La retta tangente alla parabola dalla matematica greca a Galileo

Riccardo Bellé
Liceo E. Fermi – Massa
Dipartimento di matematica, Università di Pisa
riccardo.belle@gmail.com

Storia della matematica a scuola

Vari approcci:

- biografico/aneddotico
- analisi dei metodi del passato “reintepretati” in chiave moderna
- **lettura diretta fonti storiche**
- ...

Alcune caratteristiche della lettura dei testi originali

- Lettura di temi presenti tra gli argomenti nel curriculum usuale della scuola
- La trattazione storica non deve essere né troppo lontana né troppo vicina a quella odierna.
- Testi accessibili (al massimo in traduzione: ma fedele!)

Il percorso proposto

- Le sezioni coniche dei Greci (Bellé - Napolitani 2007)
- La parabola come la vedeva Galileo
- Descrizione di una costruzione geometrica semplice per tracciare la tangente a una parabola in un punto
- Lettura di due passi collegati a quanto visto tratti dalla Giornata Quarta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Leida, 1638 di G. Galilei
- Applicazione del metodo ad esercizi per la scuola

Obiettivi attesi

- La parabola è una curva ben nota e trattata nella scuola come luogo di punti e come grafico di un trinomio di secondo grado
- La tangente alla parabola viene usualmente determinata con il metodo algebrico del “$\Delta=0$”
- L’approccio dei Greci (ripreso da Galileo) è completamente diverso, del tutto geometrico
- Analisi di un testo matematico attraverso la lettura della prosa (in lingua italiana) di Galileo

Apollonio e Galileo

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze

Giornata quarta. Moto del proiettile:

> Un *proietto*, mentre si muove con un moto composto da un moto orizzontale *equabile* (uniforme) e da un moto *naturaliter* accelerato verso il basso, descrive, nel suo movimento, una linea semiparabolica.

Per poter trattare questo caso Galileo utilizza le teoria delle coniche di Apollonio.

Lettura testi originali: struttura dialogica

Personaggi: Sagredo, Salviati (Galileo) e Simplicio. Già presenti nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632). Dal Proemio del *Dialogo*:

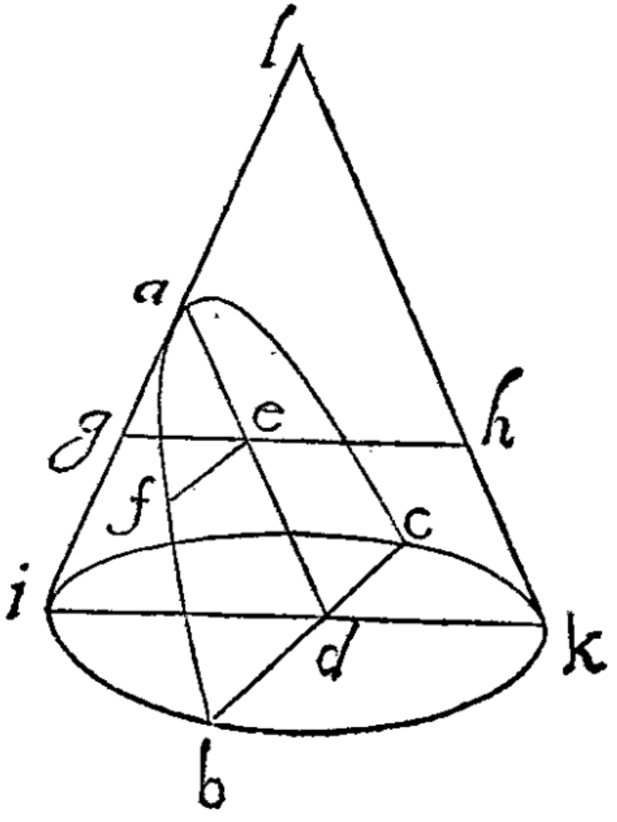
> Mi trovai, molt'anni sono, più volte nella maravigliosa città di Venezia in conversazione col Sig. Giovan Francesco Sagredo, illustrissimo di nascita, acutissimo d'ingegno. Venne là di Firenze il Sig. Filippo Salviati, nel quale il minore splendore era la chiarezza del sangue e la magnificenza delle ricchezze; sublime intelletto.

Simplicio: filosofo antico, commentatore di Aristotele, viene identificato con la posizione dei filosofi aristotelici del tempo di Galileo. Ma Simplicio richiama l’aggettivo semplice, anche nel senso di sempliciotto, banale, privo di sapere…

Il testo di Galilei

tica, perche io ancora in quella volta non haueuo in pronto i libri di Apollonio, s'ingegnò di dimostrarmi due passioni principalissime di essa Parabola senza veruna altra precognizione, delle quali sole siamo bisognosi nel presente trattato; le quali son ben' anco prouate da Apollonio, mà dopo molte altre, che lungo sarebbe a vederle; & io voglio che abbreuiamo assai il viaggio, cauando la prima immediatamente dalla pura, e semplice generazione di essa Parabola, e da questa poi pure immediatamente la dimostrazione della seconda. Venendo dunque alla prima;

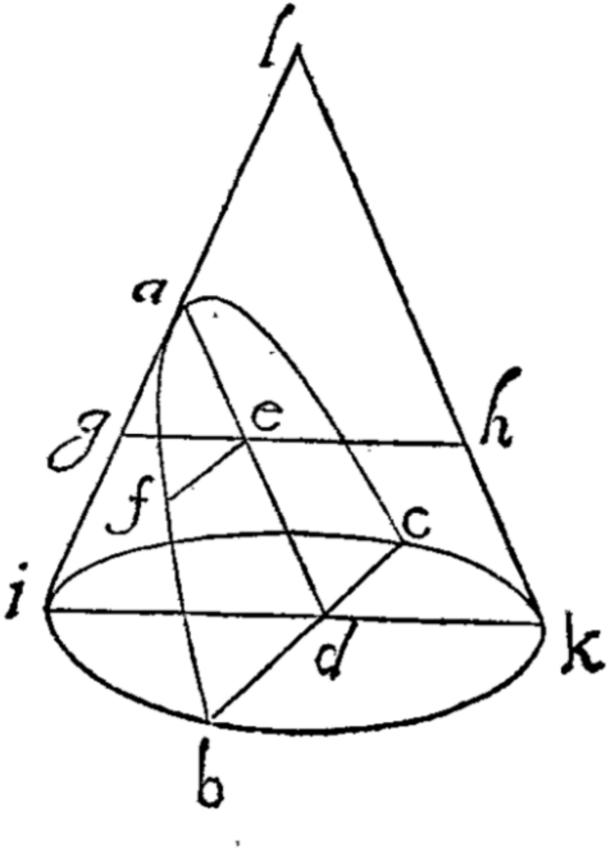
Intendasi il Cono retto, la cui base sia il cerchio ibkc, *e vertice il punto* l. *nel quale, segato con vn piano parallelo al lato* lk, *nasca la sezzione* bac *detta Parabola; la cui base* bc *seghi ad angoli retti il diametro* ik *del cerchio* ibkc. *e sia l'asse della Parabola* ad *parallelo al lato* lk; *e preso qualsiuoglia punto* f *nella linea* bfa, *tirisi la retta* fe *parallela alla* bd. *Dico che il quadrato della* bd *al quadrato della* fe, *hà la medesima proporzione che l'asse* da *alla parte* ae. *Per il punto* e *intendasi passare vn piano parallelo al cerchio* ibkc, *il quale farà nel Cono vna sezzione circolare, il cui diametro sia la linea* geh. *E perche sopra il diametro*

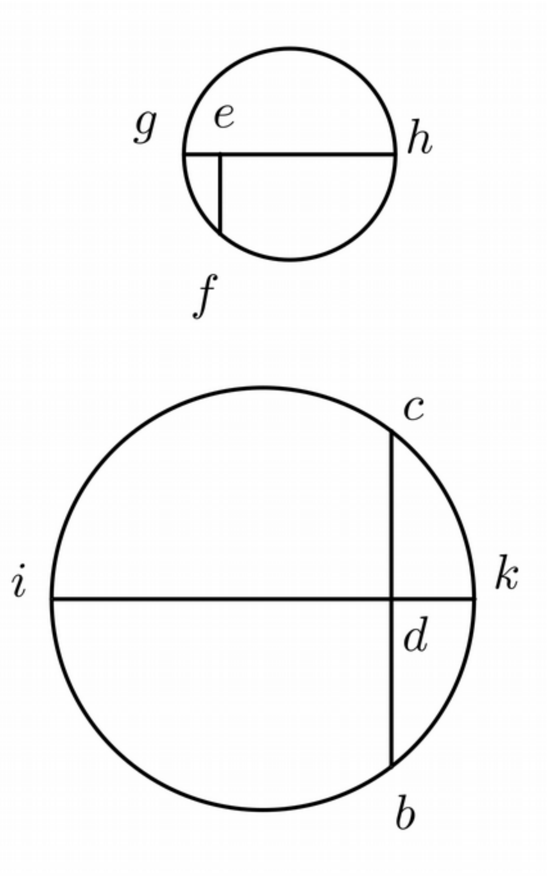


Differenze / stranezze / difficoltà

- Carattere antico
- Parole con significato diverso: passioni,
- Ortografia diversa: sezzioni, havemmo …
- Notazione matematica: mancanza di simbologia matematica, lettere minuscole per denotare i punti …
- …

Dimostrazione





TESI:
$bd^2{:}fe^2 = ad{:}ae$

DIM:

$fe^2 = ge \times eh$
$bd^2 = id \times dk$
$bd^2{:}fe^2 = ge \times eh{:}\ id \times dk$

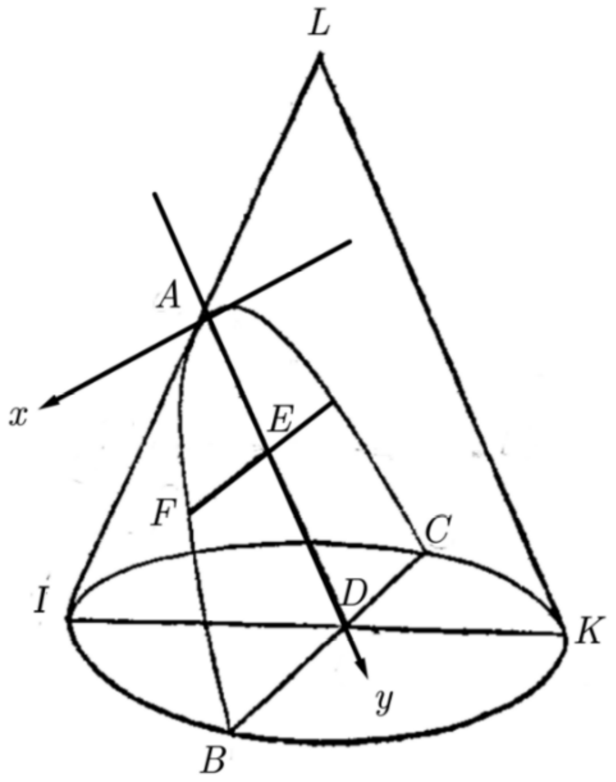
Ma $eh = dk$ e quindi

$bd^2{:}fe^2 = ge{:}id$

Per triangoli simili
$ge{:}id = ad{:}\ ae$ CVD

E’ la nostra parabola?

- Come “riconoscerla” nell’equazione cartesiana?
- Attività in classe: scelta di un sistema di riferimento adeguato
- $BD^2:FE^2=AD:AE$
- $x_1{}^2:x_2{}^2=y_1:y_2$
- $x_1{}^2:y_1=x_2{}^2:y_2$
- $y_1:x_1{}^2=y_2:x_2{}^2=\text{costante}$
- $y=kx^2$



La tangente nella matematica greca

- Come è definita? Euclide; *Elementi*, libro III, def. 2:

  > È detta essere tangente a un cerchio una retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio.

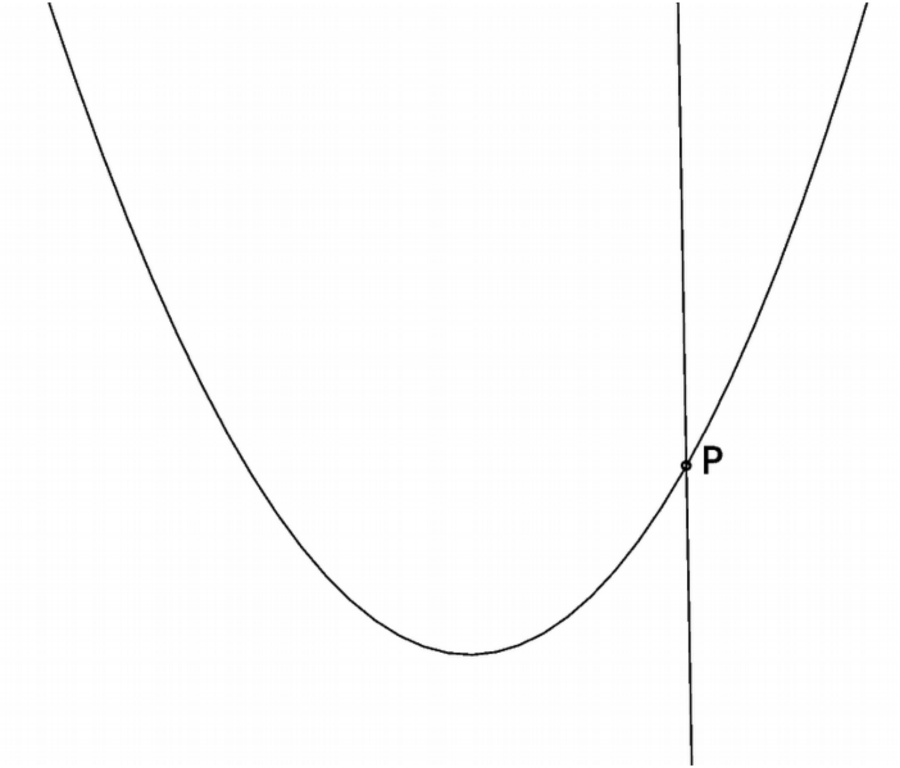
  Definizione legata all'incontro fra retta e figura curva.

- Riformulazione: una retta che incontra la circonferenza in un solo punto è la tangente alla circonferenza in quel punto

E per la parabola?

- Va bene la stessa definizione? Figura infinita ...

Non basta più Euclide: la tangente deve lasciare tutta la curva da una parte (per la circonferenza era scontato)

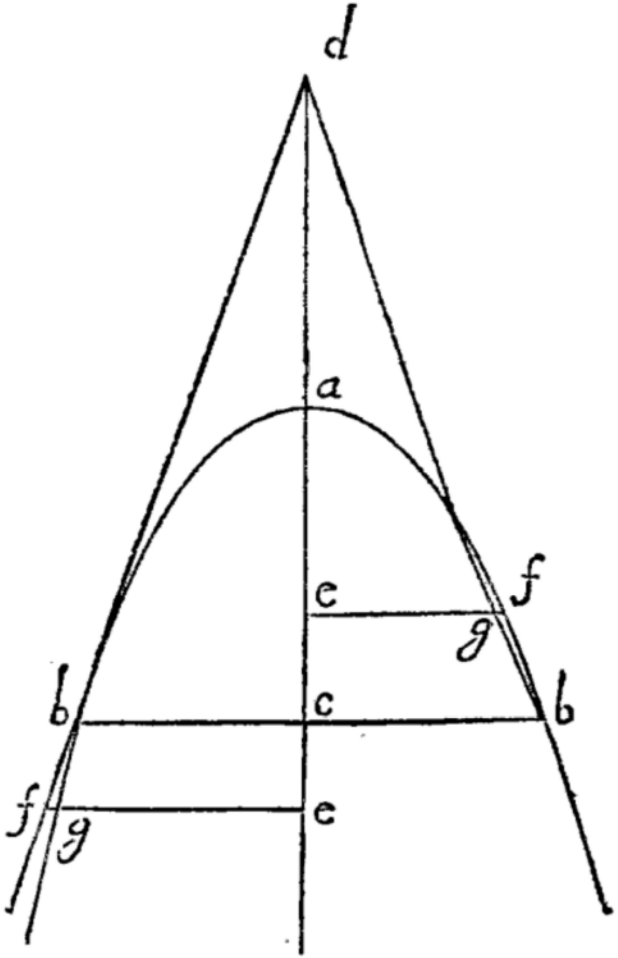


Per la parabola come posso tracciare la tangente?

- Leggiamo ancora Galilei
- Dimostrazione per assurdo
- Più difficile della precedente
- ....

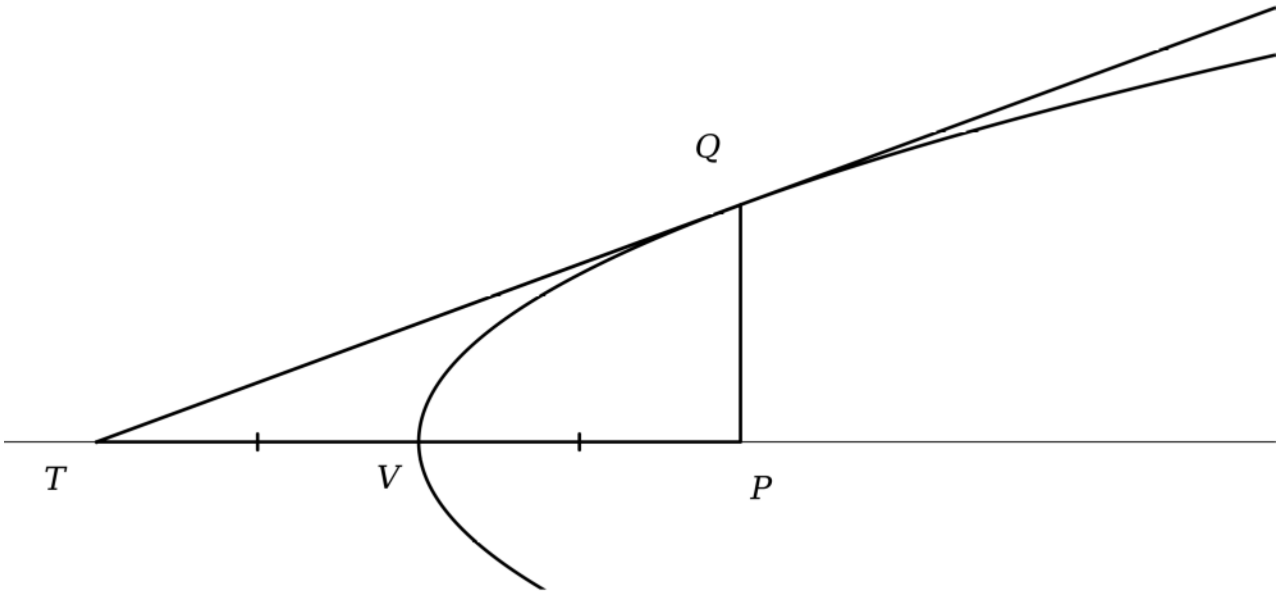
Il testo di Galilei

mo manifeſta. Segniamo la Parabola, della quale ſia prolungato fuori l'aſſe ca *in* d. *e preſo qualſiuoglia punto* b, *per eſſo intendaſi prodotta la linea* bc *parallela alla baſe di eſſa Parabola. E poſta la* da *eguale alla parte dell' aſſe* ca, *dico, che la retta tirata per i punti* d,b, *non cade dentro alla Parabola, mà fuori, ſi che ſolamente la tocca nell' iſteſſo punto* b. *Imperò che, ſe è poſſibile, caſchi dentro ſegandola ſopra, ò prolungata ſegandola ſotto. Et in eſſa ſia preſo qualſiuoglia punto* g *per il quale paſſi la retta* fge. *E perche il quadrato* fe *è maggiore del quadrato* ge, *maggior proporzione haurà eſſo quadrato* fe *al*



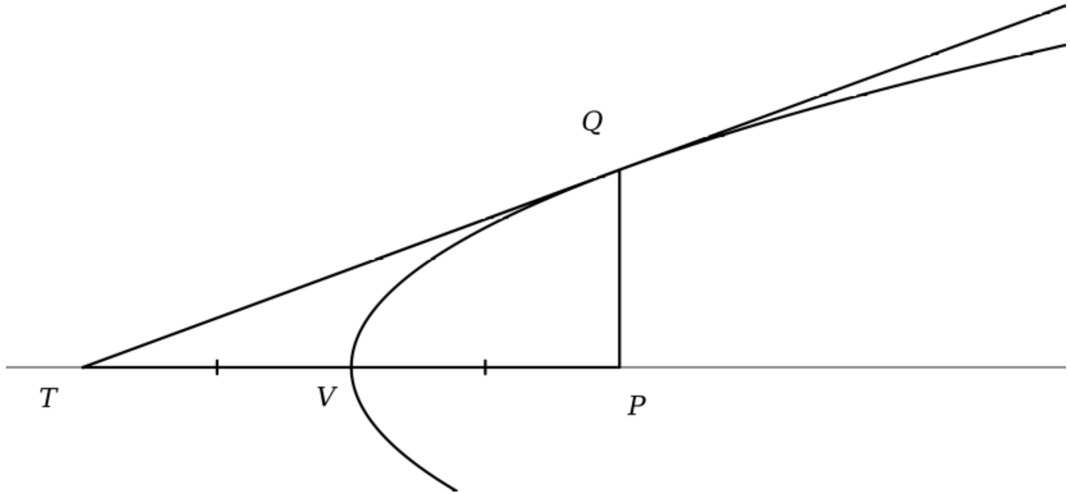
Parabola: come si traccia la tangente?

Problema: Data una parabola e un punto ad essa appartenente tracciare la tangente alla curva in quel punto.



Si usa il teorema dimostrato da Galileo

Sia data una parabola con vertice *V* e un punto *Q* sulla parabola. Sia *P* la proiezione di *Q* sull'asse della parabola. Se si prende un punto *T* sull'asse, fuori della curva, tale che *TV* = *VP* allora la retta *TQ* è tangente alla parabola.



Applicazione ad esercizi del libro di testo Bergamini

- Usare il teorema sulla tangente per affrontare qualche esercizio da libri di testo del liceo scientifico (Bergamini, Sasso).

Es. 1 (Sasso)

Determina la tangente a $y=2x^2-4x$ nel suo punto Q di ascissa 3

1) si determinano le coordinate del vertice V(1,-2)
2) Si determinano le coordinate del punto Q(3,6)
3) Si trova il punto T, simmetrico rispetto a V.
4) La retta tangente è la retta passante per T e Q

/home/belle/Dropbox/Pisa/Interventi_Congressi/2021_Mathesis_Ferrara/es_1.ggb

Es. 2 dal Baroncini (modificato)

Determina la tangente alla parabola con asse orizzontale avente vertice V(1,1) passante per il suo punto Q(4,4).

Stessa procedura di prima.

1) Si determina Q’ la proiezione di Q sull’asse della parabola
2) Si trova T simmetrico di Q’ rispetto a V
3) La retta tangente passa per T e Q.

/home/belle/Dropbox/Pisa/Interventi_Congressi/2023_Ferrara_Liceo_matematico/es_2.ggb

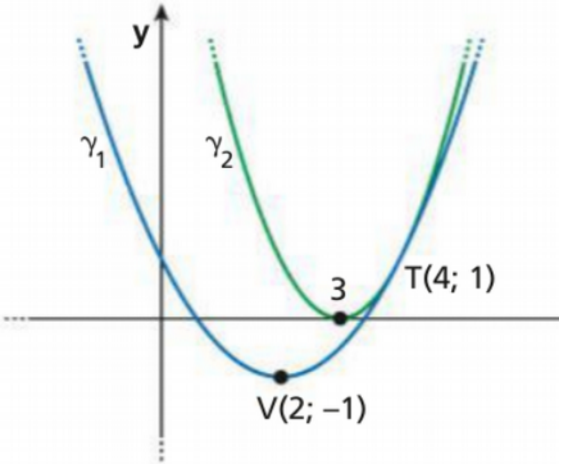
Es. 3 dal Baroncini

PROVA D

a. Dal grafico deduci l'equazione delle parabole γ_1 e γ_2 e trova l'equazione della tangente comune in T.

b. Determina il punto di intersezione di γ_2 con l'asse y e sull'arco AT trova quale punto C forma il triangolo ACT di area 6.

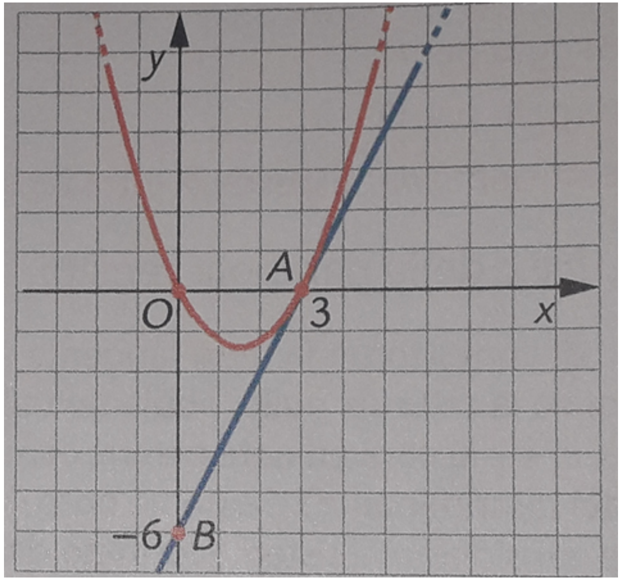
c. Scrivi l'equazione del fascio di parabole generato da γ_1 e γ_2; trova il luogo descritto dai vertici e rappresentalo graficamente.



ome/belle/Dropbox/Pisa/Interventi_Congressi/2023_Ferrara_Liceo_matematico/es_3.ggb

Es. 4 dal Sasso

Determina il vertice della parabola nella seguente figura. AB è la retta tangente alla parabola in A.



/home/belle/Dropbox/Pisa/Interventi_Congressi/2023_Ferrara_Liceo_matematico/es_

E’ la nostra parabola?

- Come “riconoscerla” nell’equazione cartesiana?
- Attività in classe: scelta di un sistema di riferimento adeguato
- $BD^2 : FE^2 = AD : AE$
- $x_1^2 : x_2^2 = y_1 : y_2$
- $x_1^2 : y_1 = x_2^2 : y_2$
- $y_1 : x_1^2 = y_2 : x_2^2 = \text{costante}$
- $y = kx^2$