Da Scipione Del Ferro a Rafael Bombelli: i progressi dell’algebra in Italia nel XVI secolo

Alessandra Fiocca

Università di Ferrara

L'ALGEBRA OPERA

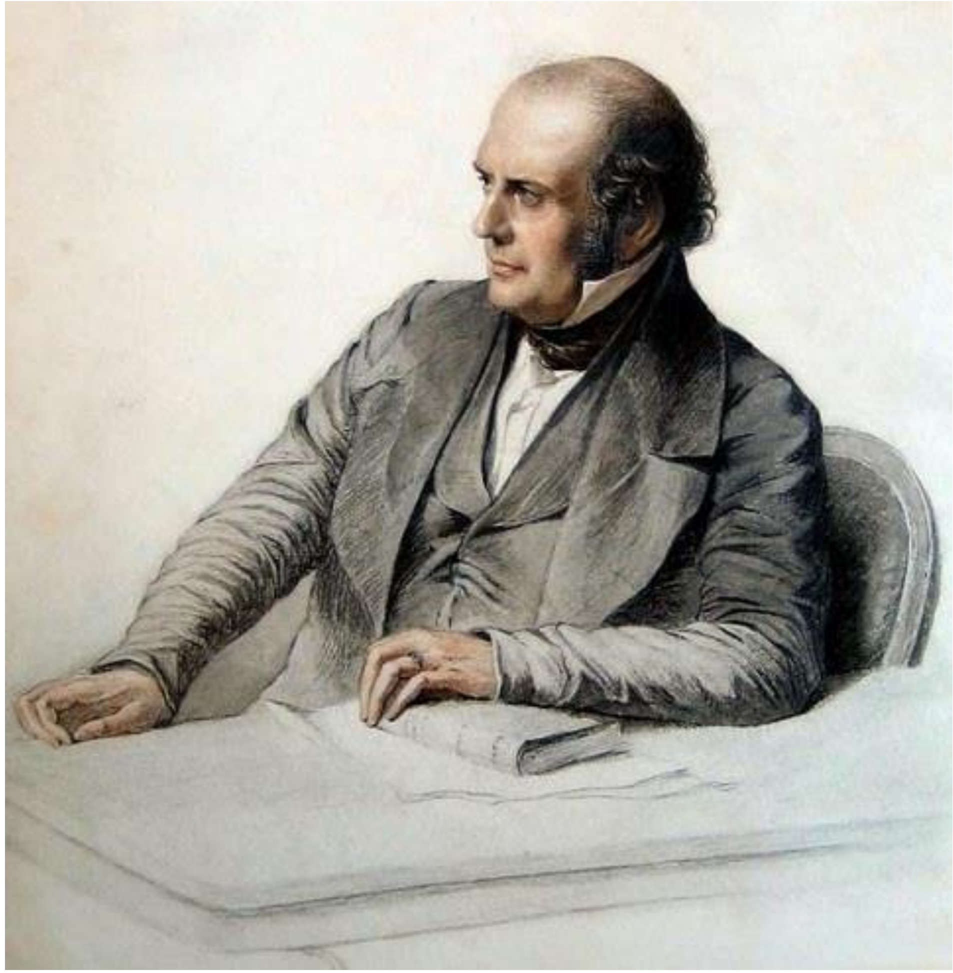
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.

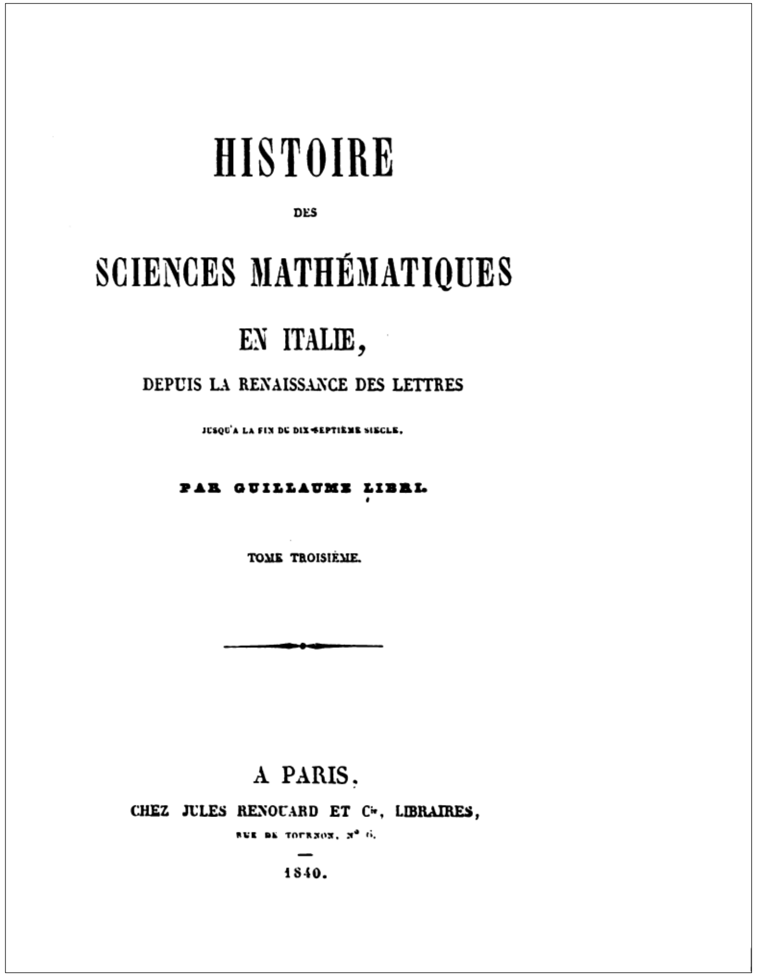
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.

Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.

Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.





HISTOIRE

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

EN ITALIE,

DEPUIS LA RENAISSANCE DES LETTRES

JUSQU'A LA FIN DU DIX-SEPTIÈME SIECLE,

PAR GUILLAUME LIBRI.

TOME TROISIÈME.

A PARIS,

CHEZ JULES RENOUARD ET C^ie^, LIBRAIRES,

RUE DE TOURNON, N° 6.

—

1840.

Guglielmo Libri in his *Histoire des Sciences Mathématiques en Italy* (1840) wrote:

Bombelli’s *Algebra* is divided into three books. The first contains the basic elements, calculation with radicals, and with imaginary numbers, the second one contains everything related to the resolution of equations up to the fourth degree, the third is a collection of problems, among which there are some of great difficulty regarding indeterminate analysis.

In this treatise, all the knowledge of algebra of that time is expounded, the proofs are rigorous and complete and the science has a systematic aspect. The notations easily allow us to make calculations and it is well known to what extent notations influenced the development of algebra. The calculation with radicals is fully exposed, as well as the general theory of imaginary quantities, of which the author makes an application to the so-called “irreducible case” (“caso irriducibile”).

Bombelli was the first to have generally enunciated the reality of the three roots of an algebraic equation of third degree when all three present themselves in an imaginary form. In many cases he verified this claim by directly extracting the root of the two binomials.

Bombelli’s work has contributed in no little way to the progress of mathematics. For the first time we see the rigor of synthesis applied to algebraic proofs.

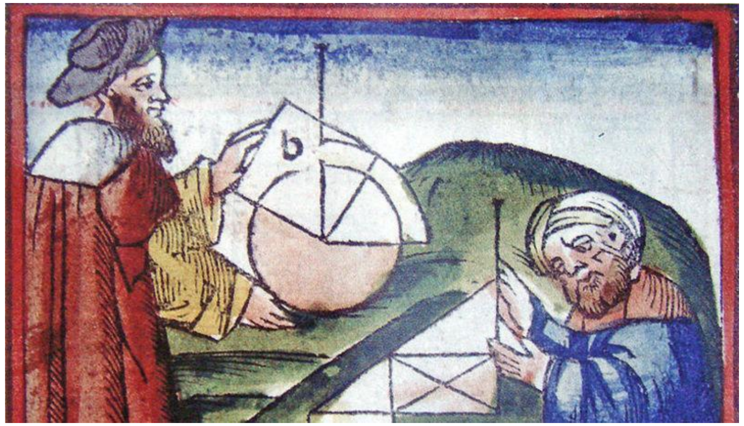
Jacopo de Barbari, ritratto di Luca Pacioli

Summa de
Arithmetica geo
metria. Proportioni: et proportionalita:

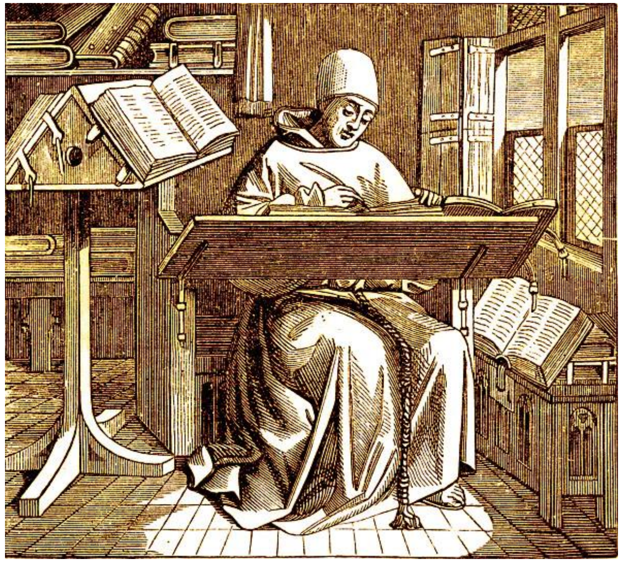
Continentia de tutta lopera.

L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalità*, Venezia, 1494

Ingresso dell’algebra in Europa

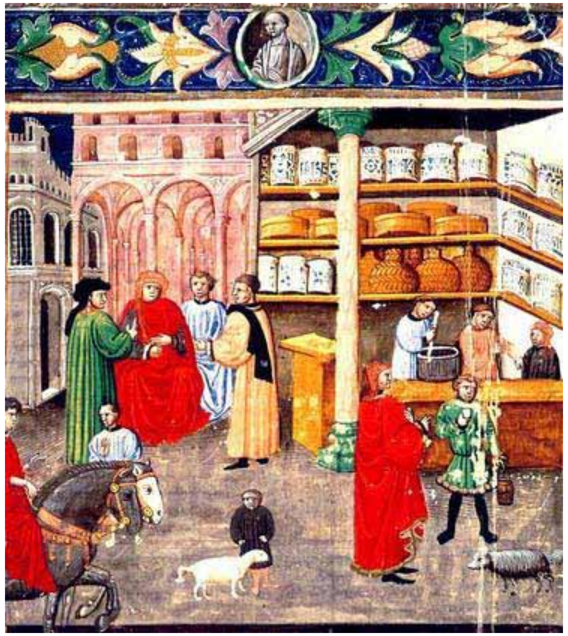


Tradizione araba **Al-Khwarizmi**, *Al-jabr w’al muqabala*



Copisti delle scuole ecclesiastiche

Le Università del Medioevo



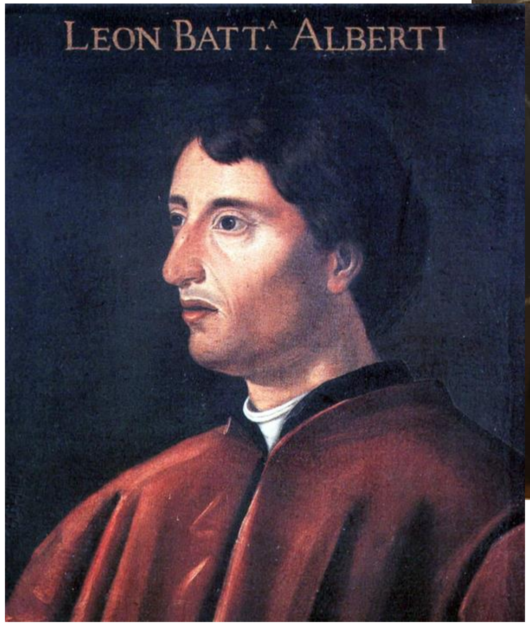
Attività mercantili

Alcuni studiosi tra cui Gerberto di Aurillac, (papa Silvestro II dal 999 al 1003)

Il *Liber Abaci* di Leonardo Pisano (1202): il primo trattato di aritmetica e algebra dell’Occidente Latino

Le «scuole d’abaco»: un fenomeno italiano

Disputa tra abacisti e algoristi
Gregor Reisch, *Margarita philosophica*, 1508



L’Università di Bologna alla fine del XIV secolo: un nuovo insegnamento per la nuova aritmetica

1496

Scipione Del Ferro

I protagonisti

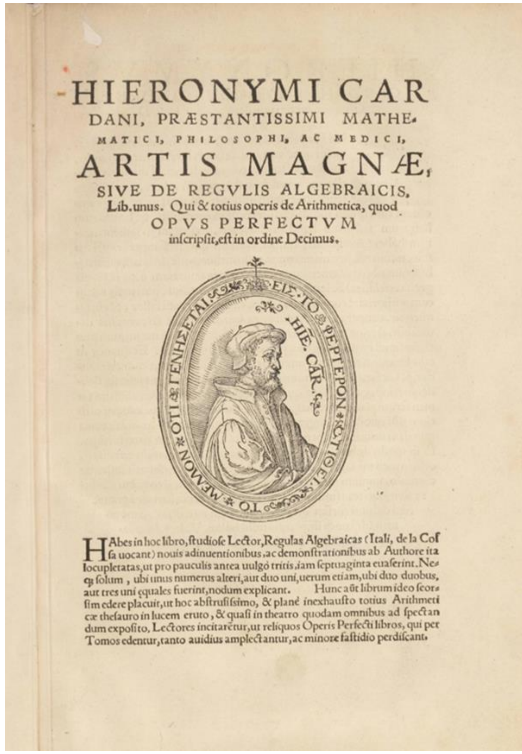
Scipione del Ferro (Bologna 1465-1526)

Niccolò Tartaglia (Brescia 1499 circa-1557)

Girolamo Cardano (Pavia 1501-1576)

Ludovico Ferrari (Bologna 1522-1565)

Rafael Bombelli (Bologna 1526-1572 circa)



HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

G. Cardano, *Ars Magna*, 1545

Niccolò Tartaglia

Al-Khwarizmi *Al-jabr w'al-muqabala*

I sei tipi di equazioni algebriche di primo e di secondo grado

- *quadrati uguale a cose* $ax^2 = bx$
- *quadrati uguale a numero* $ax^2 = c$
- *cose uguale a numero* $ax = c$
- *quadrati e cose uguale a numero*

  $ax^2 + bx = c$
- *quadrati e numero uguale a cose*

  $ax^2 + c = bx$
- *cose e numero uguale a quadrati*

  $bx + c = ax^2$

con a, b, c numeri positivi

La regola per risolvere l'equazione

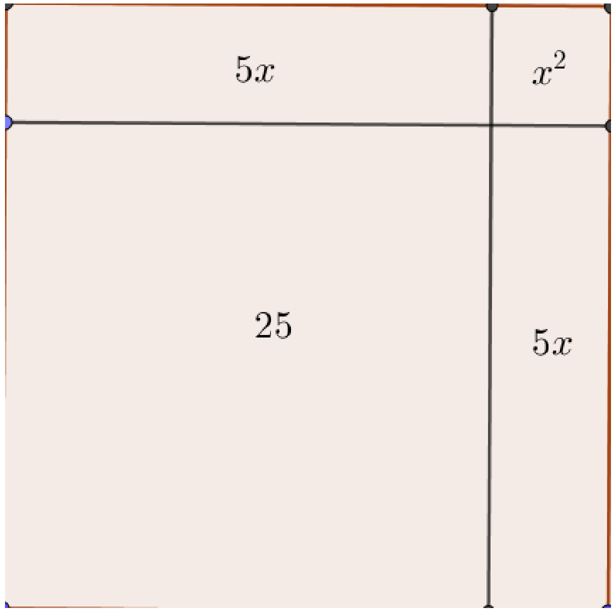
$x^2 + 10x = 39$

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2} = 3$$

$x^2 + px = q \qquad p, q > 0$

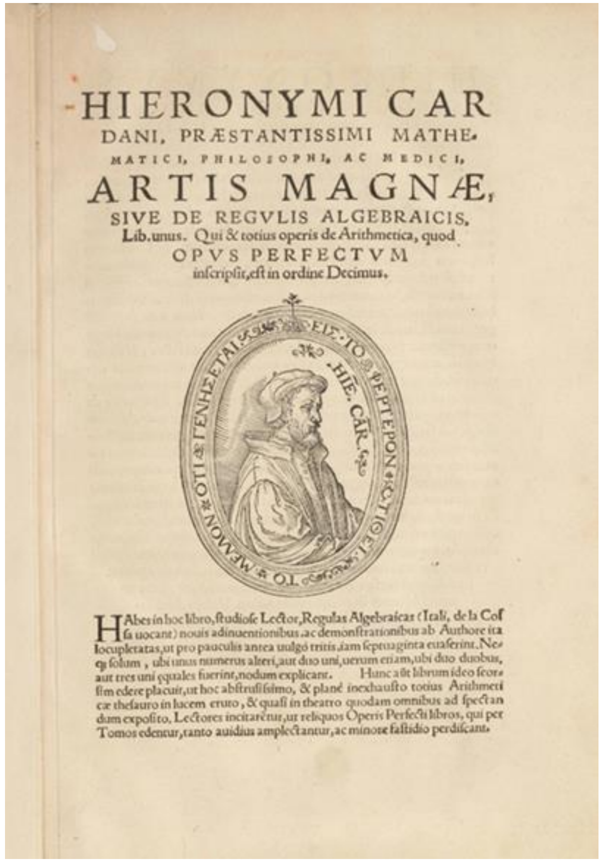
$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

Il completamento del quadrato



G. Cardano, ***Ars Magna*** (1545)

La formula risolutiva per equazioni di terzo grado



- *cubo e cose uguale a numero* $x^3 + ax = b$
- *cubo e numero uguale a cose* $x^3 + b = ax$
- *cubo uguale a cose e numero* $x^3 = ax + b$

con a, b numeri positivi

$x^3 + ax + b = 0$ non veniva mai scritta

con la sostituzione $y = x + \frac{a}{3}$ l'equazione $x^3 + ax^2 + bx = c$ si trasforma in una equazione priva del termine di secondo grado.

Niccolò Tartaglia

Quando chel cubo con le cose apresso
Se aguaglia a qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che'el lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto.
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale.

$$x^3 + px = q$$

$$u^3 - v^3 = q$$

$$u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$x = u - v$$

In el secondo de codesti atti
Quando chel cubo restasse lui solo
Tu osserverai quest'altri contratti:
Del numer farai due tal parti a volo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo.
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal summa sarà il tuo concetto.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solve col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi,
Nel mille cinquecente quatro e trenta
Con fondamenti ben saldi e gagliardi
Nella città dal mar intorno centa.

$$x^3 = px + q$$

$$u^3 + v^3 = q$$

$$u^3 v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$x = u + v$$

$$x^3 + q = px$$

Venezia 1534

Completamento del cubo

$$x^3 + 6x = 20$$

$\boldsymbol{6x = 3 \times 2x}$

Posto $\boldsymbol{x = u - v}$

In figura i tre parallelepipedi hanno dimensioni $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x = u - v}$

dunque

$$u \times v = 2$$

ovvero

$$u^3 \times v^3 = 8 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 \text{ (seconda condizione di Tartaglia)}$$

$\boldsymbol{x^3 + 6x = (u - v)^3 + 3 \times uv\,(u - v)}$ è chiamato "**gnomone**".

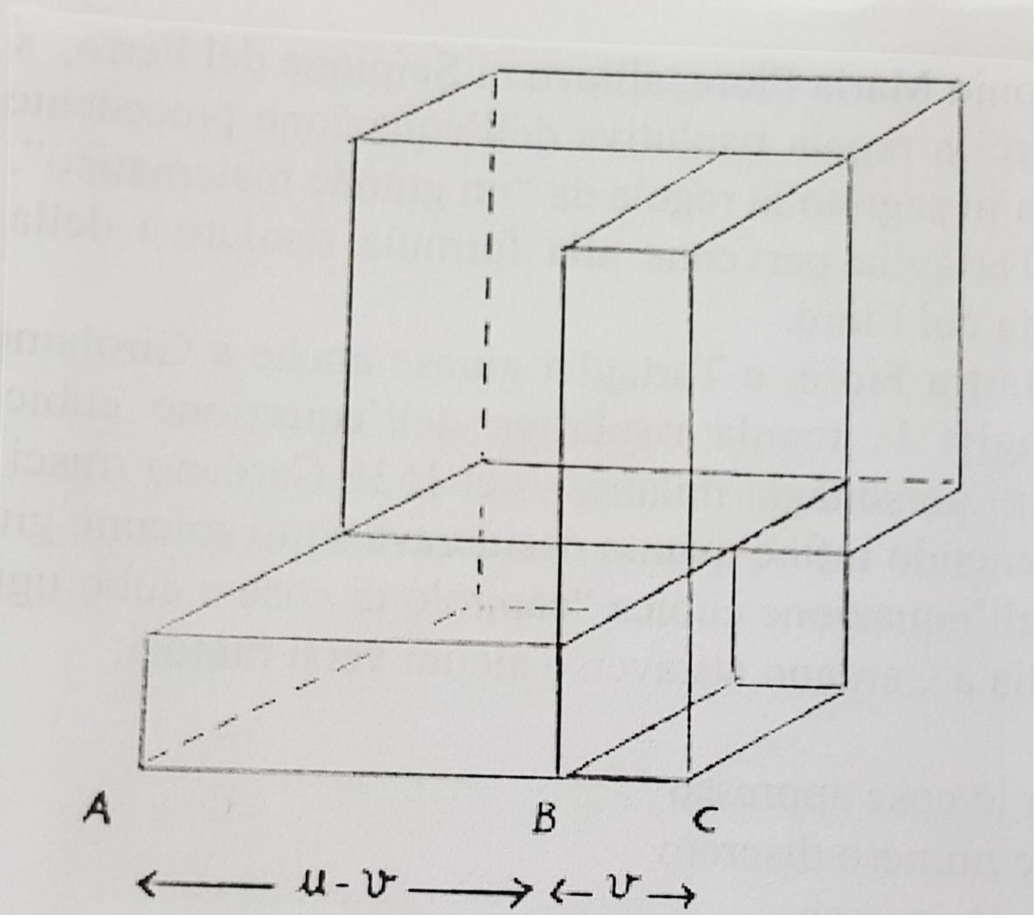
Lo "**gnomone**" vale 20.

Per completare il cubo di spigolo $AC = u$, è necessario aggiungere allo "**gnomone**" il cube v^3

$$u^3 = (u - v)^3 + 3 \times uv(u - v) + v^3$$

cioè

$$u^3 = 20 + v^3 \text{ (prima condizione di Tartaglia)}$$



AC= u
AB=x=u-v
BC=v

$x^3 + 6x = 20$

Posto $x = u - v,$ se u e v risolvono il sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{u^3 - v^3 = 20} \\ \boldsymbol{u^3 v^3 = 8} \end{cases}$$

allora $x = u - v$ è soluzione dell'equazione $x^3 + 6x = 20$.

Il problema è ricondotto a determinare due numeri u^3 e $-v^3$ di cui si conoscono la somma e il prodotto (20 e -8). Tali numeri sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado $\boldsymbol{z^2 - 20z - 8 = 0}$, ovvero $u^3 = 10 + \sqrt{100+8}$ e $-v^3 = 10 - \sqrt{100+8}$

$$\boldsymbol{x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}}$$

Il metodo viene esteso a ogni equazione della forma $x^3 + px = q$.

La procedura è la seguente:

- si prendano il cubo di $\frac{p}{3}$ e il quadrato di $\frac{q}{2}$ e si sommino tra loro $(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$
- alla radice quadrata di quest'ultima espressione si aggiunga $\frac{q}{2}$ $\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}$
- si estragga la radice cubica di quest'ultima espressione e si sottragga ad essa la radice cubica del suo «residuo» (ovvero di $\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}$)

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2} - \frac{q}{2}}}$$

Il caso irriducibile dell'equazione cubica

Per risolvere l'equazione $x^3 = px + q$, il metodo di Cardano consiste nel porre

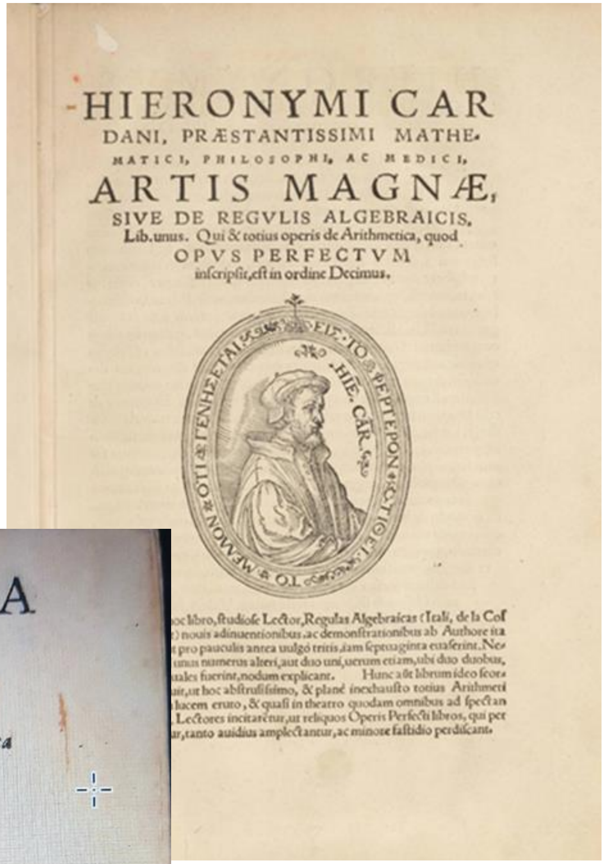
$$x = u + v$$

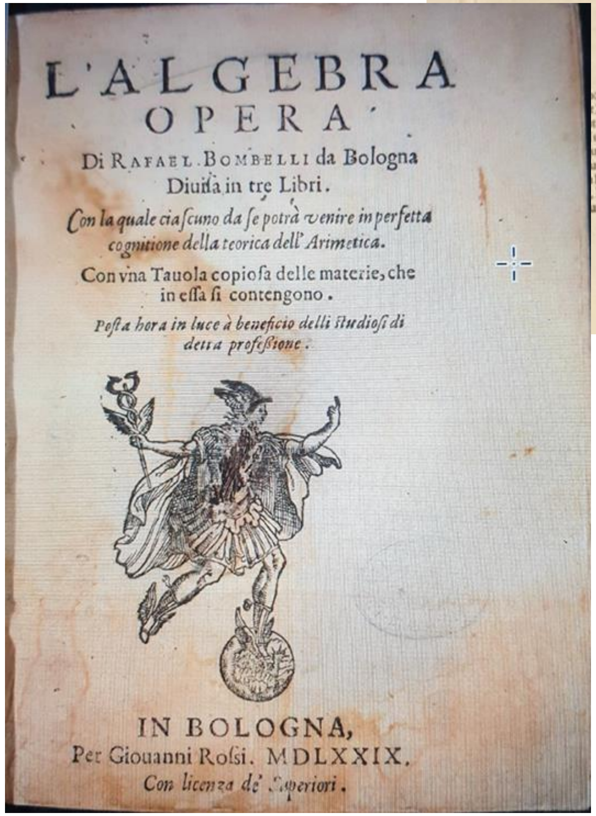
col procedimento descritto si arriva alla formula risolutiva :

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Il **caso irriducibile** si presenta quando sotto radice quadrata compare un numero negativo.

Nell' *Ars Magna* Cardano evita accuratamente questo caso, mentre nell'*Algebra* di Bombelli il caso è trattato e risolta la difficoltà.





L'Algebra di Bombelli: libro primo

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm b$ (chiamati *binomi* e *recisi*)

$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm b}$ (*radici legate*)

$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ (*binomi cubici*)

$\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}$ (*residuo cubico*) (se moltiplicato col corrispondente binomio cubico si ottiene un numero razionale)

$\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm b}$ (*radici cubiche legate*)

Risolve il problema «di trovare il lato cubico del *binomio* $\sqrt{n} \pm m$ », cioè trasforma l'espressione $\sqrt[3]{\sqrt{n} \pm m}$ nell'espressione $\sqrt{v} \pm u$

Infine per risolvere il **caso irriducibile** introduce i numeri complessi e le regole di calcolo con tali nuovi enti aritmetici

L’aritmetica con gli immaginari

$\sqrt{-1}$ è chiamata *più di meno*

$-\sqrt{-1}$ è chiamata *meno di meno*

$$(+) \times (+i) = +i$$
$$(-) \times (+i) = -i$$
$$(+) \times (-i) = -i$$
$$(-) \times (-i) = +i$$
$$(+\boldsymbol{i}) \times (+\boldsymbol{i}) = -$$
$$(+i) \times (-i) = +$$
$$(-i) \times (+i) = +$$
$$(-i) \times (-i) = -$$

$$i^2 = -1$$

L'Algebra di Bombelli: libro secondo

$$x^3 = 15x + 4$$

La formula cardanica contiene la radice «*sofistica*» $\sqrt{-121}$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

E' facile verificare che $x = 4$ è una radice reale dell'equazione. Ma come ottenerla dalla formula?

Nel primo libro Bombelli si era posto il problema di «trovare il lato cubico di un *binomio*», ovvero di trasformare $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{-b}}$ nella forma u $\pm \sqrt{-v}$ $(b, v$ numeri positivi).

Bombelli osserva che allora *u* e *v* devono soddisfare le due condizioni $\begin{cases} a = u^3 - 3uv \\ \sqrt[3]{a^2+b} = u^2 + v \end{cases}$

Per trovare *u*, *v* propone il seguente metodo **«*per pratica*»:**

Quando $a = 2$ e $b = 121$, $\sqrt[3]{a^2+b} = \sqrt[3]{4+121} = 5$ e le due condizioni diventano $\begin{cases} 2 = u^3 - 3uv \\ 5 = u^2 + v \end{cases}$

Così deve essere u^2minore di 5 e u^3 maggiore di 2 e **«*a tentoni*»** $u = 2$ e $v = 1$.

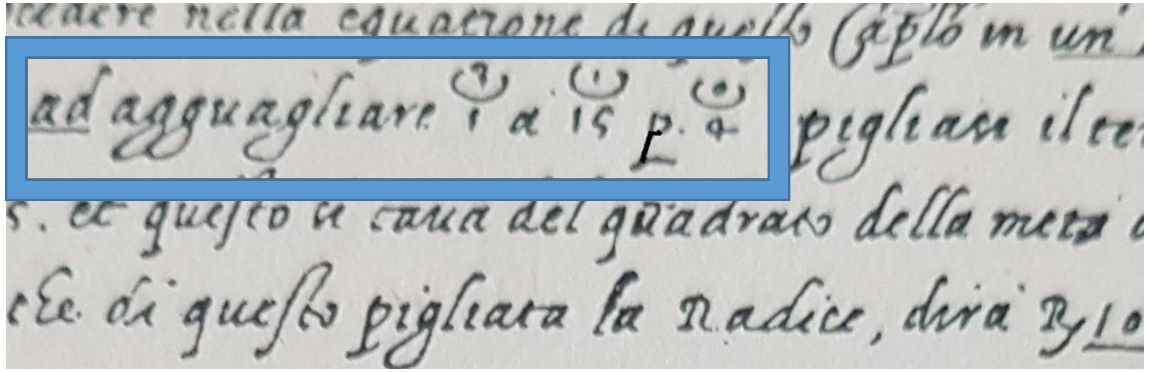
“E con questa regola – afferma Bombelli –benché non sia generale, ma più tosto pratica, sarà quasi impossibile, quando dette radici haveranno lato, non lo trovare”.

nel caso dell′equazione $x^3 = 15x + 4$,

$$\sqrt[3]{2+11i} = 2 + i \text{ and } \sqrt[3]{2-11i} = 2 - i$$

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = 2 + i + 2 - i = 4$$

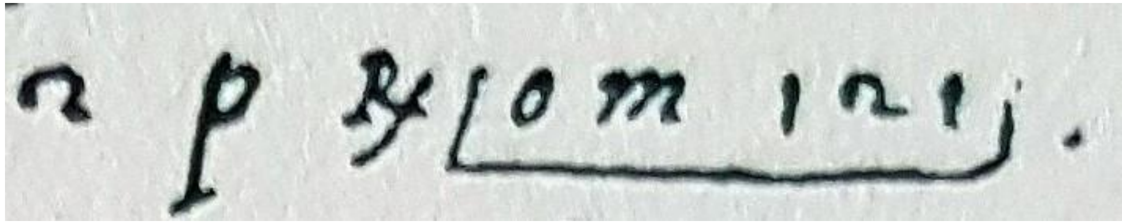
Le notazioni algebriche di Bombelli



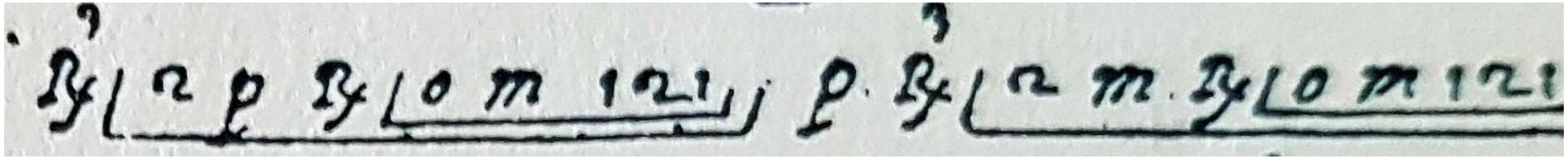
Notazione esponenziale per le potenze dell'incognita

$$x^3 = 15x + 4$$

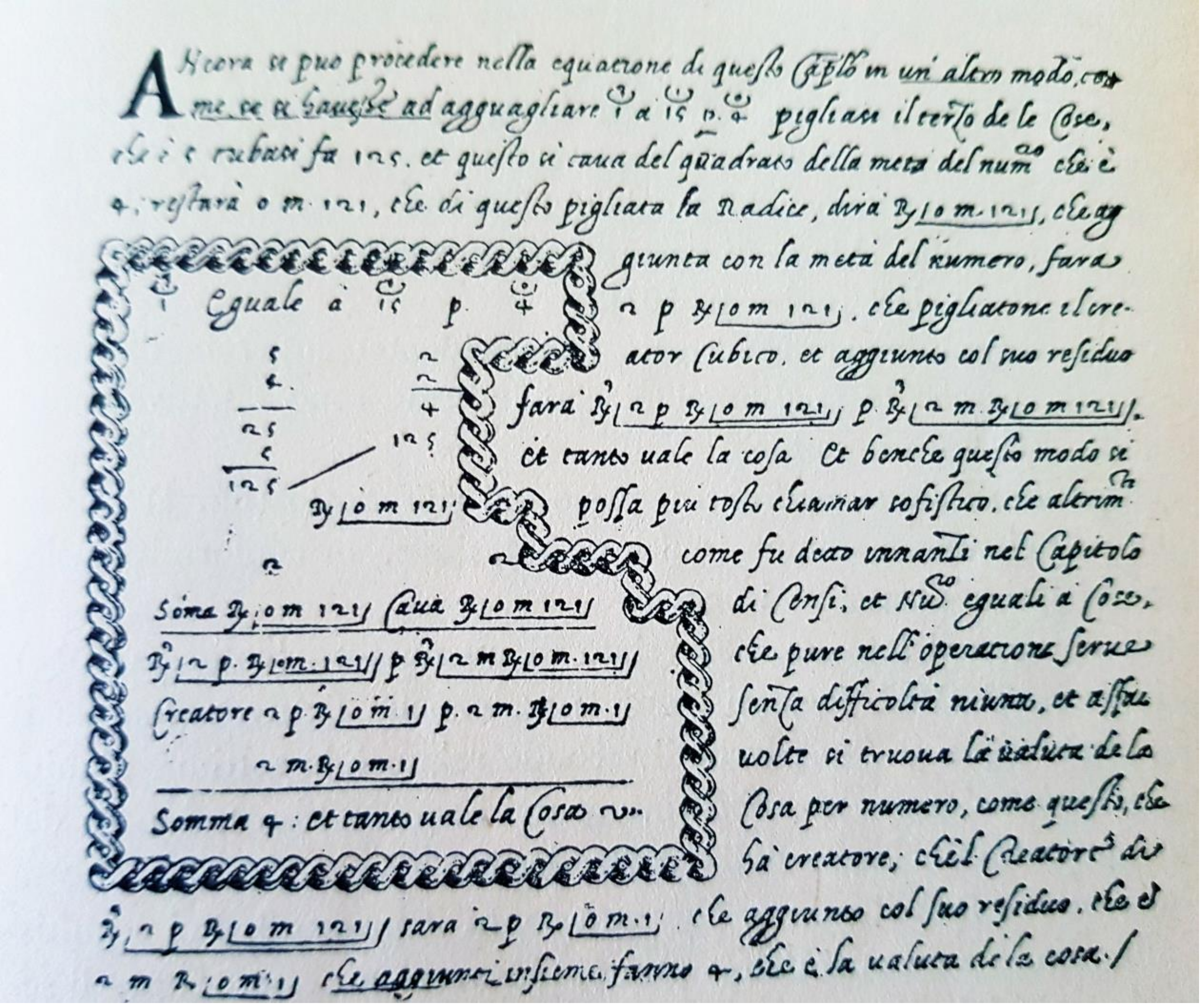
Le notazioni per le radici quadrate e cubiche



$2 + \sqrt{0 - 121}$ cioè $2 + 11i$



$\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{0 - 121}}$ cioè $\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$



Ancora se puo procedere nella equatione di questo Cap.lo in un'altro modo, come se si havesse ad agguagliare 1 a 15 p. 4 pigliasi il terzo de le Cose, che è 5 cubasi fa 125. et questo si caua del quadrato della metà del num.° che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R|0 m. 121|, che aggiunta con la metà del numero, farà 2 p R|0 m 121|. che pigliatone il creator cubico, et aggiunto col suo residuo farà R|2 p R|0 m 121|| p. R|2 m. R|0 m 121||. et tanto uale la cosa Et benche questo modo se possa piu tosto chiamar sofistico, che altrim.te come fu detto innanti nel Capitolo di Censi, et Nu.° eguali a Cose, che pure nell'operatione serue senza difficoltà niuna, et assai uolte si truoua la ualuta de la Cosa per numero, come questo, che hà creatore; che'l Creatore di R|2 p R|0 m 121|| sarà 2 p R|0 m 1| che aggiunto col suo residuo, che è 2 m R|0 m 1| che aggiunti insieme fanno 4, che è la ualuta de la cosa./

1 Equale à 15 p. 4

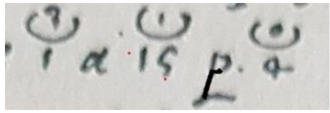
R|0 m 121|

Soma R|0 m 121| Caua R|0 m 121|

R|2 p. R|0 m. 121|| p R|2 m R|0 m. 121||

Creatore 2 p R|0 m 1| p. 2 m. R|0 m 1|

Somma 4: et tanto uale la Cosa

Ancora se puo procedere nella equatione di questo Cap[ito]lo in un altro modo, come se si havesse ad agguagliare 

[cioè x^3=15x+4]

pigliasi il terzo de le Cose che è 5, cubasi fa 125 et questo se cava del quadrato della metà del numero che è 4, restarà 0 m 121che di questo pigliasi la Radice, dirà *R*|0 *m* 121| che aggiunta con la metà del numero farà 2 *p R*|0 *m* 121| che pigliatone il creatore cubico et aggiunto col suo residuo farà

***R*^{3} |2 *p R*|0 *m* 121|| *p R*^{3} |2 *m R*|0 *m* 121||** e tanto vale la cosa.

[cioè $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{(0-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{0-121}}$**]**

Et benché questo modo se possa più tosto chiamar sofistico che altrim[en]te come fu detto innanzi nel Capitolo di Censi, et Nu[me]ro eguali a Cose, che pure nell'operatione serve senza difficoltà niuna, et assai volte si trova la valuta de la Cosa per numero, come questo che ha creatore, **che il creatore di *R*^{3} |2 *p R*|0 *m* 121|| sarà 2 *p R*|0 *m* 1|**

[cioè $\sqrt[3]{2+\sqrt{(0-121}} = 2+\sqrt{0-1}$ **]**

che aggiunto col suo residuo che è **2 *m R*|0 *m* 1|**

[cioè $2-\sqrt{0-1}$ **]**

che aggiunti insieme fanno **4** che è la valuta della cosa.