9th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education

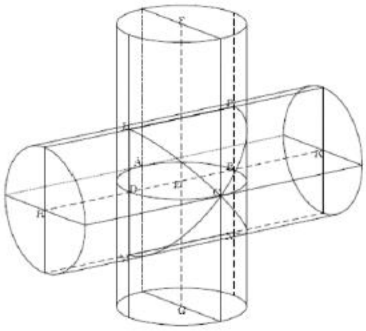
Tra matematica dell'abaco e tradizione archimedea: Piero della Francesca e il volume della volta

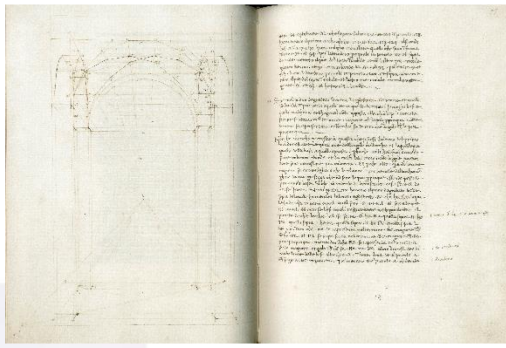
Between abacus mathematics and Archimedean tradition:

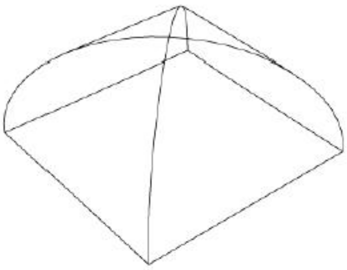
Piero della Francesca and the volume of the vault

Veronica Gavagna (veronica.gavagna@unifi.it), Università di Firenze

Salerno, 19 luglio 2022







Piero della Francesca, Pala di Sant'Antonio, Galleria Nazionale dell'Umbria

Matematica abachistica e tradizione archimedea

Che cos'è la matematica dell'abaco?

È un tipo di matematica che comincia ad affermarsi nella prima metà del Duecento con l'apparire dell'opera di Leonardo Pisano e inizia a declinare nella seconda metà del Cinquecento.

La matematica abachistica, oltre che per i contenuti e lo stile, si contraddistingue (anche)

- Per la lingua: il volgare
- Per la scrittura: la mercantesca

La mercantesca è una scrittura del tardo medioevo, che prima si afferma localmente – a Firenze e in Toscana nel Trecento – e poi, dal Quattrocento inizia ad avere una discreta fortuna anche in altre zone d'Italia, soprattutto dell'Italia centro-settentrionale. Questa diffusione cresce con la maggior capacità dei mercanti di gestire i libri contabili: per fare un esempio, mentre i mercanti toscani acquisiscono autonomia già nel Trecento, quelli genovesi ricorrono ai notai fino al Quattrocento.

A partire dall'avanzato Trecento la mercantesca viene usata soprattutto in ambito mercantile, da persone che parlano e scrivono in volgare, che si sono formate nelle scuole d'abaco o nei fondachi. I documenti che sono sopravvissuti in mercantesca sono dunque trattati in volgare, lettere commerciali, lettere private (uno degli archivi più importanti è quello di Francesco Datini, titolare di un'azienda a Prato).

Nonostante gli stretti legami con la minuscola carolina e la minuscola notarile, la mercantesca è ben riconoscibile: le moltissime varianti sembrano indicare l'assenza di un canone grafico condiviso frutto di un insegnamento sistematico in istituzioni scolastiche.

La matematica abachistica è strettamente legata all'opera di Leonardo Pisano, che è il principale veicolo – ma certamente non l'unico – di divulgazione del sistema di numerazione indoarabico, degli algoritmi di calcolo ad esso correlati, della matematica mercantile e dell'algebra delle equazioni di primo e secondo grado. I temi tipici della matematica mercantile sono: calcolo di interessi e sconti, baratti, conversione di unità di misura, compagnie etc A questi si aggiungono gli argomenti di geometria pratica in gran parte legati al calcolo di aree e volumi.

I centri di diffusione di questa cultura matematica sono le scuole/botteghe d'abaco, che vengono istituite a partire dalla Toscana e si diffondono in tutte le regioni in cui si assiste a un certo sviluppo economico.

I trattati d'abaco che sono sopravvissuti sono circa trecento e sono conservati per lo più nelle biblioteche di Firenze, Siena e Pisa. I trattati d'abaco non sono libri di testo per gli studenti ma, con ogni probabilità, repertori di casi per i maestri d'abaco e per i clienti della bottega. Si tratta infatti di raccolte di problemi risolti, raggruppati per temi, in cui il problema ha la funzione di "exemplum". E' un tipo di matematica induttiva, che parte da un caso o da un gruppo di casi particolari che fungono da paradigma di un caso più generale; l'insegnamento è di tipo analogico. Il termine "dimostrare" è usato nel senso di "mostrare", la prova assume il significato di "riprova" (si ripercorre il procedimento "all'indietro"); sono presenti molte esemplificazioni numeriche: non esiste un piano teorico con una sua vita specifica, i risultati teorici vengono sempre usati per scopi specifici.

Nell'incipit della Quinta Parte del *General Trattato di numeri et misure* (1556-1560), Niccolò Tartaglia spiega chiaramente la differenza tra "l'essequir un problema mathematicamente" e "naturalmente"

Come s'intenda eſſequir un problema mathematicalmente.

a A Eſſequire vn problema mathematicalmente s'intende quando che in tal eſſecutione ſi procede con atti ſcientifici, che con ragioni aſtratte ſi poſſino dimoſtrare, & ſoſtentare, ſi come coſtuma Euclide, Apollonio Pergeo, Archimede Siracuſano, Ptolomeo nel Almageſto, & altri ſcientifici geometri.

La dimostrazione matematica adduce ragioni astratte

Come s'intenda eſſequir un problema naturalmente.

b A Eſſequir vn problema naturalmente s'intende quãdo, che in tal eſſecutione ſi procede per vn certo modo, che la natura infonde generalmente in ogni qualita di huomini, cioe a taſtone. Eſſempi gratia s'io proponeſſe a qual ſi voglia ſimplice huomo, che in vn propoſto cerchio mi ſcriueſſe vn penthagono equilatero, quel tale per natural

La dimostrazione naturale va per tentativi, ma "tal sorte di prova non è accettata dal mathematico perché in molte cose il senso n'inganna"

nel ſenſo, & per queſta cauſa il mathematico non accetta le proue fatte in materia al ſenſo, anzi vuole nella riſſolutione di vn tal problema, & altri ſimili, che ogni ſua attione, & concluſione ſia dimoſtrata con ragioni aſtratte, come fa Euclide nella vndecima propoſitione del ſuo quarto

Le scuole d'abaco promuovono la diffusione della matematica e alzano il livello di alfabetizzazione matematica in diversi strati sociali, creando anche diverse aspettative nei confronti della disciplina e contribuiscono a creare un clima culturale favorevole alla ricezione dei classici greci che partecipano di quel fenomeno culturale che va sotto il nome di Umanesimo (matematico).

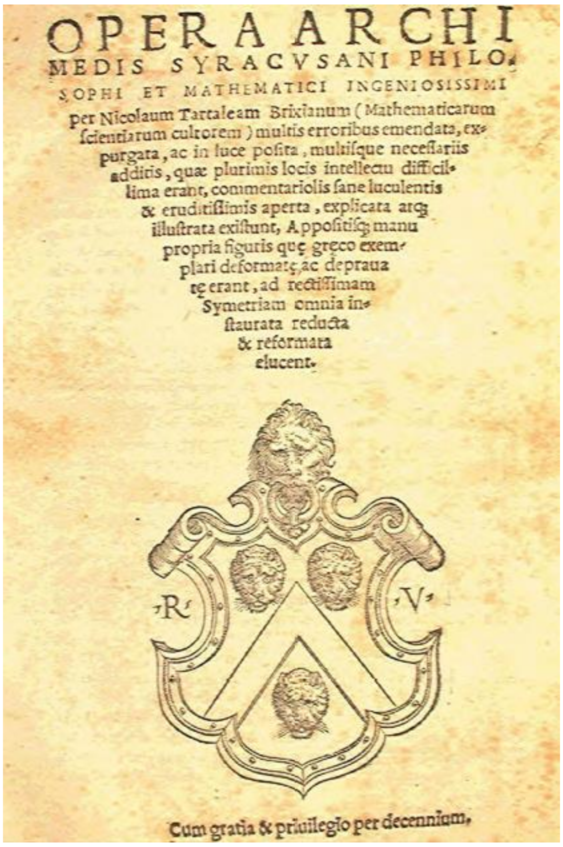
L'opera di Archimede è particolarmente ostica, sia per i contenuti in sé sia per i requisiti necessari alla sua comprensione (non solo la geometria euclidea, ma anche la teoria delle coniche, per non fare che un esempio). Archimede è spesso ellittico nelle sue dimostrazioni, intere parti sono lasciate al lettore: appropriarsi dell'opera archimedea (diversamente da quella euclidea o finanche apolloniana) richiede un tremendo sforzo intellettuale. Questo è uno dei motivi per i quali la traduzione medievale di Guglielmo di Moerbeke, eseguita alla corte papale di Viterbo attorno alla metà del Duecento, non conosce quasi diffusione nella comunità scientifica.

La *Practica geometriae* di Leonardo Pisano è uno dei più importanti tramiti della diffusione delle conoscenze archimedee nel mondo della cultura dell'abaco, sostanzialmente limitate alla *Misura del cerchio* e alla *Sfera e il cilindro*. La fonte fondamentale di Leonardo non è tuttavia una fonte diretta, ovvero gli scritti di Archimede, ma la tradizione indiretta dei *Verba filiorum*.

Uno dei personaggi della tradizione abachistica che manifesta un profondo interesse per Archimede è Piero della Francesca (1412 circa – 1492), al quale, come vedremo si deve l'allestimento di una copia del codice A di Archimede nella traduzione di Iacopo da San Cassiano.

L'"Archimede di Piero", conservato oggi nel codice 106 della Biblioteca Riccardiana di Firenze e il codice urbinate 261 della Biblioteca Vaticana (allestito dal cugino Francesco del Borgo nel 1458) testimoniano di un vivace interesse nei confronti dell'opera del siracusano e costituirono i principali veicoli di diffusione dell'opera archimedea nel mondo dell'abaco e degli ingegneri rinascimentali. L'influenza di questa attività è particolarmente visibile nel *Libellus de quinque corporibus regularibus* e nel caso di studio oggetto di questa attività.

Altre tracce dell'Archimede nella matematica dell'abaco si riscontrano sicuramente – come vedremo – in Luca Pacioli e anche in Niccolò Tartaglia.



Non solo Tartaglia pubblica nel 1543 una edizione latina di alcune opere di Archimede (basata sul codice M, il cui antigrafo è il codice O, l'ottoboniano latino 1850 che conserva la traduzione latina di Guglielmo di Moerbeke dei codici A e B: *Equilibrio dei piani, Quadratura della parabola*, *Misura del cerchio*, *Galleggianti* (libro I) ma pubblica anche la traduzione in volgare del Libro I della Sfera e Cilindro nell'ultimo libro della Quarta Parte del General Trattato, affermando di averlo trovato da "un salsizaro"; Nei *Ragionamenti sopra una travagliata invenzione* invece troviamo la traduzione volgare commentata del primo libro dei *Galleggianti*.

Il recupero di Archimede avviene dunque lungo tre linee nel periodo che va dal XIII al XVI secolo:

- Recupero "pratico" legato alla tradizione abachistica (essenzialmente regole derivate dalla Misura del cerchio e da Sfera e cilindro con eccezioni, tra cui la I.33 di Pacioli o il volume della volta di Piero)
- Recupero umanistico-filologico, che punta a restituire un testo da condividere con la comunità scientifica (Moerbeke, Regiomontanto, Commandino)
- Recupero matematico, che punta a costruire un sapere matematicamente organico (Maurolico)

Questi approcci non sono mutuamente indipendenti

Piero della Francesca[1] e Archimede

Ci sono pervenuti due codici "archimedei" di Piero della Francesca:

- **Codice 106** della Biblioteca Riccardiana di Firenze (siglum R): copia manoscritta del *corpus* archimedeo esemplata sulla base del codice A tradotto in latino da Iacopo di San Cassiano (*Sulla sfera e il cilindro, Misura del cerchio, Conoidi e sferoidi, Equilibrio dei piani, Quadratura della parabola, Arenario*)
- **Vat. Urb. Lat. 632** della Biblioteca Vaticana di Roma: copia manoscritta del *Libellus de quinque solidis regularibus*

Quando il Cardinale Bessarione restituì alla Biblioteca Vaticana la copia del codice A di Archimede realizzata da Iacopo di San Cassiano (14 marzo 1458), questa venne presa in prestito da Francesco del Borgo che ne volle allestire a sua volta una copia (Urbinate Latino 261 della Biblioteca Vaticana, spesso privo di figure, indicato con siglum U). Il Cardinale Bessarione aveva fatto allestire una copia del codice (Marciano V), che fu alla base della revisione di Regiomontano: non soltanto il matematico tedesco ne fece una copia ma apportò numerose correzioni. Il manoscritto di Regiomontano fu poi il testo sul quale si stampò l'*editio princeps* del testo latino del corpus archimedeo (Venatorius 1544)

Con ogni probabilità la trascrizione di Iacopo venne poi resa disponibile da Francesco del Borgo al cugino Piero della Francesca che usò queste due redazioni per far allestire una propria copia del *corpus* archimedeo, con figure di sua mano (ma anche aggiunte e correzioni): questa copia è stata individuata da James Banker nel codice 106 della Biblioteca Riccardiana di Firenze.[2] Venne probabilmente esemplato attorno agli anni Cinquanta mentre Piero si trovava a Roma per lavorare alle Stanze Vaticane. Napolitani e D'Alessandro hanno potuto dimostrare che R è copia diretta di U per quello che riguarda il testo (e U è a sua volta discendente diretto della trascrizione di Iacopo Na)

Piero utilizzò il suo studio su Archimede per ottenere alcuni dei risultati esposti nel *Libellus de quinque solidis regularibus* (Vat. Urb. Lat. 632 della Biblioteca Vaticana), tra cui il calcolo del volume e della superficie della volta a crociera, determinati sulla base di presunte analogie con i metodi archimedei di *Conoidi e Sferoidi* (Clagett, III, 3 pp.383-415).

Il codice Vat. Urb. 632 è scritto da due mani molto simili in umanistica corsiva. La mano di Piero interviene per correggere, aggiungere etc e per fare i disegni. Le figure geometriche di mano di Piero sono state disegnate prevalentemente nel margine inferiore dei fogli, più raramente nel margine destro. Probabilmente molte figure sono state disegnate prima della redazione del testo (forse il copista aveva come modello un altro trattato e ne seguiva l'impaginazione). La redazione di questo codice si potrebbe far risalire alla fine degli anni Settanta o ai primi anni Ottanta del Quattrocento. Omaggio di Piero al duca appena insediato, il manoscritto rimase a Urbino finché la biblioteca ducale viene trasferita alla Vaticana nel 1657 al tempo di Alessandro VII (Fabio Chigi).

Il *Libellus* comprende ben 140 proposizioni ed è probabilmente stato composto lungo un arco temporale piuttosto esteso: quella che ci è pervenuta è l'ultima redazione realizzata, come abbiamo detto, per farne omaggio al nuovo duca. Ben 88 dei 140 problemi del *Libellus* compaiono, generalmente con gli stessi dati, nel *Trattato d'abaco*.

[1] Borgo Sansepolcro, 1412 circa – Borgo Sansepolcro, 12 ottobre 1492
[2] Una copia digitalizzata è disponibile all'indirizzo https://www.loc.gov/item/2021667866/

Secondo Margareth Daly Davis, Piero redasse prima il *Trattato d'abaco* (tra gli anni Sessanta e gli anni Ottanta) poi il *De prospectiva* e poi il *Libellus* negli anni della vecchiaia per mantenere attivo il cervello (si legge nella dedicatoria: "in hoc ultimo aetatis meae calculo ne ingenium inertia torpesceret"). Talvolta Piero non si limita a riprodurre i problemi del *Trattato d'abaco* nel *Libellus* ma li rivede e li riformula; altri problemi del *Libellus* sono invece letteralmente la traduzione latina di problemi scritti in volgare nel *Trattato d'abaco*. La produzione di Piero, peraltro, è emblematica della vitalità del doppio binario linguistico: le due lingue, latino e volgare, sono state a lungo usate insieme.

Questo non toglie che le due lingue venissero preferite l'una all'altra a seconda del contesto: Piero fece tradurre il *Libellus* e il *De Prospectiva* ma non il *Trattato d'abaco*: per i contenuti e lo stile, i primi due potevano trovare agevolmente posto nelle biblioteche umanistiche, mentre il *Trattato d'abaco*, destinato ai soli pratici, doveva necessariamente essere scritto in volgare.

Sebbene il *Libellus* sia descritto nella dedicatoria come articolato in tre trattati, in realtà essi sono quattro:

<u>Primo Trattato</u>: 57 problemi di geometria piana riguardanti triangoli, quadrati, pentagoni, esagon, ottagoni regolari e circonferenze;

<u>Secondo Trattato</u>: 36 problemi sui poliedri regolari (del tipo: dato lo spigolo di un poliedro regolare, se ne determinino superficie e volume, oltre che il diametro della sfera circoscritta)

<u>Terzo Trattato</u>: 29 problemi, di cui 17 sui poliedri (del tipo: determinare il lato di un poliedro inscritto in un poliedro di lato noto)

<u>Quarto Trattato</u>: 18 problemi sui poliedri archimedei

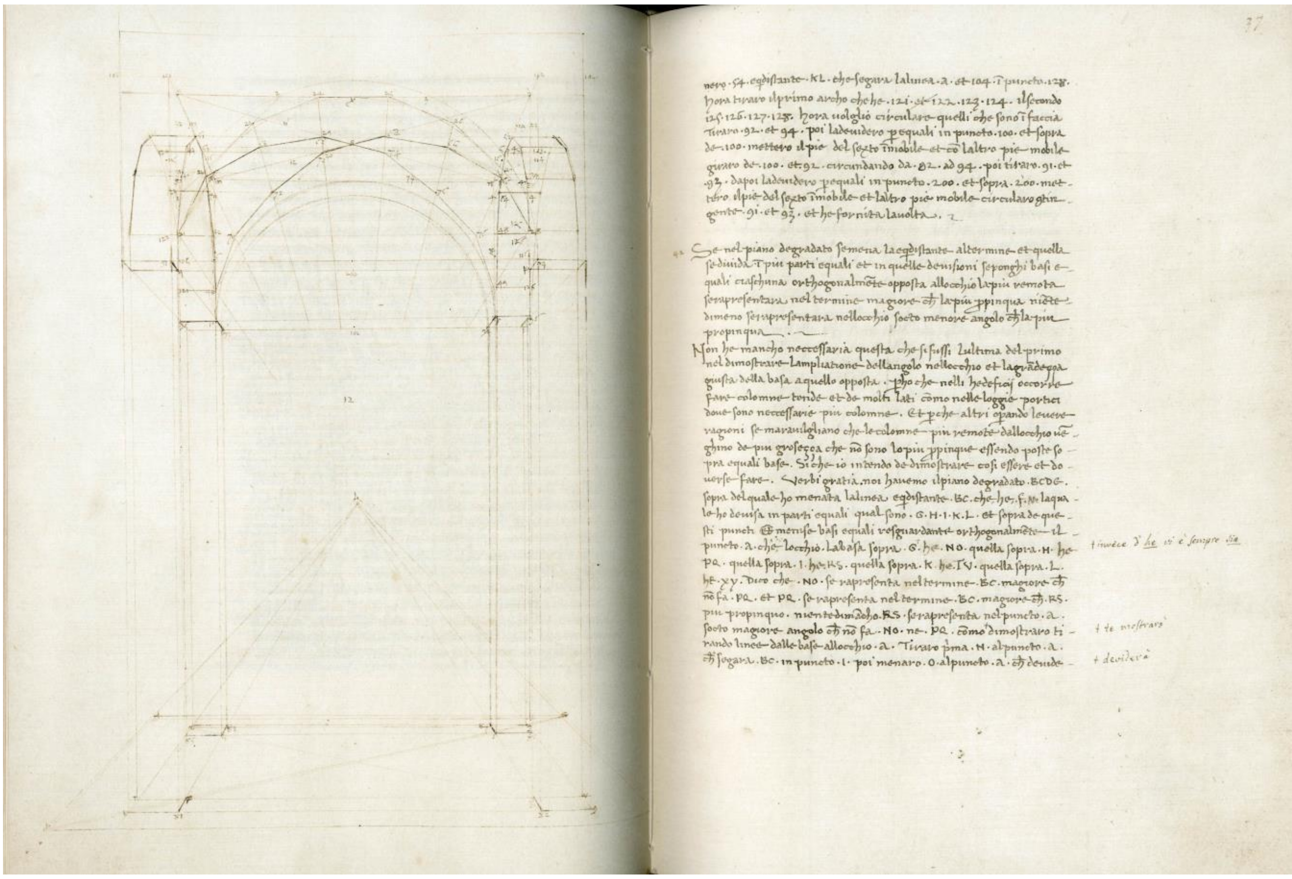
I problemi presenti nel *Libellus* ma non nel *Trattato d'abaco* sono in generale più avanzati: nel *Trattato d'abaco*, ad esempio, mancano i primi 13 problemi del Terzo Trattato dedicati alla mutua inscrizione dei poliedri regolari: l'ottaedro nel tetraedro; il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro inscritti nel cubo; il cubo e il tetraedro inscritti nell'ottaedro; il cubo, il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro inscritti nel dodecaedro; il cubo, il tetraedro e il dodecaedro inscritti nell'icosaedro. In tutto 13 inclusioni contro le 12 del libro XV degli *Elementi*: Piero infatti considera anche l'icosaedro inscritto nel cubo. Nella sua edizione di Euclide (libro XV problema XII), Tartaglia si vanta di aver trovato altri due casi di inclusione rispetto a quelli euclidei: l'icosaedro nel cubo e l'ottaedro nell'icosaedro.

Nel *Trattato d'abaco* mancano inoltre i primi cinque problemi del Quarto Trattato del *Libellus* in cui vengono calcolate la misura della superficie e quella del volume del solido a 72 facce e di 4 poliedri archimedei (icosaedro tronco, dodecaedro tronco, ottaedro tronco, cubo tronco). E' trattato invece il caso del tetraedro tronco (sta anche nel *Libellus* IV,6) e del cubottaedro (non presente nel *Libellus*)

Il problema nostro (volume della volta a padiglione) non c'è nel Trattato d'abaco ma della volta a crociera si parla nel *De prospectiva*[3].

---

[3]Codice conservato alla Biblioteca di Reggio (in volgare, autografi i disegni e le annotazioni marginali) http://digilib.netribe.it/bdr01/visore2/index.php?pidCollection=piero:1&v=1&pidObject=piero:1&page=copertina_anteriore

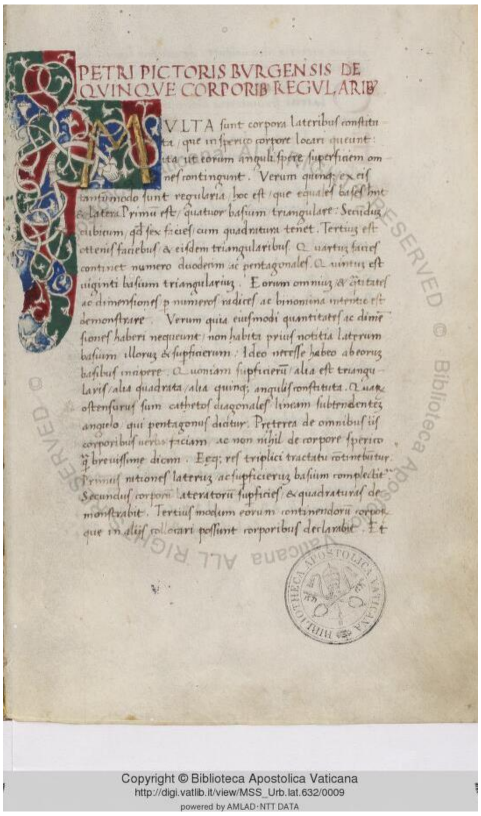


nero .54. eqdistante .KL. che segara la linea .a. et 104. i puncto .128.
hora tirare il primo archo che he .121. et 122. 123. 124. il secondo
125. 126. 127. 128. hora volglio circulare quelli che sono i faccia
tirare .92. et 94. poi la deviderò p equali in puncto .100. et sopra
de .100. metterò il pie del sexto i mobile et co laltro pie mobile
girarò de .100. et 92. circundando da .92. ad 94. poi tirarò .91. et
.93. da poi la deviderò p equali in puncto .200. et sopra .200. met-
terò il pie del sexto i mobile et laltro pie mobile circularò giun-
gente .91. et 93. et he fornita la volta.

42 Se nel piano degradato se mena la eqdistante al termine et quella
se divida i piu parti equali et in quelle devisioni se ponghi basi e-
quali ciaschuna orthogonalmente opposta allocchio la piu remota
se rapresentarà nel termine magiore ch la piu ppinqua niente-
dimeno se rapresentarà nellocchio socto menore angolo ch la piu
propinqua.

Non he mancho neccessaria questa che se fussi lultima del primo
nel dimostrare lampliatione dellangolo nellocchio et la grandeçça
giusta della basa a quello opposta. pho che nelli hedefitij occorre
fare colomne tonde et de molti lati como nelle loggie portici
dove sono neccessarie piu colomne. Et p che altri opando le vere
ragioni se maravilgliano che le colomne piu remote dallocchio ve-
ghino de piu groseçça che no sono lo piu ppinque essendo poste so-
pra equali base. Si che io intendo de dimostrare cosi essere et do-
verse fare. Verbi gratia. noi havemo il piano degradato .BCDE.
sopra del quale ho menata la linea eqdistante .BC. che he .F.M. laqua-
le ho devisa in parti equali qual sono .G.H.I.K.L. et sopra de que-
sti puncti ho messo basi equali resguardanti orthogonalmente il
puncto .a. che locchio. La basa sopra .G. he .NO. quella sopra .H. he
.PQ. quella sopra .I. he .RS. quella sopra .K. he .TV. quella sopra .L.
he .XY. Dico che .NO. se rapresenta nel termine .BC. magiore ch
no fa .PQ. et .PQ. se rapresenta nel termine .BC. magiore ch .RS.
piu propinquo. nientedimancho .RS. se rapresenta nel puncto .a.
socto magiore angolo ch no fa .NO. ne .PQ. como dimostrarò ti-
rando linee dalle base allocchio .a. Tirarò pma .N. al puncto .a.
ch segarà .BC. in puncto .I. poi menarò .O. al puncto .a. ch devide

† invece d' he vi è sempre sia
† te mostrarò
† deviderà



Piero della Francesca

[Libellus] de quinque corporibus regularibus

1480s or early 1490s

Codice Urb. Lat. 632, cc.59v-61r
https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

Trascrizione tratta da:

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, *corredato della versione volgare di Luca Pacioli*, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, Giunti 1995, vol. I *Testi e note* (testo critico Enrico Gamba e Vico Montebelli)

Est quaedam columna rotunda ad circinum, cuius dyameter est 4 brachiorum, id est cuiuslibet eius basis et alia columna eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. Quaeritur quae quantitas auferatur a prima columna per ipsum foramen.

Scire debes quod columna perforata et in concavitate sua ubi incipit foramen et in concavitate ei opposita ubi foramen desinit perforatur ad rectam lineam, et axis columnae[4] perforantis transit per assem columnae perforatae ad angulum rectum et ipsarum lineae conficiunt unum quadratum in eorum concavitate et superius et inferius se in duobus punctis contingunt, idest uno in superiori et altero in inferiori parte. Exemplum: sit columna[5] perforata H et || columna perforans G et foramen sit ABCD, et puncta se tangentia in earum concavitate sint E, F; et huius foraminis quaeritur quantitas. Diximus quod cuiuslibet columnae grossities erat 4 brachiorum, igitur quadratum ABCD est 4 brachiorum in quolibet latere quae latera in se multiplicata faciunt 16 et EF quae est grossities columnae est 4 quod multiplicatum com superficie basis, quae est 16, conficit 64 quod dividas per 3 remanet 21 $^{1}/_{3}$ et hoc duplicatum fit 42 $^{2}/_{3}$, et tantum aufert de columna H propter dictum foramen id est brachia 42 $^{2}/_{3}$. Probatur sic. Tu scis quod dictae columnae in foramine conficiunt quadratum quod est ABCD, ideo facias unam superficiem quadratam eiusdem magnitudinis quae sit etiam ipsa ABCD, in qua facias circulum qui sit IKLM et centrum eius sit N. Deinde facias aliam superficiem cuius duo latera opposita quodlibet[6] sit aequale diagonali AC foraminis dictae columnae et alia duo latera quodlibet aequale AB qui sit TVXY in quo describas unum circulum proportionabilem[7] tangentem[8] quodlibet latus dicti quadrati[9] in punctis O, P, Q, R et eius centrum sit S. Dico eam

[4] columnae: colunae ms
[5] columna: olumna ms
[6] quodlibet: quoodlibet ms
[7] In realtà è un'ellisse
[8] Tangentem: m^1 corregge su tangentes
[9] Dicti quadrati: in realtà è un rettangolo

proportionem esse quadrati ABCD ad quadratum TVXY, quae est circuli IKLM[10] ad suum quadratum[11] ABCD, quae est circuli OPQR ad quadratum suum TVXY, prout per quintam tertii Archimedis De conoidalibus ostenditur[12]. Nunc dividas quadratum ABCD in partes aequales cum linea KM, postea trahas lineas[13] KL, ML conficietur triangulus KLM et dividas in aequales partes quadratum TVXY cum linea PR, postea[14] lineas PQ, QR fiet triangulus PQR. Dico eam esse proportionem trianguli KLM ad triangulum PQR, quae est quadrati ABCD ad quadratum TVXY, et ea quae est trianguli KLM ad suum quadratum ABCD, eadem est trianguli PQR ad suum quadratum TVXY. Et superius dictum fuit quod talis proportio || erat circuli IKLM ad superficiem ABCD qualis erat circuli OPQR ad superficiem TVXY. Sequitur itaque ex communi scientia talem esse proportionem trianguli KLM ad suum circulum IKLM qualis est trianguli PQR ad suum circulum ORPQ. Et hoc intellecto faciemus figuras corporeas, prima erit sperica notata EKMF et eius axis EF, et alia[15] quae circundat quadratum TVXY[16] sunt duo corpora, unum est TRXS et aliud YRVS quae se intersecant in puncto R et in puncto S[17]. In quibus figuris corporeis faciam in qualibet unam pyramidem, in spera EKMF lineabo KM circulariter, postea traham lineas KE, EM et fiet KEM pyramis super base rotunda KLMI. Postea faciam aliam pyramidem in alia figura corporea, quae erit TR, YR, XR, VR quae pyramides sibi invicem sunt in proportione[18], sicut sunt ipsarum matres, id est figurae corporeae in quibus sunt fabricatae, sicut superius ostenditur in superficiebus planis sicut circulus TRXS est aequalis circulo OPQR[19] in superficie TVXY et latera pyramidis TR, RX sunt aequalia duobus lateribus trianguli PQR id est PQ, QR et KEM latera pyramidis sperae: id est KE, EM sunt aequalia duobus lateribus trianguli KLM circuli IKLM, id est KL, LM. Concludamus eam esse proportionem pyramidis TR, YR, XR, VR ad suum corpus TRXS[20] quae est pyramidis KEM cuius basis circularis est IKLM ad suum corpus spericum KEMF. Igitur per XXXIII^{am} primi Sperae et coni Archimedis[21], ubi dicit quamlibet speram esse quadruplam suo cono, cuius basis est aequalis maiori circulo sperae, et axis aequalis semidyametro[22], capias itaque basem TVXY, quae pro quolibet latere quatuor brachia: multiplica in se fiunt 16 brachia, quae multiplica cum suo asse, qui est 2, fit 32, et hoc dividas per 3, remanet 10 $^2/_3$ et eius corpus TRXS est quater tantum, ideo multiplica 10 $^2/_3$ cum 4 fit 42 $^2/_3$, prout superius dictum fuit. Et sic habes || quod aufertur a columna H per illus foramen, brachia 42 $^2/_3$.

[10] Ed. Mancini: ad circulum OPQR et eadem est proportio circuli IKLM **(***addidi ex versione Pacioli qui habet*: al circulo OPQR et quella proportione e dal tondo IKLM**)**

[11] Ad suum quadratum: m^1 su rasura

[12] In realtà si tratta di un solo libro. Il *tertii* si può riferire alla posizione che *De conoidibus et sphaeroidibus* occupa nella successione dei testi del Vat. Urb. Lat. 261 dove al f. 51 v è riportata come prop.5 "Quodlibet spatium a koni acuti anguli sectione comprehensum ad quemcumque circulum comparetur, eam habet proportionem quam superficies ex utrisque eius sectionis diametris producta habere percipitur ad quadratum [diametri] eius circuli ad quem fuerit comparatum (Nell'ed. Heiberg del corpus archimedeo è la proposizione 5 e così in Venatorius)

[13] Trahas: traham ms

[14] Postea: postea trahas ed. Mancini

[15] Et alia: è il solido intersezione delle due colonne di cui si vuole calcolare il volume

[16] Quadratum TVXY: è il quadrato prima indicato con ABCD

[17] In puncto R et in puncto S: il punto R viene a coincidere con il punto E, e S con F.

[18] Proportione: prortione ms

[19] Circulus … et circulo … : sono due ellissi

[20] TRXS: è il solido di cui si deve calcolare il volume

[21] Per XXXIIIam …. Archimedis: Quaelibet spera quadrupla est eius coni qui quidem conus basem habuerit aequalem circulo in spera maximo, altitudinem vero equalem semidiametro sperae (De sphaera et cylindro. Vat. Urb. Lat. 261, f.23v (Archimede di Heiberg I.34, ed. Venatorius I,32)

[22] Ed. Mancini: spera KEMF est quadrupla sue pryamidis KEM et sic corpus TRXS est quadruplum sue pyramidi TR, YR, XR, VR (*addidi*)

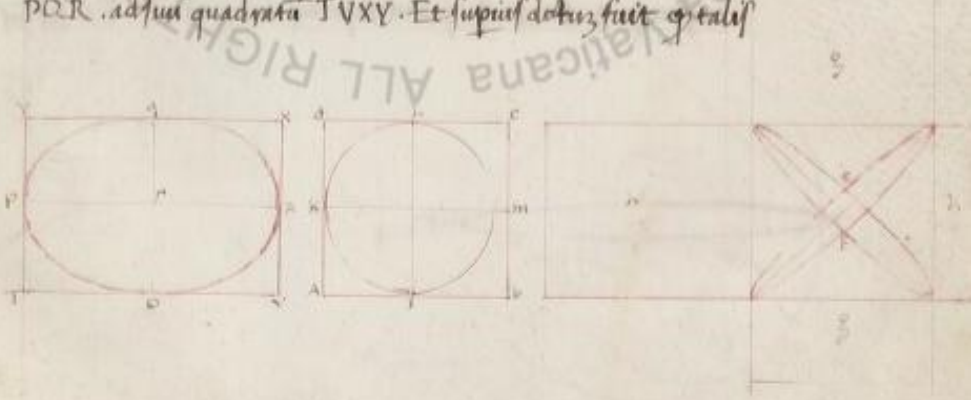
x Est quedam coluna rotunda ad circinum, cuius dyameter est
4. brachiorum, id est cuiuslibet eius basis, et alia coluna
eiusdem grossitiei ortogonaliter perforat. queritur que quan-
titas auferatur a prima coluna per ipsum foramen.

Scire debes quod coluna perforata, et in concavitate sua ubi
incipit foramen et in concavitate ei opposita, ubi foramen
desinit, perforatur ad rectam lineam. Et axis colune perforantis trans-
it per axem colune perforate ad angulum rectum, et ipsarum linee co-
ficiunt unum quadratum in eorum concavitate, et superius et infe-
rius se in duobus punctis contingunt: id est uno in superiori et al-
tero in inferiori parte. Exemplum. Sit coluna perforata H &

coluna pforans. G. & foramen sit. ABCD. & puncta se tangentia in earum concauitate sit EF. Et huius foraminis queritur quantitas.

Diximus quod cuiuslibet colune grossities erat. 4. brachiorum. Igitur quadratum ABCD. est. 4. brachiorum in quolibet latere, que latera in se multata faciunt. 16. & EF. que est grossities colune est. 4. quod multatum cum superficie basis, que est. 16. conficit. 64. quod diuidas per. 3. remanet. $21\frac{1}{3}$. Et hoc duplicatum fit $42\frac{2}{3}$. & tantum aufert de coluna. H. pp dictum foramen. id est brachia $42\frac{2}{3}$.

Probatur sic. Tu scis quod dicte colune in foramine conficiunt quadratum quod est ABCD. Ideo facias unam superficiem quadratam eiusdem magnitudinis, que sit etiam ipsa. ABCD. in qua facias circulum, qui sit. IKLM. & centrum eius sit. N. deinde facias aliam superficiem, cuius duo latera opposita, quodlibet sit equale diagonali AC foraminis dicte colune. Et alia duo latera, quodlibet equale AB. que sit TVXY. in quo describas unum circulum pportionabilem tangentem quodlibet latus dicti quadrati in punctis. OP.Q.R.. & eius centrum sit. S. dico eam pportionem esse quadrati ABCD. ad quadratum. TVXY. que est circuli IKLM. ad suum quadratum ABCD. que est circuli. OPQR. ad quadratum suum. TVXY. prout per quintam tertij Archimedis de conoidalibus ostenditur. Nunc diuidas quadratum. ABCD. in partes equales cum linea KM. Postea trahas lineam KL. ML. conficietur triangulus KLM. & diuidas in equales partes quadratum. TVXY. cum linea. PR. Postea lineas. PQ. QR. Fiet triangulus. PQR. Dico eam esse pportionem trianguli. KLM. ad triangulum PQR que est quadrati. ABCD. ad quadratum. TVXY. & ea que est Trianguli KLM ad suum quadratum. ABCD. eadem est trianguli PQR. ad suum quadratum TVXY. Et superius dictum fuit quod talis



proportio erat circuli .IKLM. ad superficiem ABCD. qualis erat cir-
culi OPQR. ad superficiem TVXY. Sequitur itaque ex comuni scientia
talem esse proportionem trianguli KLM ad suum circulum IKLM. qua-
lis est trianguli PQR ad suum circulum OPRQ. Et hoc intel-
lecto faciemus figuras corporeas. Prima erit sperica notata E.
KMF. et eius axis EF. et alia que circumdat quadratum TVXY sunt
duo corpora. Unum est TRXS. et aliud VRVS. que se intersecant
in puncto R, et in puncto S. In quibus figuris corporeis faciam in
qualibet unam pyramidem in spera EKMF. Lineabo KM circu-
lariter. postea traham lineas KE. EM. et fiet KEM pyramis super
base rotunda KLMI. Postea faciam aliam pyramidem in alia figura
corporea, que erit TR. VR. XR. VR. que pyramides sibi invicem
sunt in proportione, sicut sunt ipsarum matres, id est figure corporee
in quibus sunt fabricate, sicut supra ostenditur in superficiebus pla-
nis: sicut circulus TRXS. est equalis circulo OPQR in superficie
TVXY. et latera pyramidis TR. RX. sunt equalia duobus lateribus
trianguli PQR, id est PQ. QR. et KEM latera pyramidis spere
id est KE. EM. sunt equalia duobus lateribus trianguli KLM circuli
IKLM. id est KL. LM. Concludamus eam esse proportionem pyramidis
TR. VR. XR. VR. ad suum corpus TRXS. que est pyramidis KEM. cu-
ius basis circularis est IKLM ad suum corpus spericum KEMF. Igitur
p. xxxiiii^am^ primi Spere et Coni Archimedis. ubi dicit quamlibet speram
esse quadruplam suo cono, cuius basis est equalis maiori circulo spere
Et axis equalis semidyametro. Capias itaque basem TVXY. que
pro quolibet latere quatuor brachia. Multiplica in se fiunt 16. brachia
que multiplica cum suo asse, quod est 2. fit 32. et hoc dividas per 3. re-
manet $10\frac{2}{3}$. et eius corpus TRXS. est quater tantum. Ideo multiplica
$10\frac{2}{3}$ cum 4. fit $42\frac{2}{3}$. pro ut superius dictum fuit. Et sic habes

q aufertur a coluna H. p illud foramen brachia $42\frac{2}{3}$. 67

XI **E**ST quedam testudo / seu uolta p modu crucis / que est pro qualibz facie. 8. brachia . & in altitudine. 4. brachia / tam i sumitate arcuu q i medio uolte. Queritur de supficie concaua.

Scire debes / q testudo in modu crucis facta componitur ex duobus semicanonis / qui se inuicem intersecantes in eor coniuctione: conficiut. 4. puncta / ad similitudine. 4. punctor faceru tangulariu / seu scarchettoru pile. & posamente super. 4. bases / coniunguntur ad bina puncta / terminando in uno solo puncto. Ut apparet in demonstratione / cui basis est ABCD. & primus arcus est. AGB. Secundus. BHC. Tertius. CID. quartus. DKA. & cruceria. BED. & axis est. EF. cui uolte / querit AEC. & de supficie concaua ipsorum duoru semicanonor. AGB. CID. & alterius. AKD. BHC. quoru cuilibet dyameter est. 8. brachior. & altitudo. 4 / qui semicanoni simul uncti conficiut unu canonu pfectum & rotundu / cui diameter est. 8. brachiorum & est longus p totidem brachia. & eius supficies concaua est $201\frac{1}{7}$. de qua uolumus extrahere supficiem. 4. scarchettoru AEB. BCE. CED. DEA. Et cum auxilio precedentis figure. In qua habes / q eadem est proportio pyramidis rotunde ad dimidiam eius speram / que est pyramidis quadrate ad suu corpus circulare in base quadrata / si sint eiusdem altitudinis. Et p. xxxiii. 1. Spere & Coni Archimedis. que est / q spera cui cuius basis sit maior circulus spere; & axis sit equalis semidyametro spere / & est quadrupla suo cono. Igitur dimidium spere est duplum suo cono. Et nos ponimus conu AE. BE. CE. DE. cui basis. ABCD. est. 8. pro qualibz latere; eius supficies est. 64. quod multa cum axe qui est. 4. fit 256. & diuidas p. 3. remanet

Piero della Francesca e Luca Pacioli

Prima di addentrarci nel rapporto tra Piero della Francesca e Luca Pacioli, vale la pena soffermarci sulle fonti archimedee di Pacioli. Come ha osservato Clagett, nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (1494) si possono rintracciare fonti medievali, che prediligono un uso applicativo dei risultati archimedei e fonti rinascimentali che portano ai tentativi di dimostrazione o di ricostruzione delle dimostrazioni.

Le fonti medievali sono filtrate dalla *Practica di geometria* di Leonardo Pisano e riguardano soprattutto il trattato di geometria che Frate Luca prende dal codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Le fonti rinascimentali, e segnatamente l'edizione di Iacopo di San Cassiano, riguardano invece le carte finali della parte geometrica della Summa, come vedremo nel seguito.

Scriveva Giorgio Vasari, ne *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architettori* (1550):

"e venuto Piero in vecchiezza ed a morte, dopo avere scritto molti libri, maestro Luca detto, usurpandoli per se stesso gli fece stampare come suoi, essendogli pervenuti quelli alle mani dopo la morte del maestro"

Quali sono le opere di Piero che si ritrovano in Pacioli?

- Nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Venezia 1494) Frate Luca pubblica una cinquantina di problemi tratti dal *Trattato d'abaco* di Piero. Nelle ultime pagine della Summa, infatti, Pacioli inserisce il Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria (Parte Seconda, fol. 68v-73v). Questa parte di esercizi stereometrici è tratta dalle carte 105r-120r del trattato di Piero (Ashburnham 280, Biblioteca Laurenziana Firenze): circa la metà degli esercizi sono letteralmente uguali, altri sono resi più concisi, altri considerevolmente abbreviati e alcuni completamente rimaneggiati. Pacioli non pare interessato alla parte algebrica.
- Nell'edizione del 1509 del *De divina proportione*, Luca pubblica l'intero *Libellus de quinque corporibus regularibus* in volgare[23], come terza parte del suo trattato, dal titolo *Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis*[24]. In quest'opera, arricchita anche dei disegni dei poliedri fatti da Leonardo e dall'alfabeto quello dei "poliedri" diventa un genere.

Con Vasari si apre la polemica sui plagi di Pacioli, che vede opporsi essenzialmente due posizioni:

1. Pacioli ha deliberatamente usato i lavori di Piero con intenti truffaldini
2. Pacioli ha usato i lavori di Piero ma non è sensato emettere giudizi con le categorie attuali, visto che l'idea di proprietà intellettuale all'epoca era molto diversa da quella attuale.

La polemica si sopisce per riaprirsi alla fine dell'Ottocento con la scoperta dell'urbinate latino 632 contenente il manoscritto del *Libellus* di Piero, ma ormai nella comunità scientifica la questione si è ormai molto ridimensionata e gli studi si sono orientati al raffronto critico tra i testi.

Secondo Margareth Daly Davis (1977, p.) Piero scrisse originariamente il trattato in volgare e lo fece poi tradurre in latino, forse da tal Matteo de Borgo, per farne omaggio al Duca. Tuttavia, la versione di Pacioli non sarebbe una trascrizione dell'originale volgare di Piero ma una traduzione dalla

[23] Ad eccezione della dedicatoria al Duca.
[24] E' stampato nella seconda parte del trattato con numerazione propria dei fogli da 1r a 27r.

versione latina al volgare. Un raffronto linguistico tra i due testi mostra una significativa povertà lessicale del volgare quattrocentesco rispetto al latino umanistico.

Nel Libellus compaiono vari errori che si possono distribuire in due categorie

Di tipo A:

- Errata trascrizione delle cifre di un numero
- Banali errori di calcolo
- Errata trascrizione dei simboli dell'incognita e del suo quadrato
- Omissione della radice quadrata o del simbolo di quadrato
- Scambio di termini in una sottrazione o in una proporzione
- Enunciati di equazione errati
- Mancata corrispondenza di lettere in testo vs figura

Gli errori di tipo B sono errori di calcolo veri e propri: Piero infatti non commette mai errori di impostazione.

Pacioli corregge questi errori?

Errori di tipo A

Trattato I	45	Di 34 corretti da Pacioli
Trattato II	15	Di cui 9 corretti da Pacioli
Trattato III	6	Tutti corretti da Pacioli
Trattato IV	43	Di cui 24 corretti da Pacioli
Totale	109	Di cui 73 corretti da Pacioli

Errori di tipo B

Trattato I	4	Di cui 1 corretto da Pacioli
Trattato II	1	Non corretto, rimane anche nel testo di Pacioli
Trattato III	2	Non corretti, presenti anche in Pacioli
Trattato IV	12	Di cui 3 corretti da Pacioli e 9 non corretti (1 con un errore diverso)
Totale	20	Di cui 4 corretti da Pacioli

Ci sono poi casi in cui Pacioli corregge il testo latino introducendo errori.

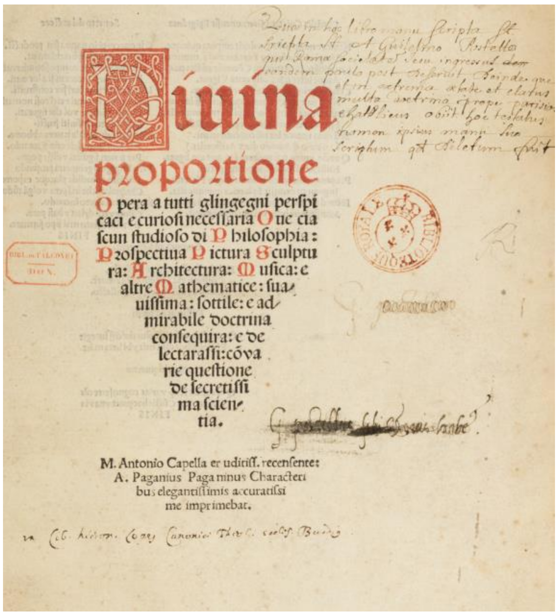
Le conclusioni alle quali giungono Gamba e Montebelli sono che Pacioli abbia rivisto il testo latino dal punto di vista matematico ma in modo superficiale e discontinuo, correggendo gli errori più evidenti. Ha anche corretto qualche calcolo errato, ma ne ha introdotti di nuovi.

Per quello che riguarda le parti algebriche, invece, si può dire che le notazioni usate da Pacioli sono più avanzate di quelle usate da Piero.

In queste pagine Pacioli, come abbiamo detto, apporta delle modifiche, tra cui delle aggiunte che integrano il testo con citazioni puntuali dell'Archimede latino (per esempio la I.42 della *Sfera e cilindro*). Ma quale Archimede aveva davanti a sé il Frate di San Sepolcro?

Secondo Clagett, Pacioli attinge all'Urbinate 26, cioè alla copia fatta allestire da Francesco del Borgo. In base a considerazioni sui disegni (alcuni disegni delle copie di Francesco del Borgo e di Piero della Francesca sono diversi da quelli di Iacopo di San Cassiano) e a considerazioni cronologiche, Ciocci ritiene che Pacioli abbia potuto consultare a San Sepolcro il codice di Iacopo.

E mentre la *Summa* mantiene sempre il suo stile abachistico (anche nel caso di dimostrazioni, sono sempre condotte su esempi), nelle ultime pagine del trattato di geometria, la proposta della dimostrazione della proposizione I.33 è piuttosto significativa: la dimostrazione è proposta nel suo schema deduttivo e non si appoggia alla classica esemplificazione numerica. Qui Pacioli mette da parte lo stile abachistico e si affida alla geometria speculativa di Euclide e della sua teoria delle proporzioni.



Luca Pacioli,

Divina proportione, Venezia 1509

Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium active perscrutationis, Tractatus Tertius, Casus 10

[25]Casus 10.

Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo è 4 cioè de ciascuna sua basa et un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogonalmente. Domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella foratura cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso.

Tu ài a sapere che la colonna forata, e nel curvo suo dove principia il foro et dove finisci nel curvo oposto he [forata] a la linea recta et l'axis de la colonna che fora passa per l'axis de la forata ad angulo recto et le linee loro fano uno quadrato nella loro curvità, et de sopra et de socto se coniungono in doi poncti cioe uno sopra e l'altro socto. Exemplo: sia la colonna forata H et la colonna che la fora G et il foro sia ABCD et i puncti de contacti de la loro curvità sia E, F del quale foro se cerca la sua quantità. Esse dicto che ciascuna colonna è 4 per grossezza adunqua il quadrato ABCD è 4 per lato, il quale lato multiplica in sé fa 16 et EF è pure 4 ch'è la grossezza de la colonna, che multiplicato con la superficie de la basa che è 16 fa 64, il quale parti per 3 ne vene $21\,{}^{1}\!/_{3}$ et questo redoppia fa $42\,{}^{2}\!/_{3}$ et 42 e ${}^{2}\!/_{3}$ se leva de la colonna H per lo dicto foro.

La prova: tu sai che le dicte colonne nel foro fano uno quadrato che è ABCD però fa' una superficie quadrata de simile grandezza che sia pure ABCD nella quale fa' uno circulo che sia IKLM et il centro suo sia N. Dapoi fa' una altra superficie che li doi lati oposti sia ciascuno equale a la diagonale AC del foro de la colonna et gli altri doi lati ciascuno equale AB il quale sia TVXY, nel quale descrivi uno circulo proportionato tocando ciascuno lato de tale quadrato in puncti O, P, Q, R et il centro suo sia S. Dico essere quella proportione dal quadrato ABCD al quadrato TVXY, che è dal circulo IKLM al circulo OPQR et quella proportione è dal tondo IKLM al quadrato suo ABCD che è dal tondo OPQR al quadrato suo TVXY, commo per la 5 del terzo di Archimede De conoidalibus. Hora dividi

[25] Ci uniformiamo alla trascrizione pubblicata nell'Edizione Nazionale di Piero della Francesca, ispirata a criteri di massima fedeltà all'originale, ma nell'ambito di un'edizione interpretativa (es: abbreviature risolte, si segue l'uso moderno per gli accenti e la punteggiatura, lettere maiuscole denotative e non minuscole come nella stampa, grafema ç in z etc).

il quadrato ABCD per equali con la linea KM, poi tira KL, ML farasse il triangulo KLM et devidi per equali il quadrato TVXY con la linea PR, poi la linea PQ, QR fasse il triangulo PQR. Dico quella proportione è dal triangulo KLM al triangulo PQR quale è dal quadrato ABCD al quadrato TVXY et quella che è dal triangulo KLM al suo quadrato ABCD quella è dal triangulo PQR al suo quadrato TVXY. Et de sopra fu dicto che tale proportione era dal tondo IKLM a la superficie ABCD quale era dal circulo OPQR a la superficie TVXY, adunque seguita per comuna scientia che tale proportione sia dal triangulo KLM al suo circulo IKLM, quale è dal triangulo PQR al suo circulo ORPQ.

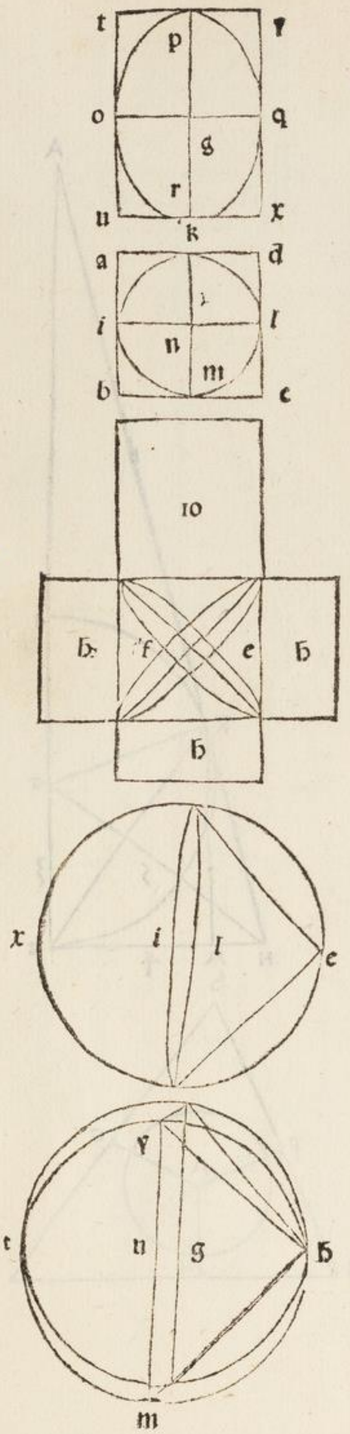
Et questo inteso faremo le figure corporee, la prima fia la spera segnata EKMF e'l suo axis EF et l'altra, ch'è intorno al quadrato TVXY, sono doi circuli uno è TRXS e l'altro YRVS che se intersegano in puncto R et in puncto S[26]. Nelle quali figure corporee farò in ciascuna una piramide, nella spera EKMF linearò KM circulare, poi trarò KE, EM che fia KEM piramide su la basa tonda KLMI. Poi farò l'altra piramide nell'altra figura corporea che sirà TR, YR, XR, VR le quali piramide sono in proportione fra loro sì commo sono le loro matri, cioè le figure corporee nelle quali sono fabricate, commo se mostrò de sopra ne le superficie piane, commo il circulo TRXS è equale al circulo OPQR de la superficie TVXY et i lati de la piramide TR, RX sono equali a doi lati del triangulo PQR, cioè PQ, QR et KEM lati de la piramide de la spera ncioè KE || EM, sono equali a doi lati del triangulo KLM del circulo IKLM cioè KL, LM. Adunqua concludeno essere quella proportione de la piramide TR, YR, XR, VR al suo corpo TRXS[27], che è la piramide KEM ch'è la sua basa IKLM circulare, al suo corpo sperico KEMF. Adunqua per la 33 del primo De spera et cono de Archimede dove dici ogni spera esere quadrupla al suo cono del quale la basa è equale al magior circulo d'essa spera et l'axis equale al semidiametro, adunque piglia la basa TVXY che è 4 per lato, multiplica in sé fa 16, li quali multiplica per lo suo axis ch'è 2 fa 32 e questo parti per 3 ne vene 10 $^2/_3$ et il corpo suo TRXS è 4 tanti, però multiplica $10^2/_3$ per 4 fa $42^2/_3$, commo fu dicto de sopra et ài che se leva de la colona H per quello foro 42 e $^2/_3$.

[26] Il punto R coincide con E e il S con F
[27] TRXS: TVRS Pacioli

Caſus ·10·

Eglie vna colõna tõda a ſeſto che il diametro ſuo e.4.
cioe de ciaſcuna ſua baſa ⁊ vnaltra colõna, de ſimile
groſſeçça la fora hortogonalmente domandaſe che
quantita ſe leua de la prima colõna per quella foratu
ra cioe che q̃tita ſe leua de la colõna per quello buſo.

¶ Tu ai a ſapere che la colõna forata e nel curuo ſuo doue
principia il foro & doue finiſci nel curuo opoſto he a la linea recta & laxis de
la colõna che fora paſſa per laxis de la forata ad angulo recto & le linee. loro
fano vno quadrato nella loro curuita & deſopra & de ſocto ſe coniungono
in doi poncti cioe vno ſopra e laltro ſocto. Exemplo ſia la colõna forata.b.
& la colõna che la fora.g. & il foro ſia.a.b.c.d. & i puncti de cõtacti de la loro
curuita ſia.e.f. del quale foro ſe cerca la ſua quantita. Eſſe dicto che ciaſcuna
colõna e.4. per groſeçça adunqua il quadrato.a.b.c.d.e.4. per lato il quale
lato multiplica in ſe fa.16. &.e.f. e pure.4. ch la groſſeçça dela colõna ch mul
tiplicato cõ la ſuꝑficie dela baſa che e.16. fa.64. il quale parti p.3. neuene.$21\frac{1}{3}$.
& queſto redoppia fa.$42\frac{2}{3}$. &.42.e.$\frac{2}{3}$. ſe leua dela colõna.h. ꝑ lo dicto foro. la
proua tu ſai che le dicte colõne nel foro fano vno quadrato che e.a.b.c.d.
pero fa vna ſuperficie quadrata de ſimile grandeçça che ſia pure.a.b.c.d.
nella quale fa vno circulo che ſia.i.k.l.m. & il centro ſuo ſia.n. da poi fa vna
altra ſuperficie che li doi lati opoſti ſia ciaſcũo eq̃le ala diagonale.a.c. del fo
ro dela colõna & glialtri doi lati ciaſcuno eq̃le.a.b. il quale ſia.t.u.x.y. nel q̃
le deſcriui vno circulo ꝓportionato tocando ciaſcuno lato de tale quadra
to in puncti.o.p.q.r. & il centro ſuo ſia.s. dico eſſere quella proportione dal
quadrato.a.b.c.d. al quadrato.t.u.x.y. che e dal circulo.i.k.l.m. al circulo
.o.p.q.r. & quella ꝓportione e dal tondo.i.k.l.m. al quadrato ſuo.a.b.c.d.
che e dal tondo.o.p.q.r. al quadrato ſuo.t.u.x.y. cõmo ꝑ la.5. del terço de
archimede de conoidalibus hora diuidi il quadrato.a.b.c.d. per equali con
la linea.k.m. poi tira.k.l.m.l. faraſſe il triangulo.k.l.m. & deuidi per equali
il q̃drato.t.u.x.y. con la linea.p.r. poi linea.p.q.q.r. faſſe il triãgulo.p.q.r. di
co quella ꝓportione e dal triangulo.k.l.m. al triangulo.p.q.r. quale e dal q̃
drato.a.b.c.d. al quadrato.t.u.x.y. & quella che e dal triangulo.k.l.m. al
ſuo quadrato.a.b.c.d. quella e dal triangulo.p.q.r. al ſuo quadrato.t.u.x.y.
Et deſopra fu dicto che tale ꝓportione era dal tondo.i.k.l.m. ala ſuperficie.
a.b.c.d. quale era dal circulo.o.p.q.r. ala ſuperficie.t.u.x.y. adunqua ſeguita
ꝑ comuna ſcientia che tale proportione ſia dal triangulo.k.l.m. al ſuo circu
lo.i.k.l.m. quale e dal triangulo.p.q.r. al ſuo circulo.o.r.p.q. Et queſto inte
ſo faremo le figure corporee la prima fia la ſpera ſegnata.e.k.m.f. el ſuo axis
e.f. & laltra che in torno al quadrato.t.u.x.y. ſono doi circuli vno e.t.r.x.s.
e laltro.y.r.u.s. che ſe interſegano in pũcto.r. & in puncto.s. nelle quali figu
re corporee faro in ciaſcuna vna piramide nella ſpera.e.k.m.f. linearo.k.
m. circulare poi traro.k.e.e.m. che fia.k.e.m. piramide ſula baſa tonda.k.l.
m.i. poi faro laltra piramide nel laltra figura corporea che ſira.t.r.y.r.x.r.u.
r. le quali piramide ſono in ꝓportione fra loro ſi cõmo ſono le loro matri
cioe le figure corporee nelle quali ſono fabricate cõmo ſe moſtro deſopra ne
le ſuperficie piane cõmo il circulo.t.r.x.s. e equale al circulo.o.p.q.r. dela ſu
perficie.t.u.x.y. & i lati de la piramide.t.r.r.x. ſono equali a doi lati del trian
gulo.p.q.r. cioe.p.q.q.r. &.k.e.m. lati de la piramide dela ſpera. cioe.k.e.
e.m. ſono equali a doi lati del triangulo.k.l.m. del circulo.i.k.l.m. cioe.k.l.
l.m. adunqua concludeno eſſere quella ꝓportione dela piramide.t.r.y.r.x.
r.u.r. al ſuo corpo.t.r.u.s. che e dala piramide.k.e.m. ch la ſua baſa.i.k.l.m.
circulare al ſuo corpo ſperico.k.e.m.f. adunqua per la.33. del primo de
ſpera & cono de archimede doue dici ogne ſpera eſere q̃drupla al ſuo cono
del quale la baſa e eq̃le al magior circulo deſſa ſpera & laxis equale al ſemi
diametro adunqua piglia la baſa.t.u.x.y. che e.4. per lato multiplica in ſe
fa.16. li quali multiplica per lo ſuo axis ch e.2. fa.32. e queſto ꝑti per.3. neuene
$10\frac{2}{3}$. & il corpo ſuo.t.r.x.s.e.4. tanti pero multiplica.$10\frac{2}{3}$. per.4. fa.$42\frac{2}{3}$. con
mo fu dicto deſopra & ai che ſe leua de la colona.h. per q̃llo foro.42.e.$\frac{2}{3}$.



Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. III Part III *The Medieval Archimedes in the Renaissance 1450-1565*, The American Philosophical Society 1978, pp. 408-410.

There is a certain cylinder whose diameter is 4 brachia – the diameter of each of its bases – and another cylinder of the same size pierces it orthogonally. We seek the quantity that is removed from the first cylinder by means of this hole [i.e. we seek the volume of the common segment of the two cylinders].

You ought to know that the perforated cylinder is perforated in a straight line both at the beginning and the end of the cavity [i.e. the common segment], that is, where the hole [in the middle horizontal plane of the common segment] begins and ends [or, to put it another way, the common segment of the cylinders begins and ends in its middle horizontal plane with a straight line only] and the axis of the piercing cylinder crosses through the axes of the pierced cylinder at right angles in their cavity [i.e. in their common segment] and the lines of these [cylinders parallel to, and in the plane of, the intersecting axes] form a square [and, in fact, the intersecting lines in all the planes above and below and parallel with the plane of the axes form squares except] at the top and the bottom [where single lines only intersect] and [there] they touch each other in two points [only] one at the top and one at the bottom.

Example. Let the pierced cylinder be H and the piercing cylinder be G and let the hole [i.e., the middle horizontal element of the common segment of the intersecting cylinders] be ABCD, and let [the upper and the lower] touching points in their cavity [i.e. in their common segment] be E and F and we seek the volume of the hole [i.e. of the common segment of the intersecting cylinders]. We have said that the width [i.e. the diameter] of each cylinder was 4 brachia. Therefore, the square ABCD, is 4 brachia on each side. These sides multiplied together make 16 and EF, which is the width (i.e. the diameter) of a cylinder, is 4, and when multiplied by the surface of the base, i.e. by 16, makes 64. This you divide by 3 and 21 1/3 is the result. This doubled becomes 42 2/3 and so much is removed from cylinder H as the result [of the formation of the] said hole, i.e. 42/2/3.

This is proved as follows. You know that the said cylinders make a square in the hole, which square is ABCD. Therefore, you may draw a square hole of the same size which we let be ABCD and in it you inscribe circle IKLM with center N. Then you draw another [rectangular] surface TVXY, each of whose opposite sides is equal to the diagonal AC of the said hole, while each of the other two sides is equal to AB. In this you describe a proportional circle [i.e. an ellipse] tangent to each side of the said rectangle in points O, P, Q and R. Let its center be S. I say that the ratio of square ABCD to rectangle TVXY is as circle IKLM to ellipse OPQR, and the ratio of circle IKLM is to its square ABCD as ellipse OPQR is to its rectangle TVXY as is demonstrated by the fifth [proposition] of the third [work] of Archimedes, *On Conoids*. Now you divide square ABCD into equal parts by line KM. Then you draw lines KL and LM and △KLM will be formed; and you divide rectangle TVXY into equal parts by line PR. Then you draw lines PQ and QR, forming △PQR. I say that

$$\triangle KLM \,/\, \triangle \mathrm{PQR} = \text{square ABCD} \,/\, \text{rect TVXY}$$

And

$$\triangle \mathrm{KLM} \,/\, \text{square ABCD} = \triangle \mathrm{PQR} \,/\text{rect TVXY}$$

And it was said above that

$$\text{Circle IKLM} \,/\text{square ABCD} = \text{ellipse OPQR} \,/\, \text{rect. TVXY}$$

And so it follows from common knowledge [viz. The axiom: quantities equal to the same quantity are equal to each other] that

$$\triangle KLM \,/\, \text{circle } IKLM = \triangle PQR \,/\, \text{ellipse } OPQR$$

Fig. III.2.3.5

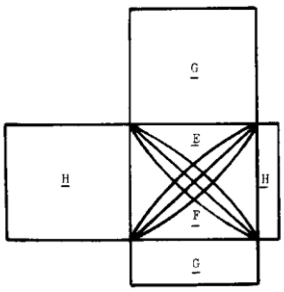


Fig. III.2.3.6

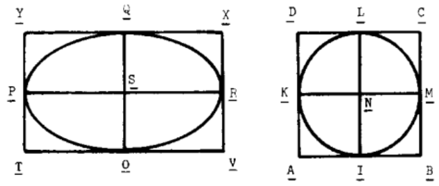
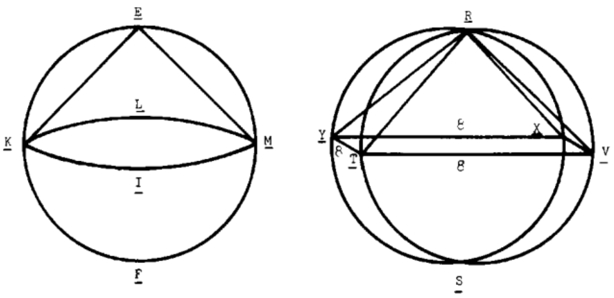


Fig. III.2.3.7



These figures are as in MS Urb. lat. 632, 60v; actually *TYXV* ought to be represented as a square, while *TRXS* and *YRVS* ought to be intersecting ellipses to represent Piero's view of the edges of the common segment.

Fig. III.2.3.8

And with this understood, let us make solid figures. The first will be spherical and designated EKMF with axis EF and the other which encloses square TVXY by means of two ellipses. One is TRXS and the other is YRVS and they intersect each other in point R and in point S. In each of these two [solid] figures I shall produce a pyramid. In the sphere EKMF I shall delineate EM circularly. Then I shall draw lines KE and EM and produce pyramid KLMI on the round base [i.e. I shall produce cone KLMI]. Then I shall produce another pyramid in the other corporeal figure, which will be TR, YR, XR, VR. These pyramids [i.e. cone and the pyramis] are in the same ratio as their parents, i.e. as the corporeal figures in which they are constructed, as is demostrated above in the plane figures, sice circle TRXS is equal to circle OPQR in surface TVXY and the sides of the pyramid TR, RX are equal [respectively] to the two sides of △PQR, i.e. PQ and QR. And the sides KE and EM of the cone in the sphere are equal [respectively] to the sides KL and LM of △KLM of circle IKLM. Let us conclude then that the ratio of the pyramid TR, YR, XR, VR to its [parent] solid TRXS [i.e. to the common segment of the two cylinders] is as the ratio of cone KEM whose base circle is IKLM to its [parent] spherical solid KEMF. Therefore by I.33 of *On the Sphere and the Cone* (!) of Archimedes, where he says that any sphere is quadruple the cone whose base is equal to a greater circle of the sphere and whose axis is equal to the radius [of the sphere], sphere KEMF is quadruple cone KEM and thus the parent solid TRXS [which is the common segment of the two cylinders] is quadruple pyramid TR, YR, XR, VR. And so you take the base TVXY which is 4 brachia on each side; multiply the sides together and the result is 16.This you multiply by the axis which is 2 and the result is 32. This you divide by 3 and 10 2/3 is the result [as the volume of the pyramid]. Its [parent] solid TRXS [i.e. the common segment of the cylinders] is 4 times as great. Therefore, mutiply 10 2/3 by 4 and the result is 42 2/3 as was said before. And thus you have what is removed from cylinder H by that hole [namely] 42 2/3 brachia.

Il volume della volta in Archimede, *Metodo (dei teoremi meccanici)*

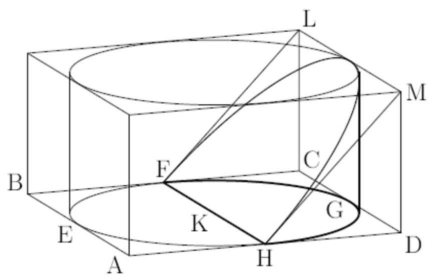
Dalla lettera a Eratostene:

Archimede ad Eratostene – salute!

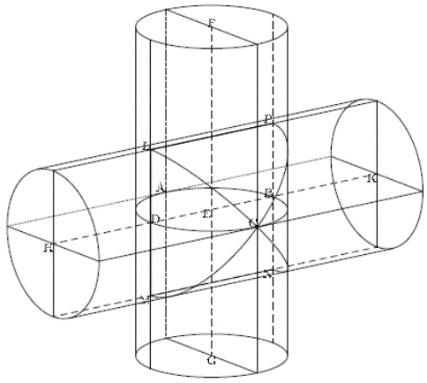
Tempo fa ti comunicai per iscritto gli enunciati dei risultati da me trovati, incitandoti a trovare quelle dimostrazioni che non ti dicevo sul momento. Gli enunciati dei risultati che avevo comunicato erano i seguenti. Primo: qualora in un prisma retto che ha un parallelogramma come base sia inscritto un cilindro che ha le basi nei parallelogrammi opposti e i lati tangenti alle quattro facce che restano, e per il centro del cerchio che è base del cilindro e per un solo lato del quadrato nella faccia opposta sia condotto un piano, il piano condotto resecherà dal cilindro un segmento che è compreso da due piani e da una superficie cilindrica – un piano è quello condotto, l'altro quello in cui è la base del cilindro, mentre la superficie è quella tra i detti piani – e il segmento resecato dal cilindro è la sesta parte dell'intero prisma. L'enunciato dell'altro risultato è il seguente: qualora in un cubo sia inscritto un cilindro che ha le basi sui parallelogrammi opposti e la superficie tangente alle quattro facce che restano, e nello stesso cubo sia inscritto anche un altro cilindro che ha le basi in altri parallelogrammi e la superficie tangente alle quattro facce che restano, la figura circondata dalle superfici dei cilindri (quella che è in entrambi i cilindri) è due terzi dell'intero cubo.

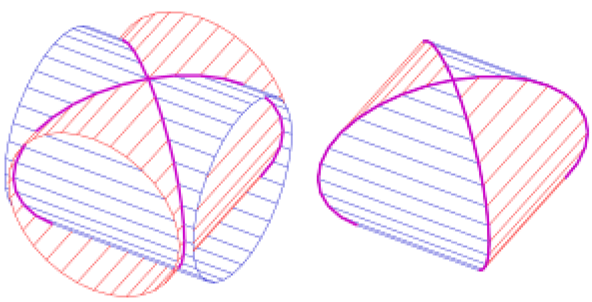
Si dà il caso che questi risultati siano di natura differente di quelli da me scoperti in precedenza […] *Ecco nel presente libro vado a comunicarti per iscritto le dimostrazioni di questi risultati* […] *sono convinto che se ne produca un'utilità non piccola per la materia – ritengo infatti che certuni (nel presente o nel futuro) potranno scoprire, grazie al metodo, altri risultati che non mi sono ancora venuti in mente.*

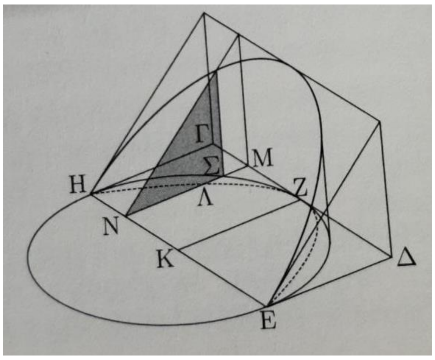
Metodo, 12, 13, 14, 15



Metodo, 16

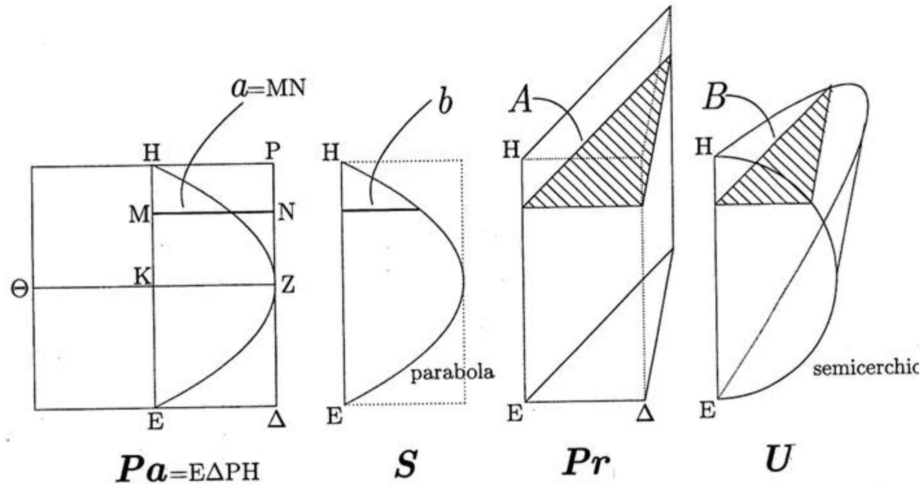






Archimede determina il volume dell'unghia cilindrica – mostrando che è pari a 1/6 del prisma che la contiene - sia con il metodo "della bilancia" (proposizioni 12 e 13) sia con un metodo infinitario molto peculiare (proposizioni 14 e 15, l'ultima è molto frammentaria), del quale vale la pena dare un'idea. Qui Archimede considera un segmento di parabola inscritto nel rettangolo (pari alla metà della base quadrata) e dimostra che vale la proporzione

$$a{:}b = A{:}B$$



Dimostra poi che

tutti $\boldsymbol{a}$: tutti $\boldsymbol{b}$ = tutti $\boldsymbol{A}$: tutti $\boldsymbol{B}$

ovvero

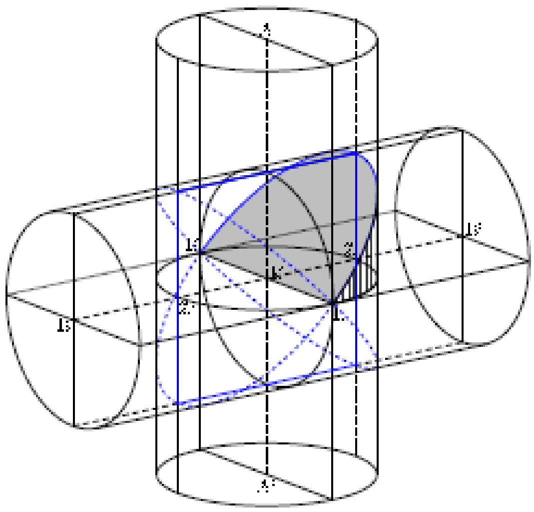
3 : 2 = $\boldsymbol{Pa}$: $\boldsymbol{S}$ = $\boldsymbol{Pr}$: $\boldsymbol{U}$

Dunque $\boldsymbol{U} = \frac{2}{3}\boldsymbol{Pr} = \frac{1}{6}$ Prisma intero

La proposizione 16, relativa alla cubatura della volta, è assente, ma Archimede l'ha annunciata nella lettera prefatoria quindi doveva essere presente.

Nel corso della storia sono state proposte varie ricostruzioni[28], ma la più plausibile, anche per ragioni codicologiche sembra essere quella proposta da Pier Daniele Napolitani e da Ken Saito nel 2014. La

[28] Heiberg J.L., Zeuthen H.G. *Eine neue Schrift des Archimedes*, Bibliotheca Mathematica, III Folge, 7, 1907, pp.321-63; Reinach T., *Un traité de géométrie inédit d'Archimède (restitution d'après un manuscrit récemment découvert)*, Revue générale des sciences pures et appliqueés, 18, 1907, pp.911-28, pp.954-61; Heath T. The Method *of Archimedes recently discovered by Heiberg. A supplement to the* Works of Archimedes *of 1897*, Cambridge University Press, Cambridge 1912; Rufini E., *Il "Metodo" di Archimede e l'origine dell'analisi infinitesimale nell'Antichità*, Alberto Stock, Roma, 1926; Sato T., *A reconstruction of* The Method 17 *and the Development of Archimedes' Thought on Quadrature. Part one*, Historia Scientiarum 31, 1986, pp. 61-86; *Part two*, Historia Scientiarum 32, 1987, pp.75-142; Napolitani P.D., Saito



dimostrazione, infatti doveva occupare 3 fogli del palinsesto e, vista la lunghezza dell'enunciato doveva contenere una dimostrazione molto breve. Secondo Napolitani e Saito la dimostrazione del risultato si basava sulla decomposizione della volta in 8 unghie cilindriche uguali, ottenute sezionando la stessa con due piani paralleli alle basi dei cilindri generatori e con due ulteriori piani ortogonali tra loro e passanti per il diametro sezione comune dei due precedenti.

$$W = 8U = 8 \cdot \frac{1}{6} \text{ Prisma} = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \text{ Cubo} = \frac{2}{3} \text{ Cubo}$$

I punti storicamente interessanti sono quindi due:

- Per quanto ne sappiamo il codice C rimane sconosciuto fino al 1906
- In ogni caso nel palinsesto manca la dimostrazione della proposizione 16

Qual è la fonte di Piero della Francesca?

La questione (a quanto ne so) è aperta.

K., *Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The last proposition of the* Method, in Sidoli, N., Van Brummelen, G. (eds) *From Alexandria, Through Baghdad*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014, pp.199-225.

Archimedes to Eratosthenes: Greetings. [29]

Some time ago I sent you some theorems I had discovered, writing down only the propositions because I wished you to find their demonstrations, which I did not give at the time. The propositions of the theorems which I sent you were the following:

1. If in a right prism having a parallelogram2 as its base a cylinder is inscribed which has its bases in the opposite parallelograms and its sides on the other planes of the prism, and if a plane is drawn through <the center of the circle> that is the base of the cylinder and one side of the square in the opposite plane, the plane that is drawn will cut off from the cylinder a segment which is bounded by two planes and the surface of the cylinder – the one plane being that which was drawn, the other that in which is the base of the cylinder, and the surface that which is between the said planes. And the segment cut off from the cylinder is one sixth of the whole prism. The proposition of the other theorem is this:

2. If in a cube a cylinder is inscribed whose bases are against opposite parallelograms and whose surface touches the other four planes, and if in the same cube another cylinder is inscribed whose bases are in other parallelograms and whose surface touches the other four planes, then the figure enclosed by the surfaces of the cylinders and comprehended within both cylinders is two thirds of the whole cube.

These theorems differ from those formerly discovered […] Accordingly, I have written down the demonstrations of these theorems in this book and I am sending them to you. […] in the conviction that it would be of no small use formathematics; for I suppose that there will be some among present or future individuals who will discover by the method here set forth still other theorems which have not yet occurred to us.

[29] https://instructure-uploads.s3.amazonaws.com/account_18750000000000001/attachments/4615283/Schiefsky_Method.pdf?response-content-disposition=attachment%3B%20filename%3D%22Schiefsky_Method.pdf%22%3B%20filename%2A%3DUTF-8%27%27Schiefsky%255FMethod.pdf&X-Amz-Algorithm=AWS4-HMAC-SHA256&X-Amz-Credential=AKIAJDW777BLV26JM2MQ%2F20220710%2Fus-east-1%2Fs3%2Faws4_request&X-Amz-Date=20220710T170959Z&X-Amz-Expires=86400&X-Amz-SignedHeaders=host&X-Amz-Signature=456c986a7563767ace00ddb5e150ee057a134eae3435753719bdfa7b15df936f

Osservazione sulle definizioni nella geometria pratica

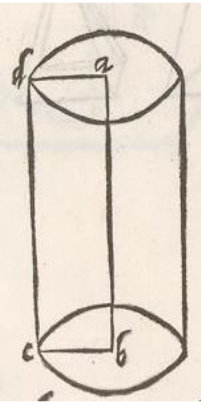
Est quaedam columna rotunda… (“Egli è una colonna tonda…”)

Il nome di “colonna rotonda” invece che di cilindro deriva probabilmente dal fatto che Piero conosce meglio la tradizione arabo-latina piuttosto che quella greco-latina degli Elementi (come mostrano Gamba e Montebelli, usa l’Euclide di Campano).

Tartaglia, traduttore degli *Elementi* in volgare (1543) si pone il problema di come tradurre (Def. XI.16)

Diffinitione.xvi.

14 La figura corporea rotonda chele baſe della quale ſono duoi cer-
18 chii piani in le eſtremita e craſſitudine cioe le altezze equale ſia el
ueſtigio del paralellogrammo rettangolo fermato el lato che con-
tene l’angolo retto,& la detta ſuperficie circondutta per fin a tanto
che la torni al luogo ſuo & chiamaſe queſta figura colonā rotōda
Onde della colonna rotonda & della ſphera & del cerchio ſia uno
medeſimo centro.



La figura corporea rotonda che le base della quale sono duoi cerchii piani in le estremità & crassitudine cioè le altezze equale sia el vestigio del paralellogrammo retangolo fermato el lato che contene lo angolo recto, & la detta superficie circondotta perfina tanto che la torni al luogo suo, & chiamasse questa figura colonna rotonda.

Il Tradottore.

Queſta figura columnale (diffinita di ſopra ſecondo che ſe contiene in la prima tradottione)in la ſeconda tradottione *e chiama cylindro pero biſogna notare che tanto vol dire vno cylindro quanto vna colonna rotonda & ſimilmente da Archimede e pur detta cylindro vocabol greco.

Il Tradottore

Questa figura columnale (diffinita di sopra secondo che se contiene in la prima tradottione [Campano n.d.r]) *in la seconda tradottione* [Zamberti n.d.r] *se chiama cylindro però bisogna notare che tanto vol dire uno cylindro quanto una colonna rotonda & similmente da Archimede è pur detta cylindro vocabol greco*

Nel General Trattato de’ numeri et misure la questione viene ripresa e dettagliata (Terza Parte, c.33v)

Che coſa ſia colona rotonda detta da greci Cilindro.

11 LA figura corporea rotonda, che dal Campano è detta colona, laquale in ciaſcun capo vi ha vn cerchio, Euclide nella 16 diffinitione, con la ſua coſtruttione la diffiniſſe, dicendo, che l'altezza di queſta figura è il veſtigio del parallelogrammo rettangolo fermato il lato, che contiene l'angolo retto, & la detta ſuperficie circondutta per fino a tanto che ritorni al luogo ſuo.

Laqual diffinitione è ſimile a quella del cono, ouer piramide rotonda, dallaqual diffinitione, credo ſia ſtata cauata la regola, che vſano li ſpezza pietre nel coſtruere vna colona rotonda, perche loro incauano vna tauola, facendo in quella la forma, che eſtrinſicamente vogliono dar a tal colõna, la qual tauola incauata da loro è detta ſagoma, & con la regola di quella vanno ſcarpellando la detta pietra, che ridur vogliono in colonna, talmente che cõ la regola di tal ſagoma la riducono a fine, vero è che per dare vn puoco di panzetta a tal colona (che coſi ſi coſtuma) non fanno tal incauo nella detta tauola parallelogrammo rettangolo, come dice Euclide, anzi lo fanno alquãto inarcato, accioche tal colõna habbia (come è detto) vn puoco di panzetta, laqual panzetta fa molto viſtoſa tal colõna, ma per nõ mi diſtuor da Euclide ſupponeremo per eſſempio di tal ſua diffinitione il detto parallelogrammo rettãgolo. a b c d. & ſia fermato il lato. a b & quel ſtia fiſſo, & circondutto tutto il parallelogrammo per fino a tanto, che'l ritorni al primo luogo, doue diede principio a muouerſi. Et coſi la figura corporea deſcritta dal moto di queſto parallelogrammo dice Euclide, ouero il Campano, che ſi chiama colonna. Ma perche queſto medeſimo modo preciſamente vſano li murari per far rettamente vn pozzo, cioe che vi piantano in fondo di tal pozzo rettamente vn trauo, & a quello vi attaccano vn parallelogrammo rettangolo di tauole, girabile attorno, la larghezza delqual parallelogrammo, è quaſi la mita del diametro della canna del detto pozzo, & la longhezza ſua è quanto che debbe eſſer l'altezza della detta canna, & coſi nel far la detta canna giuſta, & retta ſi regolano con il detto parallelogrammo girabile, e per tanto la ſopradetta diffinitione, par che piu ſi conuenga per far la canna d'vn pozzo, che per far vna colonna, perche la detta canna non preteriſſe in coſa alcuna alla ſopradetta diffinitione, & la forma di detta canna, da greci (come di ſopra è ſtato detto) è chiamata cilindro, e pero quel nome di colonna rotonda tengo che non ſia di Euclide, ma che ſia ſtato aggionto dal Campano, ouer da qualche altro.

Che cosa sia la colonna rotonda detta da greci Cilindro

… dalla qual diffinitione credo sia stata cavata la regola, che usano li spezza pietre nel costruire una colonna rotonda, perche loro incavano una tavola, facendo in quella la forma, che estrinsicamente vogliono dar a tal colonna, la qual tavola incavata da loro è detta sagoma, & con la regola di quella vanno scarpellando la detta pietra, che ridur vogliono in colonna, talmente che con la regola di tal sagoma la riducono a fine, vero è che per dare un puoco di panzetta a tal colonna (che così si costuma) non fanno tal incavo nella detta tavola parallelogrammo rettangolo, come dice Euclide, anzi lo fanno alquanto inarcato, accioche tal colonna habbia (come è detto) un puoco di panzetta, la qual panzetta fa molto vistosa tal colonna […] Ma perche questo medesimo modo precisamente usano li murari per far rettamente un pozzo, cioe che vi piantano in fondo di tal pozzo rettamente un travo, & a quello vi attaccano un parallelogrammo rettangolo di tavole, girabile attorno, la larghezza del qual parallelogrammo è quasi la mità del diametro della canna del detto pozzo, & la lunghezza sua è quanto che debbe esser l'altezza della detta canna, & cosi nel far la detta canna giusta, & retta si regolano con il detto parallelogrammo girabile…

… e per tanto la sopradetta diffinitione, par che piu si convenga per far la canna di un pozzo, che per far una colonna, perche la detta canna non preferisse in cosa alcuna alla sopradetta diffinitione, & la forma di detta canna, da greci (come di sopra è stato detto) è chiamata cilindro, e pero quel nome di colonna rotonda tengo che non sia di Euclide, ma che sia stato aggiunto dal Campano, over da qualche altro.

Fonti

Archimede, *Metodo. Nel laboratorio del genio* (a cura di Acerbi F., Fontanari C., Guardini M.), Torino, Bollati Boringhieri 2013

Piero della Francesca, *De quinque corporibus regularibus*, Codice Urb. Lat. 632 https://digi.vatlib.it/view/MSS_Urb.lat.632

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus, corredato della versione volgare di Luca Pacioli*, Edizione Nazionale degli scritti di Piero della Francesca, Giunti 1995

Luca Pacioli, *Divina proportione*, Venetiis 1509

https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/35396/P9.html

https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k323371m?rk=42918;4

Bibliografia

Arrighi G. (1976), *Arte e matematica in Piero della Francesca*, ristampato in *La matematica dell'Età di mezzo. Scritti scelti* (a cura di Barbieri F., Franci R., Toti Rigatelli L.) ETS, Pisa 2004, pp. 371-376

Banker J. (2010), Luca Pacioli e Piero della Francesca, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp. 205-220 (rist. in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012)

Ceccherini I. (2008), La genesi della scrittura mercantesca, in *Régionalisme et internationalisme. Problèmes de paléographie et de codicologie du Moyen Âge. Actes du XVe Colloque du Comité International de Paléographie Latine* eds. O. Kresten and F. Lackner, Wien, Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, pp. 123-137

Ciocci A. (2015), *Luca Pacioli e l'*Archimede *latino*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, XXXV 2, pp. 165-184

Clagett M. (1978), *Archimedes in the Middle Ages*, vol. III Part III *The Medieval Archimedes in the Renaissance 1450-1565*, The American Philosophical Society 1978.

Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996.

Daly Davis M. (1977), *Piero Della Francesca's Mathematical Treatises: The Trattato D'abaco and Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, Longo (parz. ristampato in *Pacioli: letture e interpretazioni*, a cura di A.Ciocci, Centro Studi Mario Pancrazi, 2012).

Gamba E., Montebelli V. (1987), *La matematica abachistica tra ricupero della tradizione e rinnovamento scientifico*, in "Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento, Atti del Convegno internazionale di studio su Giovan Battista Benedetti e il suo tempo". Istituto Veneto di scienze, lettere e arti, Venezia 1987, pp.169-202

Gamba E., Montebelli V. (1996), *La geometria nel* Trattato d'abaco *e nel* Libellus de quinque corporibus regularibus *di Piero della Francesca: raffronto critico*, in Dalai Emiliani M., Curzi V. (a cura di), *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Marsilio Padova 1996, pp. 253-268.

Gamba E., Montebelli V., Piccinetti P. (2006) *La matematica di Piero della Francesca*, in "Lettera matematica Pristem 59", Centro Eleusi, Università Bocconi, pp. 49-59 (https://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/wp-content/uploads/2017/02/LM59_09.pdf)

Gavagna V. (2014), *Immagini del "Magister abachi" Nicolò Tartaglia nel* General Trattato, in F.Ferrara, L.Giacardi, M.Mosca (a cura di), Conferenze e seminari dell'Associazione subalpina Mathesis, Kim Williams Books, Torino 2013-14, pp. 105-119.

Mancini G. (1916), *L'opera "De corporibus regularibus" di Pietro Franceschi detto Della Francesca usurpata da Fra Luca Pacioli*, Memorie della R.Accademia dei Lincei, classe di scienze morali, storiche e filologiche, serie 5, vol. XIV Fasc.VIIB, CCCXII 1915 (rist. Roma 1916), pp.441-580.

Manescalchi R., Martelli M. (a cura di) (2007) *L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani, P. D. (2007), *Piero e la tradizione del testo di Archimede nel Quattrocento*, in *L'Archimede di Piero. Contributi di presentazione alla realizzazione facsimilare del Riccardiano 106*, a cura di Manescalchi R., Martelli M., Sansepolcro, Grafica European Center of fine Arts.

Napolitani P.D. (2010), *Archimede nella tradizione dell'abaco e nell'Umanesimo*, in *Pacioli 500 anni dopo* (a cura di E.Giusti e M.Martelli), Aboca edizioni, pp.221-246.

Napolitani P.D., Saito K. (2013), *Archimedes and the Baths: not only one Eureka*, in Lucore S.K., Trümper M., Greek Baths and bathing culture: new discoveries and approaches, Walpole, Leuven, pp.181-188.

Napolitani P.D., Saito K. (2014), *Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The last proposition of the* Method, in Sidoli, N., Van Brummelen, G. (eds) *From Alexandria, Through Baghdad*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp.199-225.

Netz R., Saito K., Tchernetska N. (2001), *A new reading of* Method *Proposition 14: preliminary evidence from the Archimedes palimpsest*, *I*, Sciamvs, 2, pp. 9–29.

Peterson M. A. (1997), *The Geometry of Piero della Francesca*, The Mathematical Intelligencer, 19, pp.33-40.

Rose, P.L. (1975), *The Italian Renaissance of Mathematics. Studies on Humanists and Mathematicians from Petrarch to Galileo*, Genève, Librairie Droz.