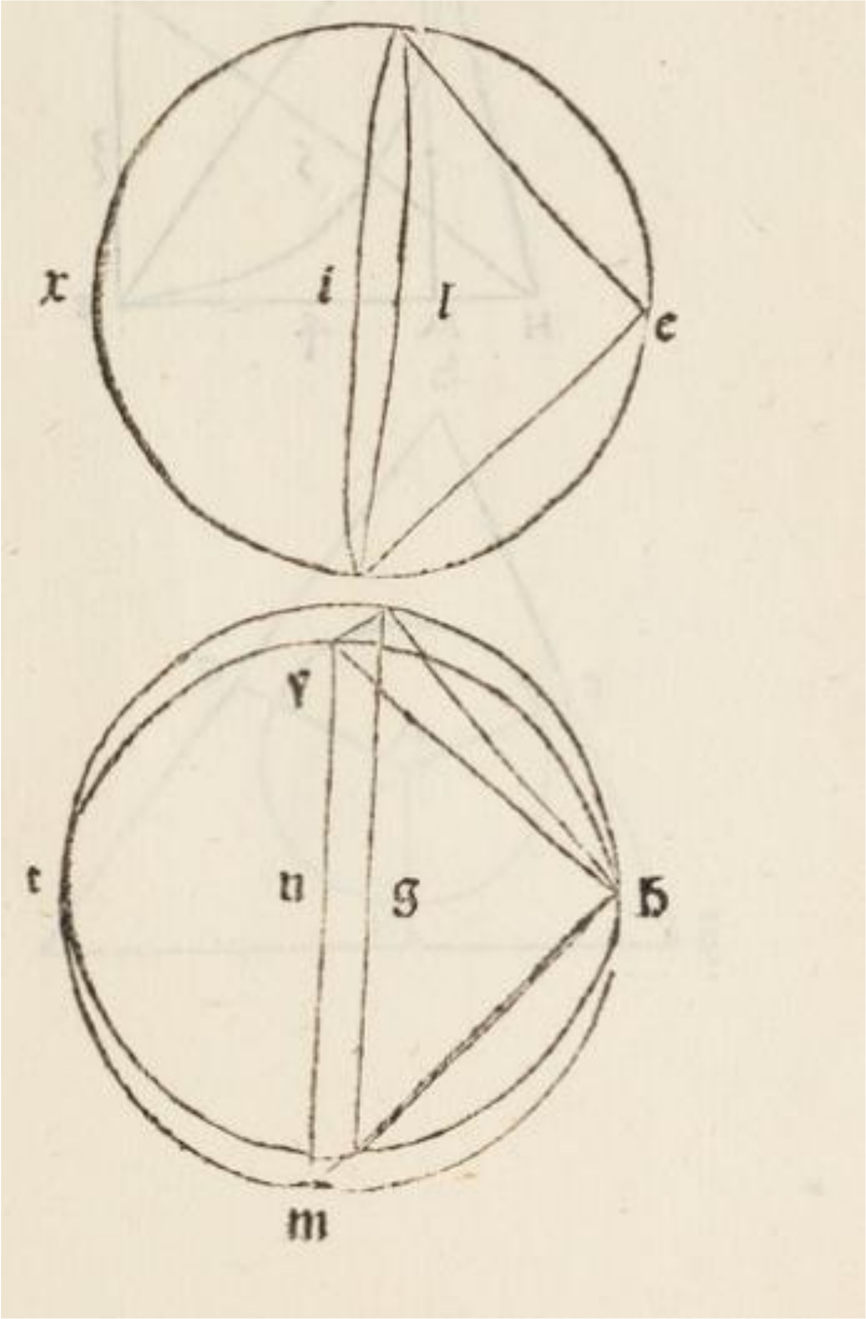
Area (KLM) : Area (PQR) = Area (ABCD) : Area (TVXY)

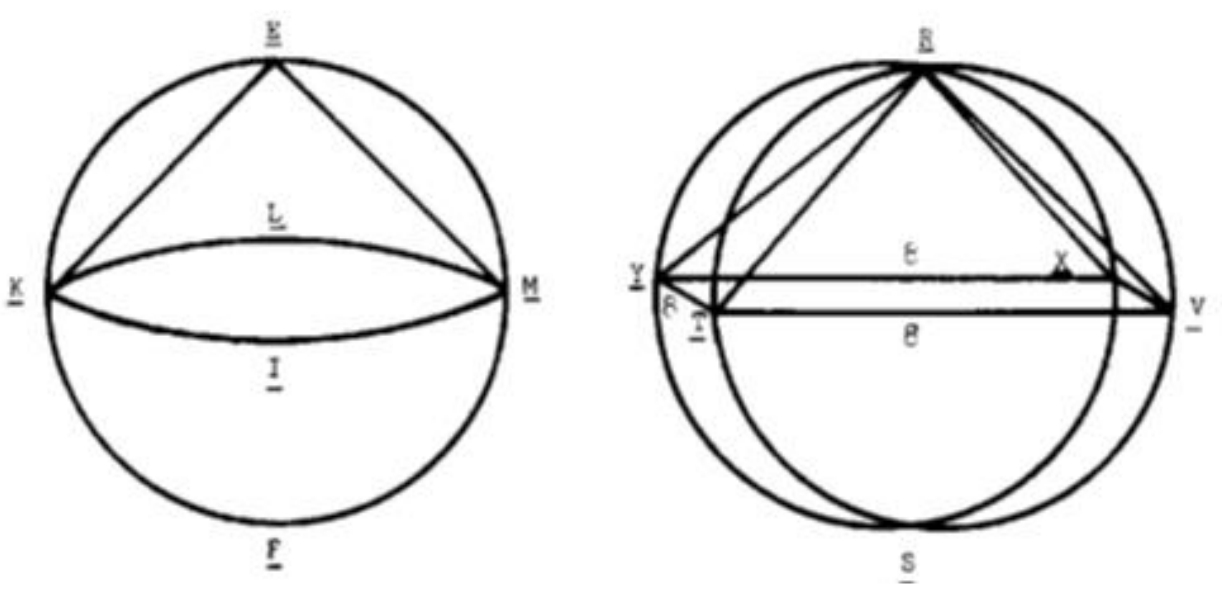
Area (ABCD) : Area (TVXY) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

Area (KLM) : Area (PQR) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

Et questo inteso faremo le figure corporee, la prima fia la spera segnata EKMF e'l suo axis EF et l'altra, ch'è intorno al quadrato TVXY, sono doi circuli uno è TRXS e l'altro YRVS che se intersegano in puncto R et in puncto S [R=E, S=F]

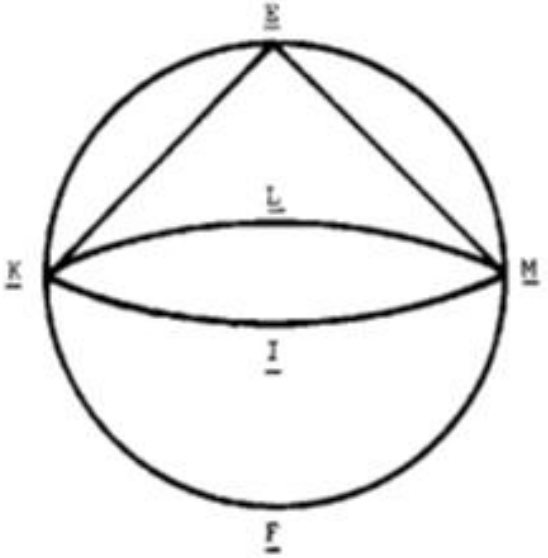
Nelle quali figure corporee farò in ciascuna una piramide, nella spera EKMF linearò KM circulare, poi trarò KE, EM che fia KEM piramide su la basa tonda KLMI. Poi farò l'altra piramide nell'altra figura corporea che sirà TR, YR, XR, VR le quali piramide sono in proportione fra loro sì commo sono le loro matri, cioè le figure corporee nelle quali sono fabricate, commo se mostrò de sopra ne le superficie piane, commo il circulo TRXS è equale al circulo OPQR de la superficie TVXY et i lati de la piramide TR, RX sono equali a doi lati del triangulo PQR, cioè PQ, QR et KEM lati de la piramide de la spera e cioè KE EM, sono equali a doi lati del triangulo KLM del circulo IKLM cioè KL, LM.

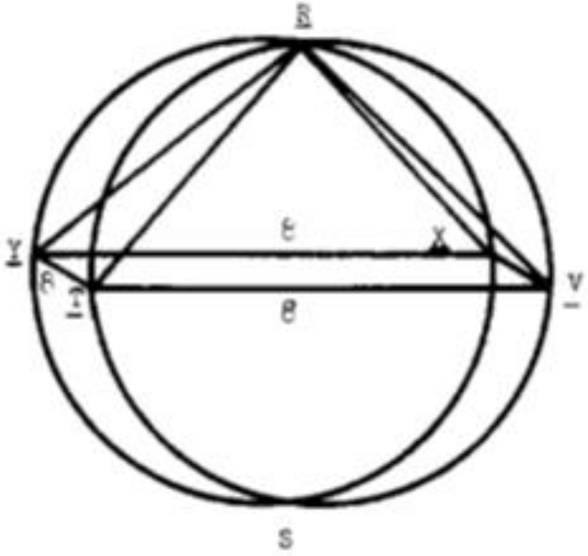




And with this understood, let us make solid figures. The first will be spherical and designated EKMF with axis EF and the other which encloses square TVXY by means of two ellipses. One is TRXS and the other is YRVS and they intersect each other in point R and in point S. In each of these two *[solid]* figures I shall produce a pyramid. In the sphere EKMF I shall delineate EM circularly. Then I shall draw lines KE and EM and produce pyramid KLMI on the round base *[i.e. I shall produce cone KLMI].* Then I shall produce another pyramid in the other corporeal figure, which will be TR, YR, XR, VR. These pyramids [i.e. cone and the pyramis] are in the same ratio as their parents, i.e. as the corporeal figures in which they are constructed, as is demostrated above in the plane figures, since circle TRXS is equal to circle OPQR in surface TVXY and the sides of the pyramid TR, RX are equal [respectively] to the two sides of △PQR, i.e. PQ and QR. And the sides KE and EM of the cone in the sphere are equal [respectively] to the sides KL and LM of △KLM of circle IKLM.

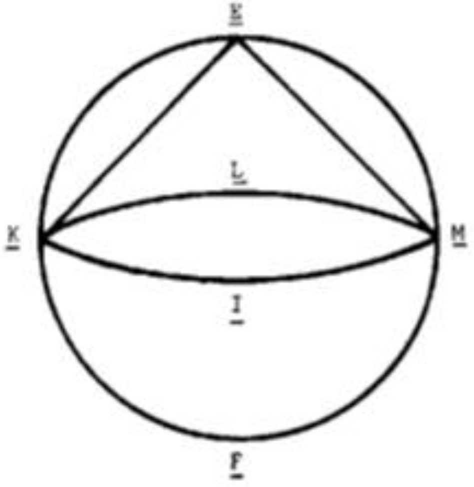
Adunqua concludeno essere quella proportione de la piramide TR, YR, XR, VR al suo corpo TRXS , che è la piramide KEM ch'è la sua basa IKLM circulare, al suo corpo sperico KEMF. **Adunqua per la 33 del primo *De spera et cono* de Archimede** dove dici ogni spera esere quadrupla al suo cono del quale la basa è equale al magior circulo d'essa spera et l'axis equale al semidiametro, adunque piglia la basa TVXY che è 4 per lato, multiplica in sé fa 16, li quali multiplica per lo suo axis ch'è 2 fa 32 e questo parti per 3 ne vene 10 2⁄3 et il corpo suo TRXS è 4 tanti, però multiplica 10 2⁄3 per 4 fa 42 2⁄3, commo fu dicto de sopra et ài che se leva de la colona H per quello foro 42 e 2⁄3.

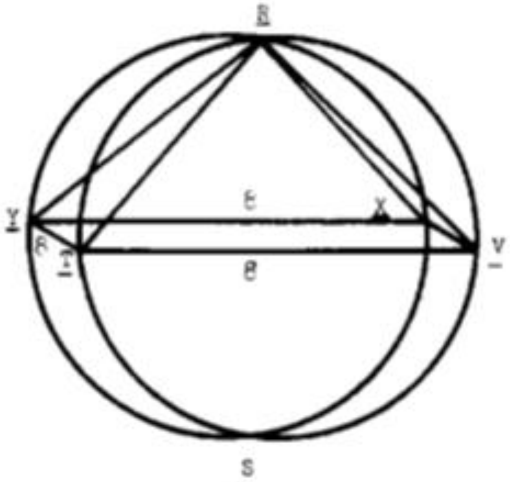


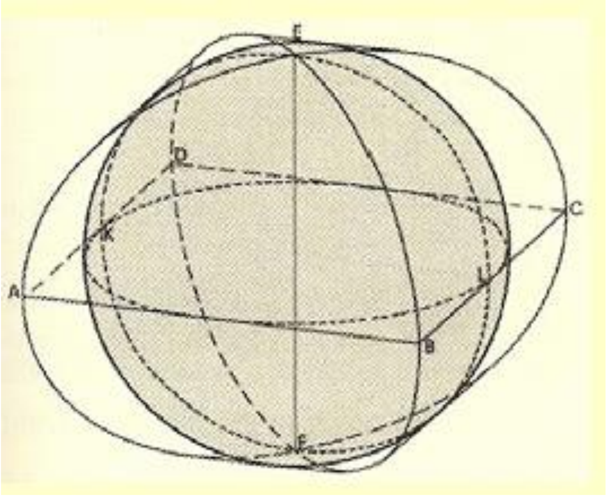


Quaelibet spera quadrupla est eius coni qui quidem conus basem habuerit aequalem circulo in spera maximo, altitudinem vero equalem semidiametro sperae (**I.33** *De sphaera et cylindro*, Vat. Urb. Lat. 261, f.23v (Archimede ed. Heiberg **I.34**, ed. Venatorius **I.32**)

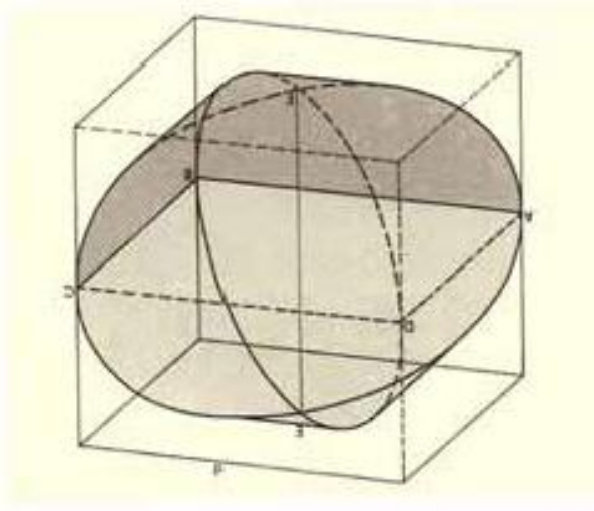
Let us conclude then that the ratio of the pyramid TR, YR, XR, VR to its *[parent]* solid TRXS *[i.e. to the common segment of the two cylinders]* is as the ratio of cone KEM whose base circle is IKLM to its *[parent]* spherical solid KEMF. Therefore by I.33 of *On the Sphere and the Cone* (!) of Archimedes, where he says that any sphere is quadruple the cone whose base is equal to a greater circle of the sphere and whose axis is equal to the radius *[of the sphere]*, sphere KEMF is quadruple cone KEM and thus the parent solid TRXS *[which is the common segment of the two cylinders]* is quadruple pyramid TR, YR, XR, VR. And so you take the base TVXY which is 4 brachia on each side; multiply the sides together and the result is 16.This you multiply by the axis which is 2 and the result is 32. This you divide by 3 and 10 2/3 is the result *[as the volume of the pyramid]*. Its *[parent]* solid TRXS *[i.e. the common segment of the cylinders]* is 4 times as great. Therefore, mutiply 10 2/3 by 4 and the result is 42 2/3 as was said before. And thus you have what is removed from cylinder H by that hole [*namely*] 42 2/3 brachia.



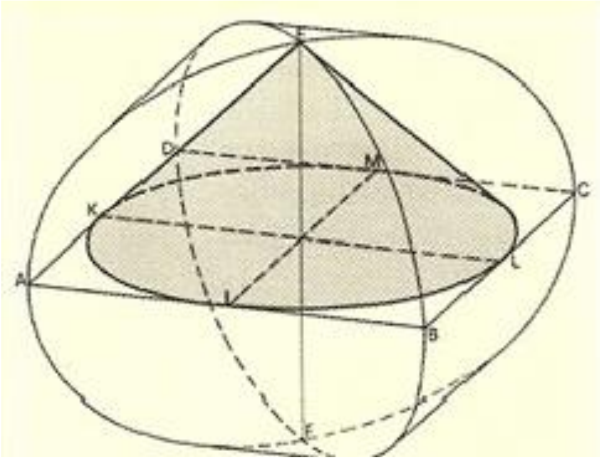




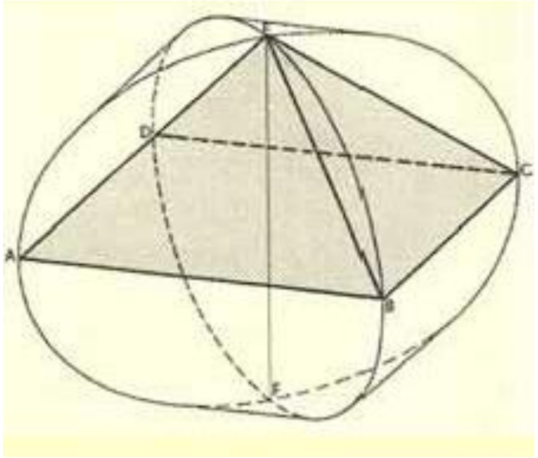
The sphere corresponds to the circle



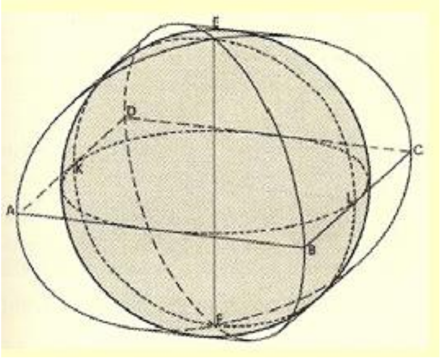
The intersection corresponds to the ellipse



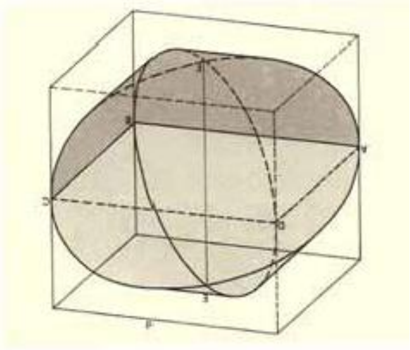
To the triangle inscribed in the square corresponds the cone



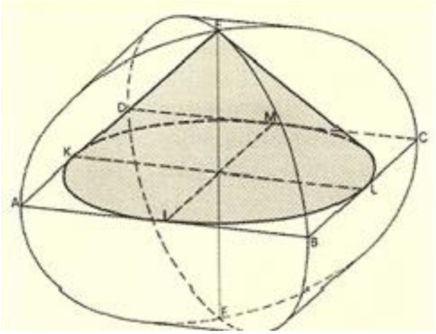
To the triangle inscribed in the ellipse corresponds the pyramid



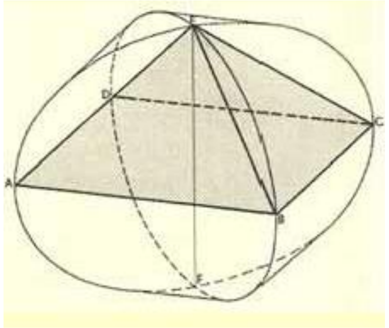
The sphere corresponds to the circle



The intersection corresponds to the ellipse



To the triangle inscribed in the square KLM corresponds the cone



To the triangle inscribed in the ellipse PQR corresponds the pyramid

Area (KLM) : Area (PQR) = Area (cerchio) : Area (ellisse)

Area (PQR) : Area (ellisse) = Area (KLM) : Area (cerchio)

Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Sfera e cilindro I. 33 (ed. Piero della Francesca, I.34 ed. Heiberg):
la sfera è 4 volte il cono che ha per base il cerchio maggiore e per altezza il raggio

La doppia volta è 4 volte la piramide, che ha come base il quadrato di lato pari al diametro dei cilindri e altezza pari al raggio

Il volume della piramide è dunque

$$\frac{1}{3}d^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{6}d^3$$

E il volume della doppia volta

$$\mathbf{4 \cdot \frac{1}{6}d^3 = \frac{2}{3}d^3}$$

Volume (pyramid) : volume (double vault) = volume (cone) : volume (sphere)

On the Sphere and Cylinder I. 33:
the sphere is 4 times the cone whose base is the greater circle and whose height is the radius

The double vault is 4 times the pyramid, which has as its base the square of side equal to the diameter of the cylinders and height equal to the radius

The volume of the pyramid is therefore

$$\frac{1}{3}d^2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{6}d^3$$

And the volume of the double vault

$$4 \cdot \frac{1}{6}d^3 = \frac{2}{3}d^3$$

Area (PQR) : Area (ellisse) = Area (KLM) : Area (cerchio)

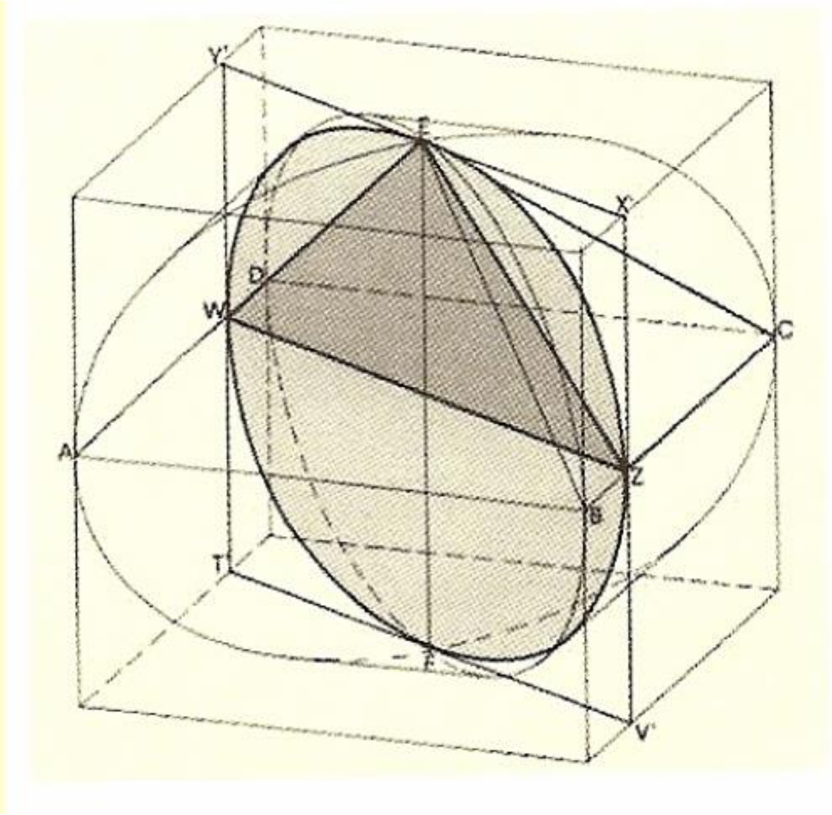
Volume (piramide) : volume (doppia volta) = volume (cono) : volume (sfera)

Piero non dà una spiegazione di questo passaggio. E′ possibile ricostruirlo?

Enrico Gamba e Vico Montebelli hanno avanzato una congettura.

Piero does not give an explanation of this passage. Is it possible to reconstruct it?

Enrico Gamba and Vico Montebelli have advanced a conjecture.

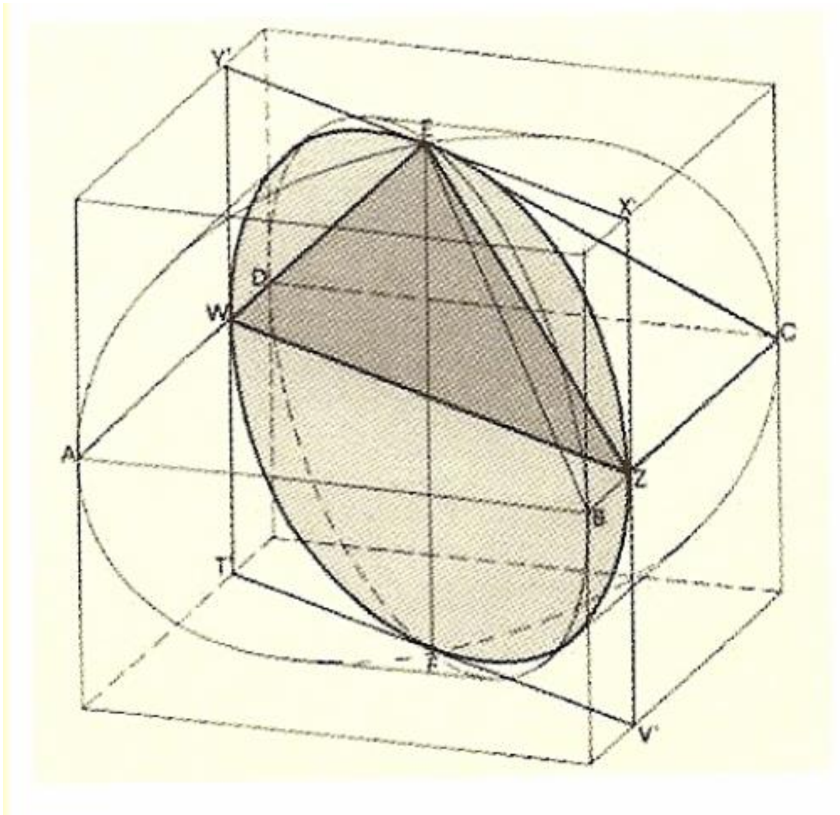


Consideriamo un piano del fascio di asse EF. Al variare di questo piano, la regione delimitata dall'ellisse genera la doppia volta.

Questo piano seziona la volta secondo un ellisse di asse minore EF e di asse maggiore variabile. Gli estremi W e Z dell'asse scorrono lungo il perimetro del quadrato ABCD

Il piano seziona anche il cubo secondo il rettangolo T'V'X'Y', che è circoscritto all'ellisse.

Il piano seziona anche la piramide di vertice E e base ABCD secondo il triangolo EWZ inscritto nell'ellisse

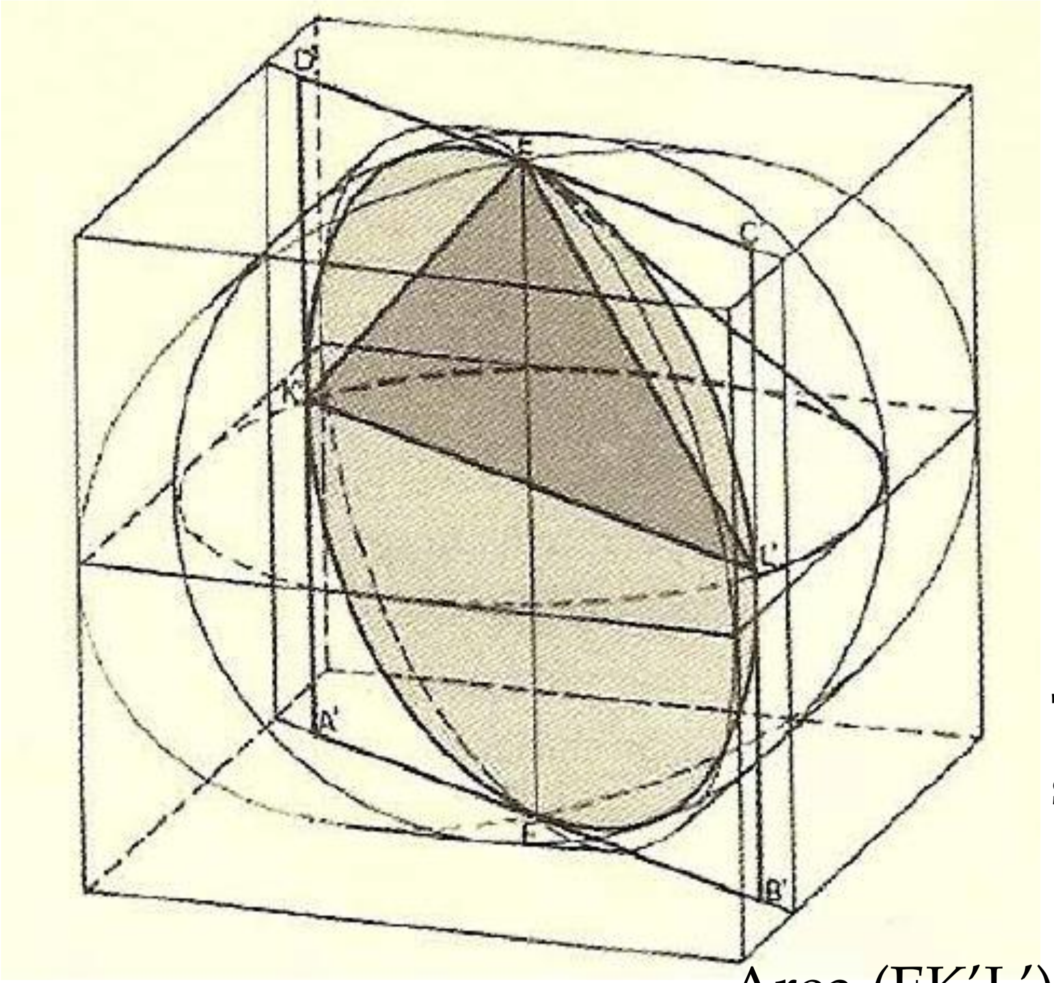


Let us consider a plane of the EF-axis sheaf. As this plane varies, the region bounded by the ellipse generates the double vault.

The section is an ellipse of minor axis EF and varying major axis. The W and Z extremes of the axis run along the perimeter of the square ABCD

The plane also dissects the cube according to the rectangle T'V'X'Y', which is circumscribed by the ellipse.

The plane also dissects the pyramid of vertex E and base ABCD according to the triangle EWZ inscribed in the ellipse



Il piano del fascio seziona inoltre

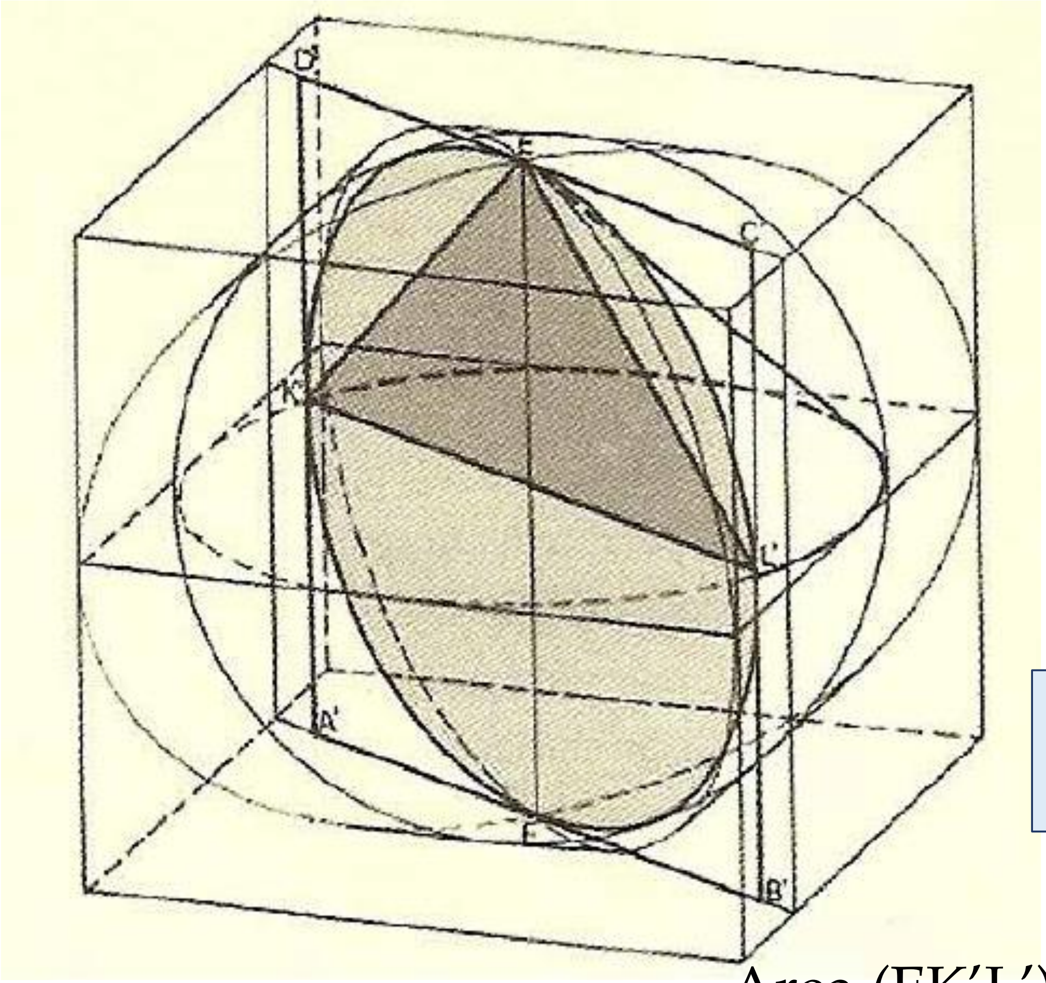
- La sfera inscritta nella doppia volta secondo una circonferenza EK′FL′ inscritta nel quadrato A′B′C′D′ di lato d

- Il cono secondo il triangolo EK′L′

Tra queste sezioni vale la relazione che è stata stabilita in precedenza:

Area (EK′L′) : Area (cerchio) = Area (EWZ) : Area (ellisse)

Piero dunque estende il rapporto tra le sezioni al rapporto tra i solidi generati



The plane of the sheaf also dissects

- the sphere inscribed in the double vault according to a circumference EK'FL' inscribed in the square A'B'C'D' of side d

- the cone according to the triangle EK'L'

The relationship that was established earlier between these sections:

Area (EK′L′) : Area (circle) = Area (EWZ) : Area (ellipse)

Piero therefore extends the ratio of sections to the ratio of solids generated

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) *La matematica di Piero della Francesca*


Fig. 13 Modello

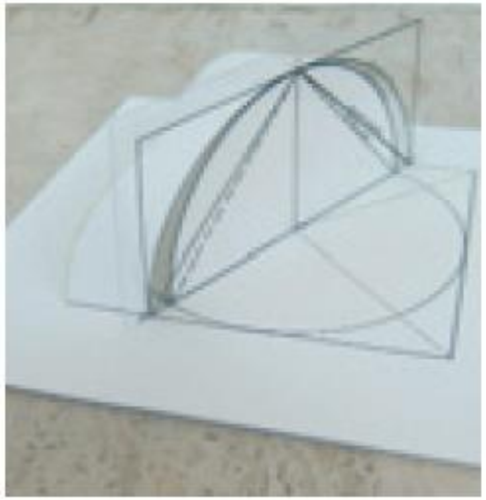
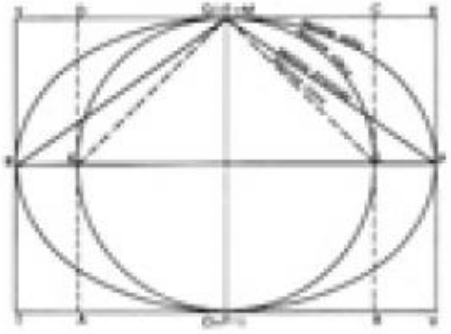
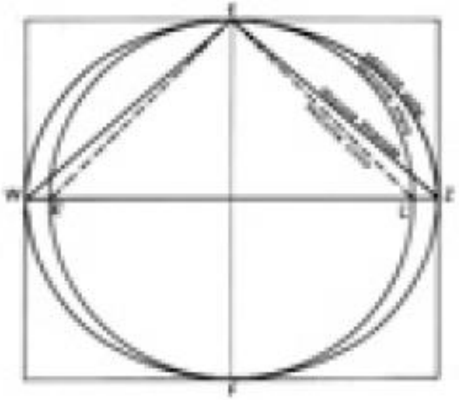
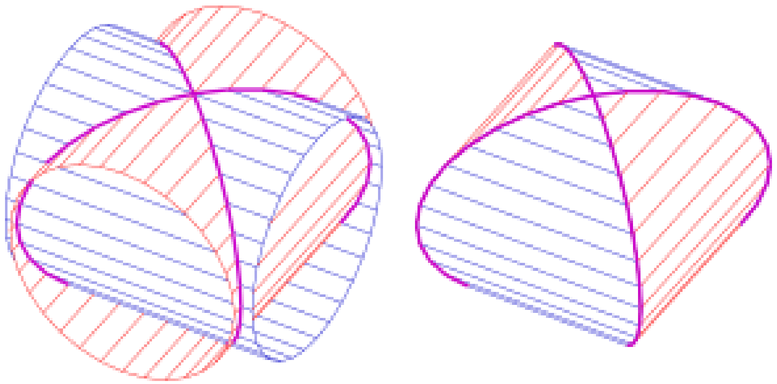


Fig. 14 Modello

I due modelli in figura realizzano in tre dimensioni quanto rappresentato nelle figg.13b (mod.1) e 14b (mod. 2) sotto forma bidimensionale. Il mod. 1 si riferisce alla sezione della volta a padiglione fatta secondo un piano passante per l'asse verticale EF della volta e per la diagonale del quadrato di base. Il mod. 2 si riferisce ad una sezione ottenuta con un piano qualsiasi passante con l'asse EF. I modelli visualizzano anche le sezioni della sfera, del cono e della piramide inseriti nella volta a padiglione di cui Piero si avvale per calcolarne il volume. Si può avanzare l'ipotesi che Piero abbia effettivamente costruito tali modelli come supporto visivo per la risoluzione del problema, è nota infatti la realizzazione all'epoca di modelli dei poliedri.



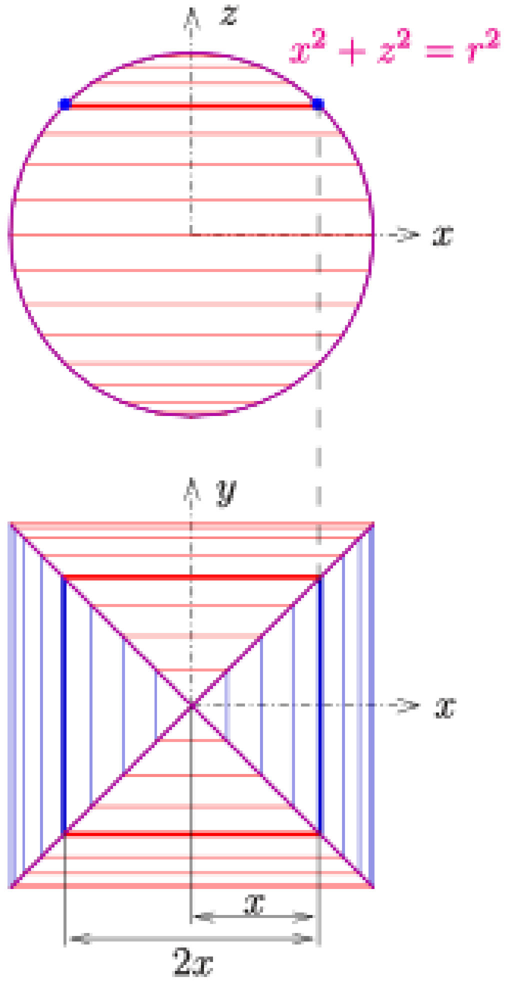




Per calcolare il volume della doppia volta, si possono considerare delle fette assimilabili a prismi con base quadrata

For deriving the volume formula it is convenient collecting thin cylindric slices, that in this case are square cuboids (see diagram). This leads to

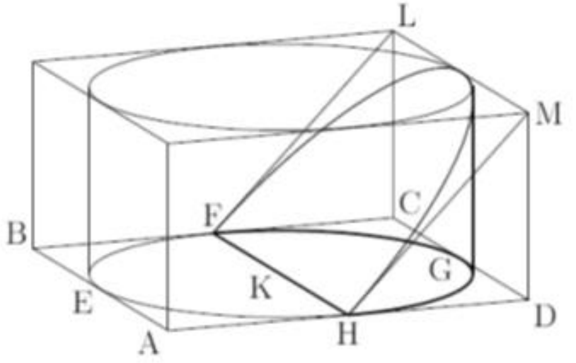
$$V = \int_{-r}^{r} (2x)^2 \, dz = 4 \int_{-r}^{r} x^2 dz = 4 \int_{-r}^{r} r^2 - z^2 \, dz = \frac{16}{3} r^3$$



https://en.wikipedia.org/wiki/Steinmetz_solid

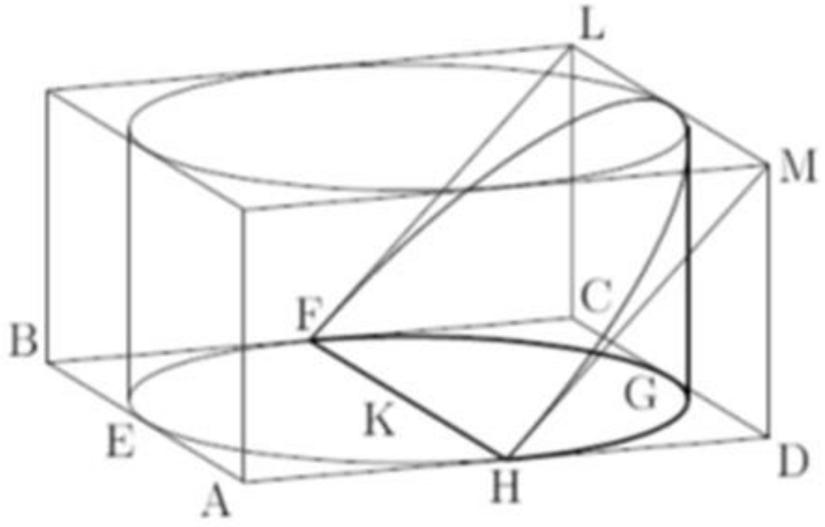
Il volume della volta in Archimede, *Metodo* (dei teoremi meccanici)

Archimede ad Eratostene – salute!
Tempo fa ti comunicai per iscritto gli enunciati dei risultati da me trovati, incitandoti a trovare quelle dimostrazioni che non ti dicevo sul momento. Gli enunciati dei risultati che avevo comunicato erano i seguenti. Primo: qualora in un prisma retto che ha un parallelogramma come base sia inscritto un cilindro che ha le basi nei parallelogrammi opposti e i lati tangenti alle quattro facce che restano, e per il centro del cerchio che è base del cilindro e per un solo lato del quadrato nella faccia opposta sia condotto un piano, il piano condotto resecherà dal cilindro un segmento che è compreso da due piani e da una superficie cilindrica – un piano è quello condotto, l'altro quello in cui è la base del cilindro, mentre la superficie è quella tra i detti piani – e il segmento resecato dal cilindro è la sesta parte dell'intero prisma.



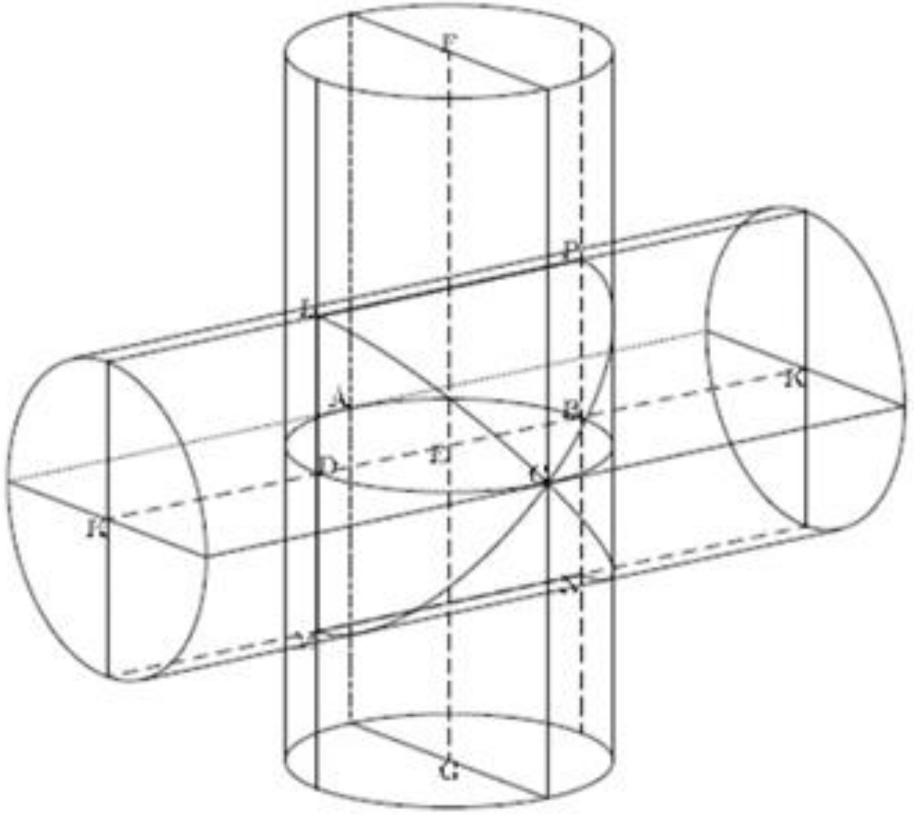
Metodo, 12, 13, 14, 15

Archimedes to Eratosthenes: Greetings.
Some time ago I sent you some theorems I had discovered, writing down only the propositions because I wished you to find their demonstrations, which I did not give at the time.
The propositions of the theorems which I sent you were the following:
1. If in a right prism having a parallelogram as its base a cylinder is inscribed which has its bases in the opposite parallelograms and its sides on the other planes of the prism, and if a plane is drawn through



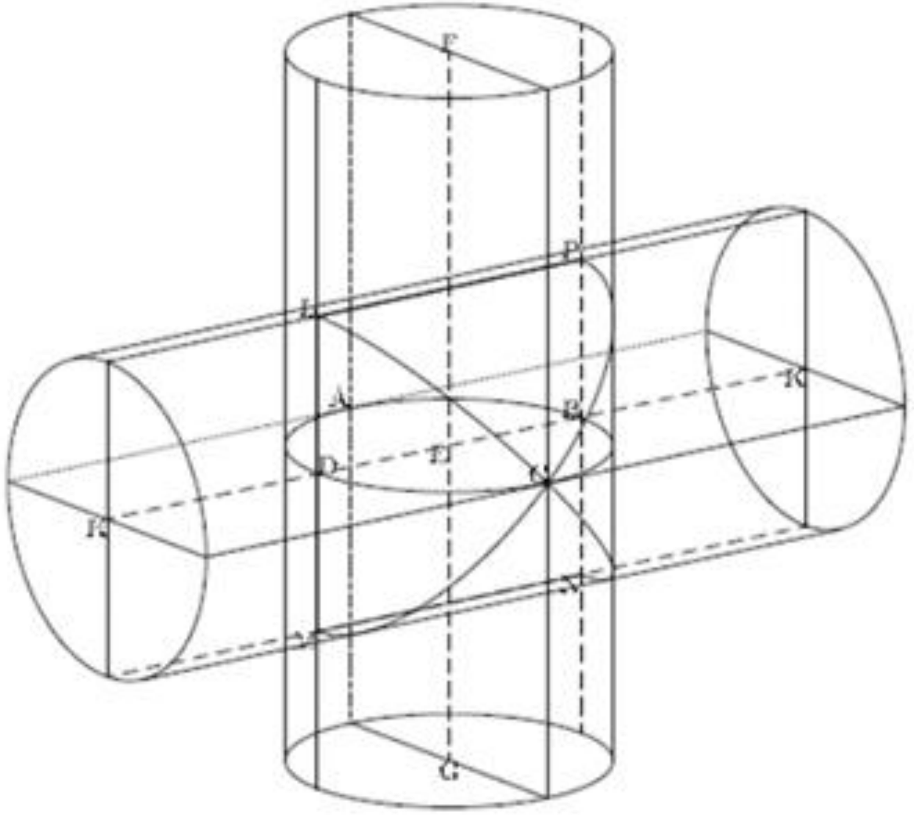
<the center of the circle> that is the base of the cylinder and one side of the square in the opposite plane, the plane that is drawn will cut off from the cylinder a segment which is bounded by two planes and the surface of the cylinder – the one plane being that which was drawn, the other that in which is the base of the cylinder, and the surface that which is between the said planes. And the segment cut off from the cylinder is one sixth of the whole prism.

L’enunciato dell’altro risultato è il seguente: qualora in un cubo sia inscritto un cilindro che ha le basi sui parallelogrammi opposti e la superficie tangente alle quattro facce che restano, e nello stesso cubo sia inscritto anche un altro cilindro che ha le basi in altri parallelogrammi e la superficie tangente alle quattro facce che restano, la figura circondata dalle superfici dei cilindri (quella che è in entrambi i cilindri) **è due terzi dell’intero cubo.**



Metodo, 16

2. If in a cube a cylinder is inscribed whose bases are against opposite parallelograms and whose surface touches the other four planes, and if in the same cube another cylinder is inscribed whose bases are in other parallelograms and whose surface touches the other four planes, then the figure enclosed by the surfaces of the cylinders and comprehended within both cylinders **is two thirds of the whole cube.**

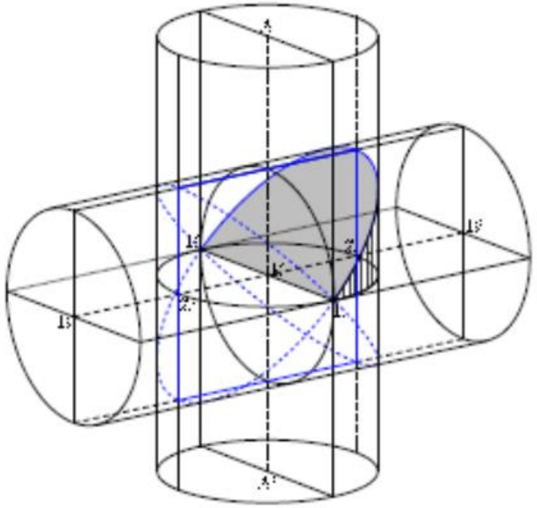


Method, 16

Si dà il caso che questi risultati siano di natura differente di quelli da me scoperti in precedenza […] Ecco nel presente libro vado a comunicarti per iscritto le dimostrazioni di questi risultati […] sono convinto che se ne produca un'utilità non piccola per la materia – ritengo infatti che certuni (nel presente o nel futuro) potranno scoprire, grazie al metodo, altri risultati che non mi sono ancora venuti in mente.

These theorems differ from those formerly discovered […] Accordingly, I have written down the demonstrations of these theorems in this book and I am sending them to you. […] in the conviction that it would be of no small use for mathematics; for I suppose that there will be some among present or future individuals who will discover by the method here set forth still other theorems which have not yet occurred to us.

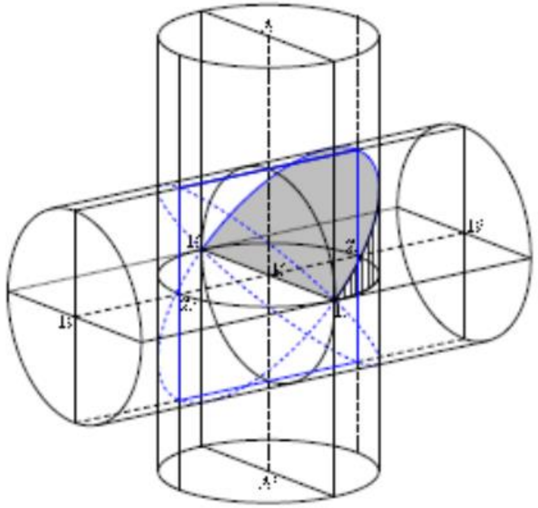
La proposizione 16, relativa alla cubatura della volta, è assente nel palinsesto, ma Archimede l'ha annunciata nella lettera prefatoria quindi doveva essere presente.
Nel corso della storia sono state proposte varie ricostruzioni.
Nel 2014 Pier Daniele Napolitani e Ken Saito, hanno proposto una brevissima dimostrazione: la dimostrazione, infatti doveva occupare 3 fogli del palinsesto e, vista la lunghezza dell'enunciato doveva contenere una dimostrazione molto breve.
La dimostrazione del risultato si basa sulla decomposizione della volta in 8 unghie cilindriche uguali, ottenute sezionando la stessa con due piani paralleli alle basi dei cilindri generatori e con due ulteriori piani ortogonali tra loro e passanti per il diametro sezione comune dei due precedenti.



$W = 8U = 8 \cdot \frac{1}{6}\ \text{Prisma} = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\ \text{Cubo} = \frac{2}{3}\ \text{Cubo}$

Proposition 16, concerning the cubature of the vault, is absent from the palimpsest, but Archimedes announced it in the prefatory letter so it must have been present. Various reconstructions have been proposed throughout history. In 2014 Pier Daniele Napolitani and Ken Saito, proposed a very short demonstration: the proof, in fact have to occupy 3 sheets of the palimpsest and, given the length of the statement, it should be a very short demonstration. The demonstration of the result is based on the decomposition of the vault into 8 equal cylindrical hoofs, obtained by sectioning it with two planes parallel to the bases of the generating cylinders and with two additional planes orthogonal to each other and passing through the common section diameter of the two previous

$W=8U=8 \cdot \ 1/6 \ \text{Prism} = 8 \cdot \ 1/6 \cdot \ 1/2 \ \text{Cube} = 2/3 \ \text{Cube}$



I punti storicamente interessanti sono quindi almeno due:

Per quanto ne sappiamo il palinsesto rimase sconosciuto fino al 1906

In ogni caso nel palinsesto manca la dimostrazione della proposizione 16

Qual è la fonte di Piero della Francesca?

La questione (a quanto ne so) è aperta.

The historically interesting points are at least two:

As far as we know, the palimpsest remained unknown until 1906.

In any case, the palimpsest lacks the demonstration of proposition 16

What is Piero della Francesca's source?

The question (as far as I know) is still an open question.

Fonti / Primary sources

Archimede, *Metodo. Nel laboratorio del genio* (a cura di Acerbi F., Fontanari C., Guardini M.), Torino, Bollati Boringhieri 2013

Piero della Francesca, *De quinque corporibus regularibus*, Codice Urb. Lat. 632 https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus, corredato della versione volgare di Luca Pacioli*, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, Giunti 1995

Luca Pacioli, *Divina proportione*, Venetiis 1509

https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/35396/P9.html

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k323371m?rk=42918;4

Bibliografia

Arrighi G. (1976), *Arte e matematica in Piero della Francesca*, ristampato in *La matematica dell'Età di mezzo. Scritti scelti* (a cura di Barbieri F., Franci R., Toti Rigatelli L.) ETS, Pisa 2004, pp. 371-376

Banker J. (2010), Luca Pacioli e Piero della Francesca, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp. 205-220 (rist. in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012)

Ceccherini I. (2008), La genesi della scrittura mercantesca, in *Régionalisme et internationalisme. Problèmes de paléographie et de codicologie du Moyen Âge. Actes du XVe Colloque du Comité International de Paléographie Latine* eds. O. Kresten and F. Lackner, Wien, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, pp. 123-137

Ciocci A. (2015), *Luca Pacioli e l'*Archimede *latino*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXV 2, pp. 165-184

Clagett M. (1978), *Archimedes in the Middle Ages*, vol. III Part III *The Medieval Archimedes in the Renaissance 1450-1565*, The American Philosophical Society 1978.

Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996.

Daly Davis M. (1977), *Piero Della Francesca's Mathematical Treatises: The Trattato D'abaco and Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, Longo (parz. ristampato in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012).

Gamba E., Montebelli V. (1987), *La matematica abachistica tra ricupero della tradizione e rinnovamento scientifico*, in "Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento, Atti del Convegno internazionale di studio su Giovan Battista Benedetti e il suo tempo". Istituto Veneto di scienze, lettere e arti, Venezia 1987, pp.169-202

Gamba E., Montebelli V. (1996), *La geometria nel* Trattato d'abaco *e nel* Libellus de quinque corporibus regularibus *di Piero della Francesca: raffronto critico*, in Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996, pp. 253-268.

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) *La matematica di Piero della Francesca*, in "Lettera matematica Pristem 59", Centro Eleusi, Università Bocconi, pp. 49-59 (https://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/wp-content/uploads/2017/02/LM59_09.pdf)

Gavagna V. (2014), *Immagini del "Magister abachi" Nicolò Tartaglia nel* General Trattato, in F.Ferrara, L.Giacardi, M.Mosca (a cura di), Conferenze e seminari dell'Associazione subalpina Mathesis, Kim Williams Books, Torino 2013-14, pp. 105-119.

Mancini G. (1916), *L'opera "De corporibus regularibus" di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli*, Memorie della R.Accademia dei Lincei, classe di scienze morali, storiche e filologiche, serie 5, vol. XIV Fasc.VIIB, CCCXII 1915 (rist. Roma 1916), pp.441-580.

Manescalchi R., Martelli M. (a cura di) (2007*) L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani, P. D. (2007), *Piero e la tradizione del testo di Archimede nel Quattrocento*, in *L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, a cura di Manescalchi R., Martelli M., Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani P.D. (2010), *Archimede nella tradizione dell'abaco e nell'Umanesimo*, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp.221-246.

Napolitani P.D., Saito K. (2013), *Archimedes and the Baths: not only one Eureka*, in Lucore S.K., Trümper M., *Greek Baths and bathing culture: new discoveries and approaches*, Walpole, Leuven, pp.181-188.

Napolitani P.D., Saito K. (2014), *Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The last proposition of the* Method, in Sidoli, N., Van Brummelen, G. (eds) *From Alexandria, Through Baghdad*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp.199-225.

Netz R., Saito K., Tchernetska N. (2001)*, A new reading of Method Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest, I, Sciamvs, 2, pp. 9–29.*

Peterson M. A. (1997), *The Geometry of Piero della Francesca*, The Mathematical Intelligencer, 19, pp.33-40.

Rose, P.L. (1975), *The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, Librairie Droz.