La retta tangente alla parabola fra Greci e Galileo

Riccardo Bellé
Liceo E. Fermi – Massa
Dipartimento di matematica, Università di Pisa
riccardo.belle@liceofermimassa.edu.it

Storia della matematica a scuola

Vari approcci:

- biografico/aneddotico
- analisi dei metodi del passato “reintepretati” in chiave moderna
- lettura diretta fonti storiche
- …

Alcune caratteristiche della lettura dei testi originali

- Lettura di temi presenti tra gli argomenti nel curriculum usuale della scuola
- La trattazione storica non deve essere né troppo lontana né troppo vicina a quella odierna.
- Testi accessibili (al massimo in traduzione: ma fedele!)

Obiettivi

1) Diversificare gli approcci allo stesso concetto
2) Mostrare che la matematica non è una disciplina statica ma si è modificata nel tempo
3) Provare a capire cosa c’è scritto in un’opera di contenuto matematico (non libro di testo o opera divulgativa)
4) Anche la matematica storicamente è trasmessa attraverso un **testo** come la letteratura, la storia, la filosofia ecc…

- …

Il percorso proposto

- Le sezioni coniche dei Greci (cenni)
- Concetto di retta tangente per i Greci (dalla circonferenza alla parabola)
- Descrizione di un metodo geometrico per trovare la tangente alla parabola
- Lettura di due passi collegati a quanto visto tratti dalla Giornata Quarta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Leida, 1638 di G. Galilei
- Applicazione del metodo ad esercizi per la scuola
- Possibili estensioni: altre sezioni coniche, applicazione al moto del proiettile ecc...

Prerequisiti e tempi

Prerequisiti:

- Geometria del biennio: dimostrazione per assurdo, proprietà del cerchio, similitudine di triangoli / Talete
- Coniche (almeno la parabola)

Tempi: tre/quattro incontri di 2 ore.

Percorso scalabile. Può essere, ad esempio, proposta un’attività che **introduca** le coniche seguendo questo approccio. Non faremo così nell’esposizione seguente.

Confronto con gli obiettivi attesi

- La parabola è una curva ben nota e trattata nella scuola come luogo di punti e come grafico di un trinomio di secondo grado → obiettivo 1
- La tangente alla parabola viene usualmente determinata con il metodo algebrico del “Δ=0” → obiettivo 1
- L’approccio dei Greci (ripreso da Galileo) è completamente diverso, del tutto geometrico → obiettivo 2
- Anche nel mondo greco le coniche hanno avuto un’evoluzione e Apollonio (dal quale riprenderemo alcune idee) rappresenta lo stadio finale → obiettivo 2
- Lettura della prosa (in lingua italiana) di Galileo (più nota nel caso della parte di fisica o filosofia, meno nella parte matematica) → obiettivo 3 e 4

Partiamo dal cono: come veniva definito?

Almeno due definizioni di cono nella storia della matematica greca:

1) Euclide, *Elementi*, Libro XI, definizione 18

2) Apollonio, *Coniche*, Libro I, definizione 1

Dalle due diverse definizioni derivano due diversi modi di definire le sezioni coniche

Euclide: qualche riferimento

Autore degli *Elementi* (e alcune altre opere, forse anche degli *Elementi conici,* oggi perduti … o forse mai esistiti ...)

Vissuto a cavallo fra IV-III a. C. (più verso il III secolo)

Elementi in traduzione italiana:

1) Frajese – Maccioni, UTET, Classici della Scienza, 1970

2) F. Acerbi – *Tutte le opere*, Bompiani, Il pensiero occidentale, 2007

3) Russo – Pirro – Salciccia, *Il I libro degli Elementi*, Carocci, 2017

Euclide: definizione di cono

Chiameremo **cono** la figura che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti fino a tornare alla posizione iniziale.

- Se è il cateto fisso è quello minore si ottiene un cono **ottusangolo**, se è il maggiore il cono è **acutangolo.** Se il triangolo rettangolo è isoscele il cono è rettangolo.
- **Osservazione:** il cono è a una falda; è finito; è sempre un cono retto.

I tre tipi di cono secondo Euclide

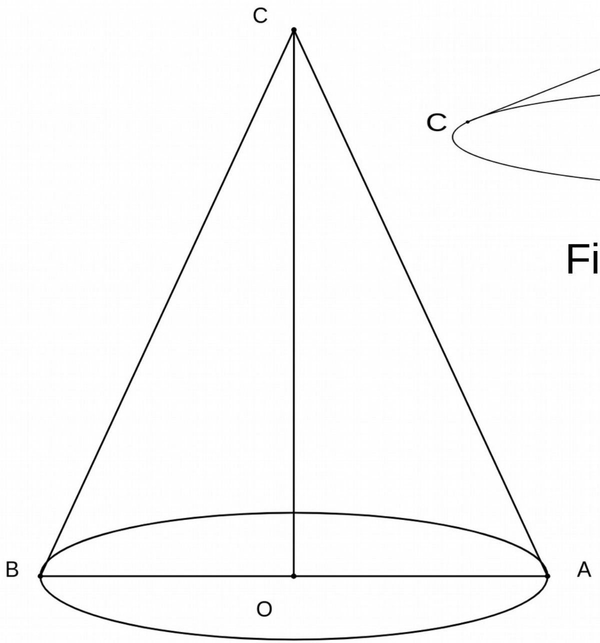


Figura 1. Cono acutangolo

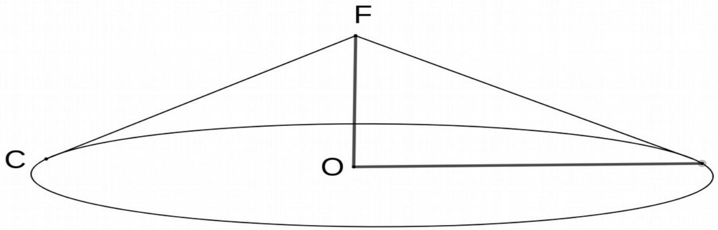


Figura 2. Cono ottusangolo

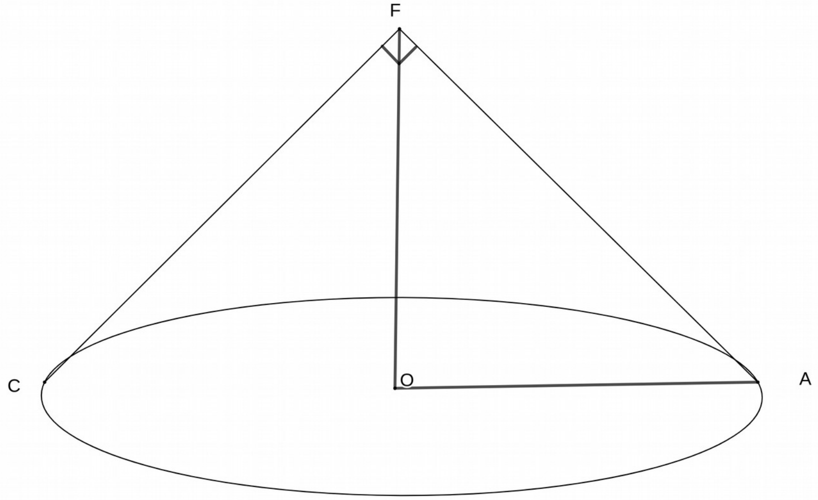


Figura 3. Cono rettangolo

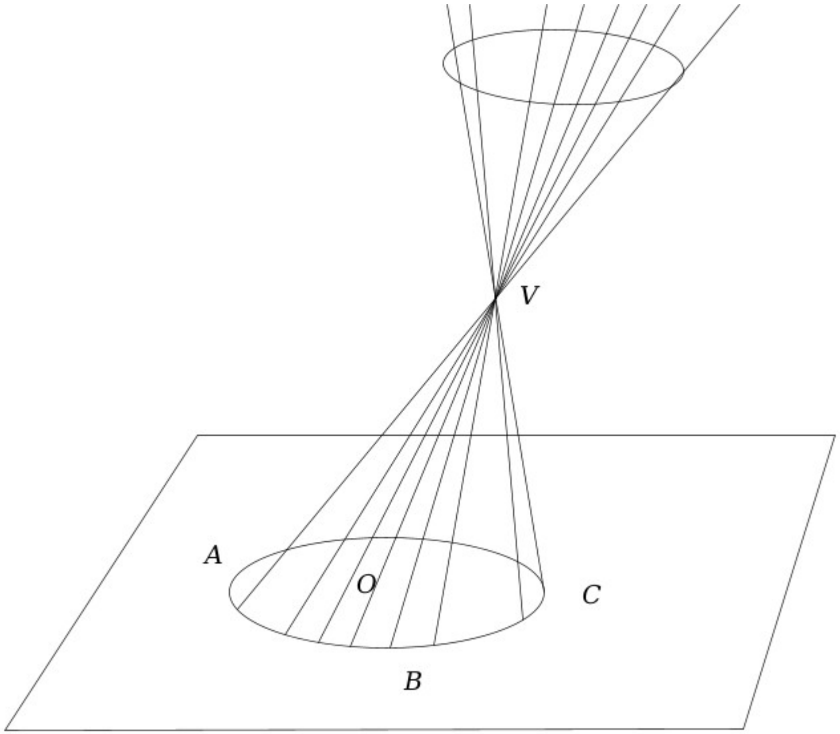
Apollonio: qualche riferimento

Nato a Perga in Asia Minore, vissuto circa mezzo secolo dopo Euclide, quindi nel III a. C.

- Autore delle *Coniche* in otto libri: oggi abbiamo solo i primi quattro in greco, il V, VI e VII in arabo e l'ottavo è perduto.
- Grande innovatore nello studio delle coniche
- Autore di molte altre opere tutte perdute (tranne una "sezione di rapporto" conservata in una traduzione araba)
- Non esistono traduzioni italiane delle *Coniche*, traduzioni inglesi.

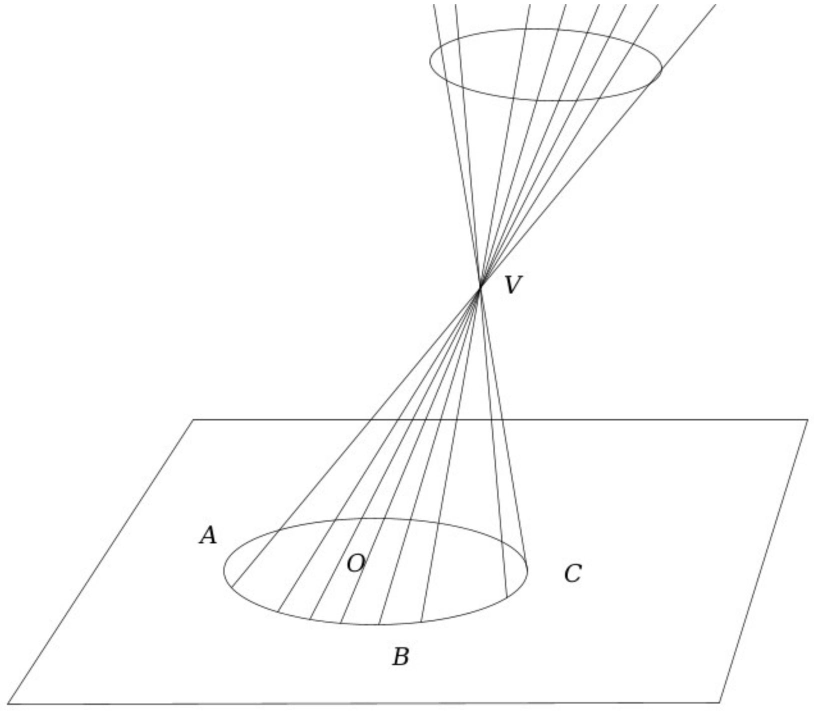
Definizione di Apollonio di cono

Data una circonferenza ABC e un punto V (fuori dal piano contenente la circonferenza); se è tracciata la retta congiungente V e un punto della circonferenza, e la retta, rimanendo V fermo, viene fatta ruotare lungo la circonferenza fino a tornare al punto di partenza, la superficie descritta dalla retta è detta **superficie conica**.



Cono di Apollonio

La superficie conica è composta da due superfici opposte verticalmente ed è estendibile indefinitamente prolungando la retta che le descrive. V è detto **vertice** e la retta che unisce il vertice V e il centro O della circonferenza è detta **asse del cono**. Il cono può dunque essere **obliquo**.



Le definizioni di cono nei testi della scuola superiore

Cono

DEFINIZIONE

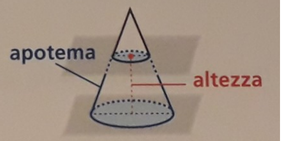
Un **cono** è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.

Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è l'**apotema** del cono.

Un cono è **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base.

Sezionando un cono con un piano parallelo alla base otteniamo un cono più piccolo, simile a quello di partenza, e un **tronco di cono**. La base del cono e il cerchio ottenuto dalla sezione sono le **basi** del tronco di cono e la loro distanza è l'**altezza** del tronco di cono.

Tronco di cono



Bergamini – Manuale 2.0 di matematica, 2020

Cono

263. La superficie generata in una rotazione completa da una semiretta g avente l'origine O sull'asse di rotazione a e non perpendicolare a questo si chiama **superficie conica circolare**. *L'origine della semiretta prende il nome di* **vertice** (fig. 214).
L'angolo acuto formato da una qualunque generatrice coll'asse dicesi angolo di semiapertura della superficie.
I meridiani di una superficie conica *sono coppie di semirette simmetriche rispetto all'asse.*
I paralleli *sono circonferenze di raggio variabile secondo la legge di proporzionalità espressa nel seguente teorema.*

264. TEOREMA I raggi dei paralleli di una superficie conica sono proporzionali alle distanze dei piani corrispondenti dal vertice.

Palatini – Faggioli, Elementi di geometria, 1992

Le sezioni coniche prima di Apollonio: Menecmo

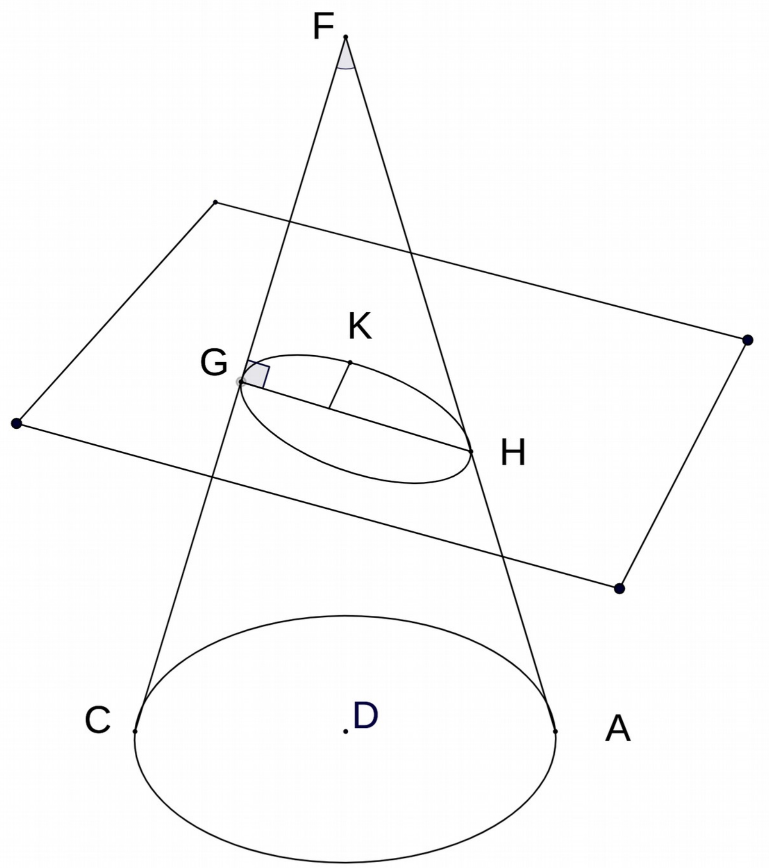
Dalla definizione di cono euclidea deriva anche la costruzione delle sezioni coniche più antica (attribuita a Menecmo):

- La sezione si ottiene tagliando con un piano **sempre** perpendicolare all’ipotenusa del triangolo rettangolo che ha generato il cono.
- A seconda che si tratti di un cono rettangolo, ottusangolo o acutangolo si ottengono rispettivamente le curve che Apollonio (e noi con lui oggi) chiamerà **parabola**, ellisse ed iperbole.
- I Greci prima di Apollonio (ad es. Archimede) chiamavano le coniche: **sezione di cono rettangolo**, acutangolo e ottusangolo.

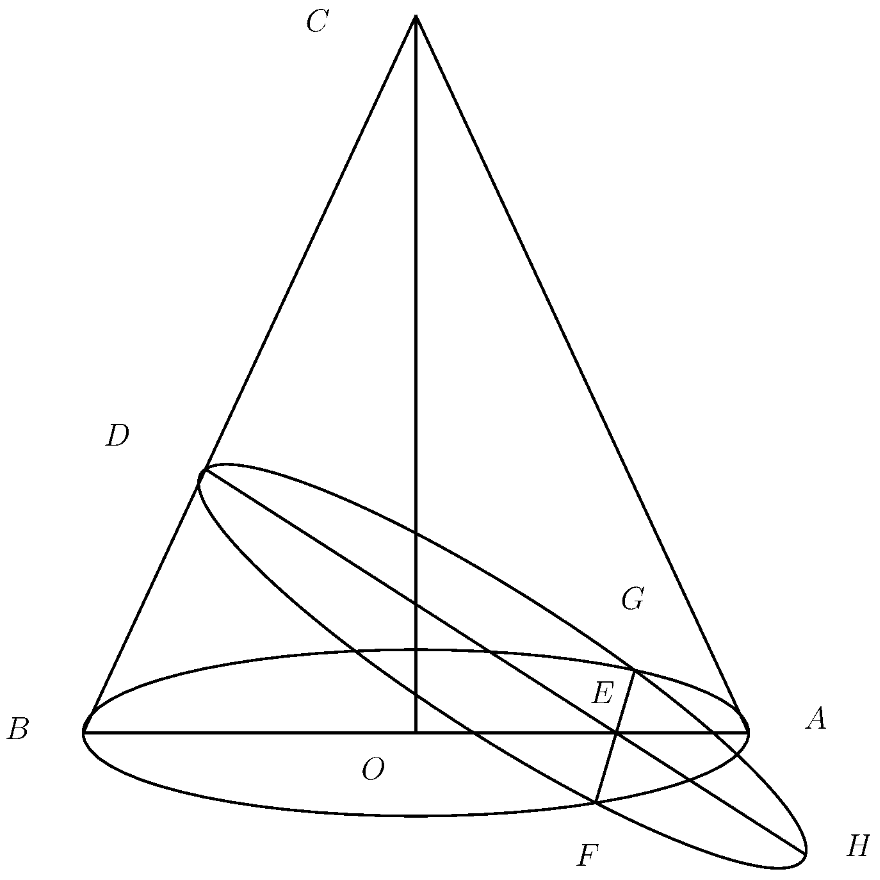
Su perché le curve da Apollonio in poi si chiamino così si veda Bellé – Napolitani *Le sezioni coniche dei Greci…* La trovate su https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Belle-Napolitani-Coniche.pdf

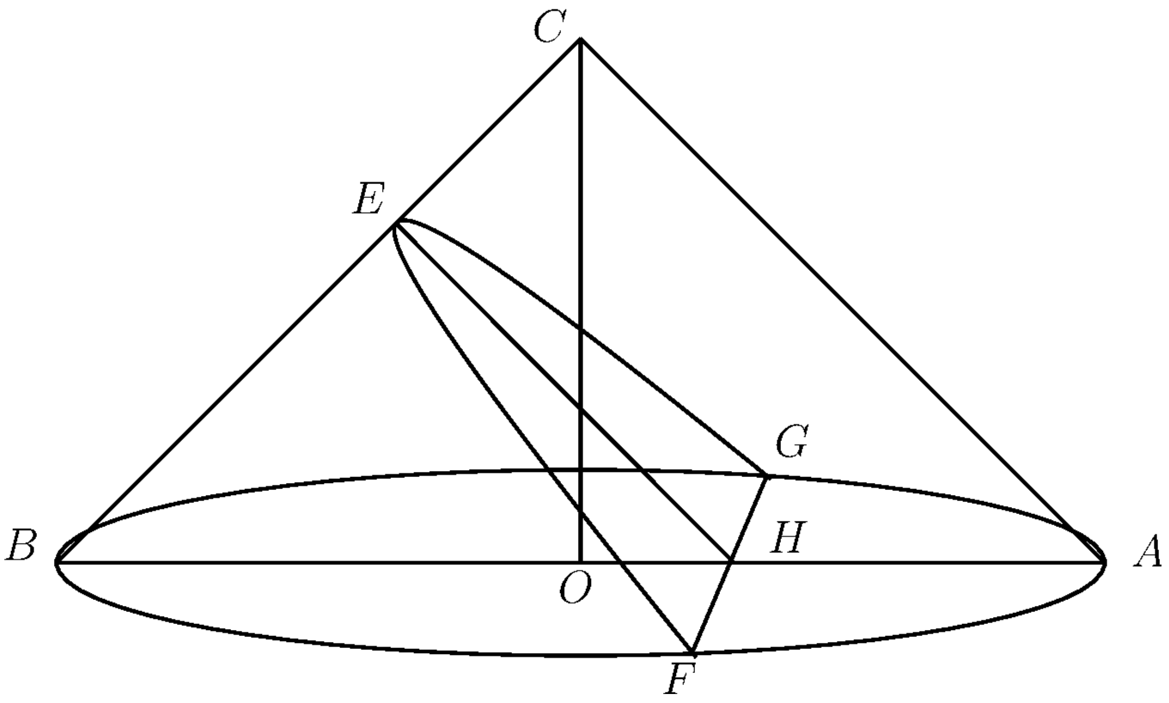
Come taglia il cono Menecmo

Sezione di cono acutangolo (oxytome). Il piano GHK è perpendicolare alla retta FC. La sezione è un'ellisse.



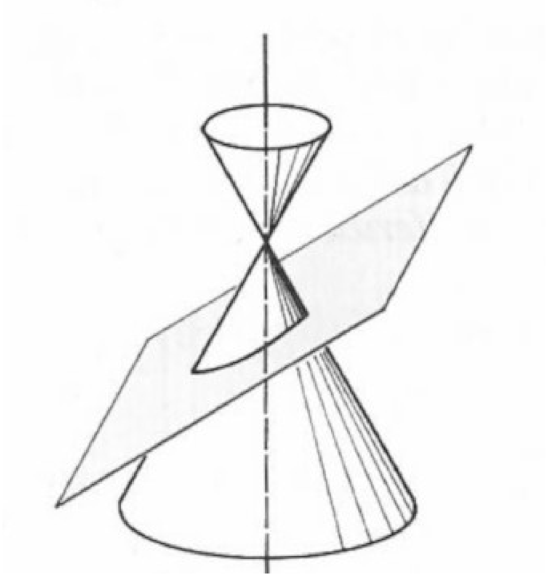
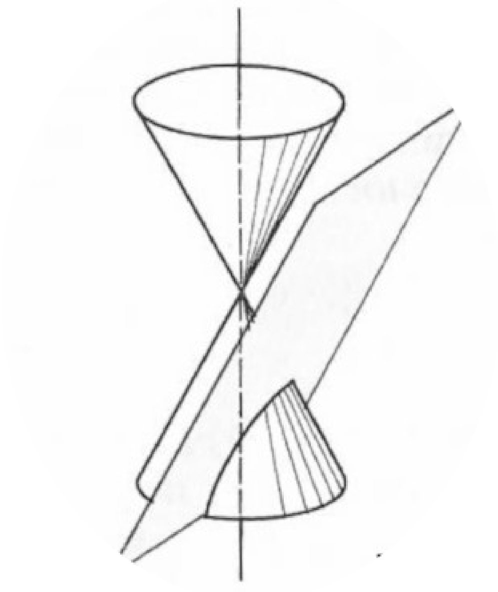
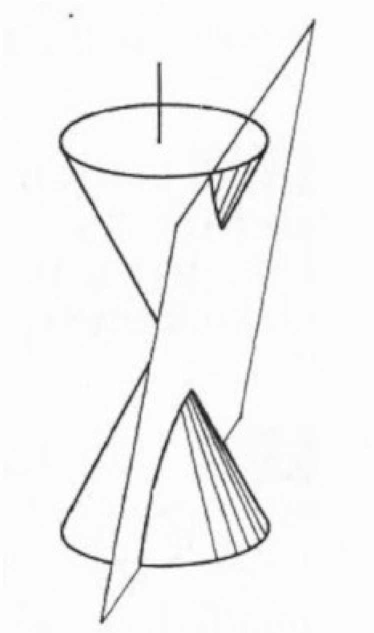
Le sezioni di Menecmo





Le sezioni di Apollonio

- Tutte e tre nello stesso cono (a seconda dell’inclinazione del piano)
- Iperbole a due rami: sezione opposta (cono a due falde)
- Sezioni infinite (o meglio indefinitamente estendibili)

Apollonio e Galileo

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze

Giornata quarta. Moto del proiettile:

> Un *proietto*, mentre si muove con un moto composto da un moto orizzontale *equabile* (uniforme) e da un moto *naturaliter* accelerato verso il basso, descrive, nel suo movimento, una linea semiparabolica.

Per poter trattare questo caso Galileo si riconduce a Apollonio.

Nota1: non è la fisica del moto che ci interessa (è uno dei possibili ampliamenti di questo percorso).
Nota2: ci occupiamo solo della parabola (possibile ampliamento: le altre sezioni, Galileo non le affronta)

Lettura testi originali: struttura dialogica

Personaggi: Sagredo, Salviati (Galileo) e Simplicio. Già presenti nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632). Dal Proemio del *Dialogo*:

> Mi trovai, molt'anni sono, più volte nella maravigliosa città di Venezia in conversazione col Sig. Giovan Francesco Sagredo, illustrissimo di nascita, acutissimo d'ingegno. Venne là di Firenze il Sig. Filippo Salviati, nel quale il minore splendore era la chiarezza del sangue e la magnificenza delle ricchezze; sublime intelletto.

Simplicio: filosofo antico, commentatore di Aristotele, viene identificato con la posizione dei filosofi aristotelici del tempo di Galileo. Ma Simplicio richiama l'aggettivo semplice, anche nel senso di sempliciotto, banale, privo di sapere…

Differenze / stranezze / difficoltà

- Carattere antico
- Parole con significato diverso: passioni,
- Ortografia diversa: sezzioni, havemmo …
- Notazione matematica: mancanza di simbologia matematica, lettere minuscole per denotare i punti ...
- ...

propria gravitate habet deorsum propensionem, indeque motus quidam emerget compositus ex equabili horizontali, & ex deorsum naturaliter accelerato: quem Projectionem voco. Cujus accidentia nonnulla demonstrabimus; quorum primum sit

THEOR. I. PROPOS. I.

Projectum dum fertur motu composito ex horizontali æquabili, & ex naturaliter accelerato deorsum, lineam semiparabolicam describit in sua latione.

Sagr. *E' forza S. Salu. in gratia di me, & anco credo io del S. Simpl. far qui vn poco di pausa; auuenga che io non mi son tanto inoltrato nella Geometria ch' io habbia fatto studio in Apollonio, se non in quanto sò ch'ei tratta di queste Parabole e dell' altre sezzioni coniche, senza la cognizione delle quali, e delle lor passioni, non credo che intendersi possano le dimostrazioni di altre proposizioni à quelle aderenti. E perche già nella bella prima proposizione ci vien proposto dall' Autore douersi dimostrare la linea descritta dal Projetto esser Parabolica, mi vò imaginando, che, non douendosi trattar d'altro che di tali linee, sia assolutamente necessario hauere vna perfetta intelligenza, se non di tutte le passioni di tali Figure dimostrate da Apollonio, almeno di quelle, che per la presente scienza son necessarie.*

Salu. *V. S. si humilia molto, volendosi far nuouo di quelle cognizioni, le quali non è gran tempo che ammesse come ben sapute: allora dico che nel trattato delle Resistenze hauemmo bisogno della notizia di certa proposizione d'Apollonio, sopra la quale ella non mosse difficoltà.*

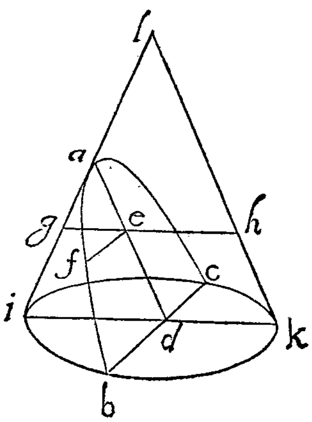
Sagr. *Può essere ò che io la sapessi per ventura, ò che io la supponesse per vna volta, tanto che ella mi bisognò in tutto quel trattato: mà qui doue mi imagino d'hauere à sentir tutte le dimostrazioni circa tali linee, non bisogna, come si dice, beuer grosso, buttando via il tempo e la fatica.*

Simp. *E' poi rispetto à me, quando bene, come credo, il S. Sagr. fusse ben corredato di tutti i suoi bisogni, à me commiciano già à giugner come nuoui gli stessi primi termini: perche se bene i nostri Filosofi hanno trattata questa materia del Moto de' Proietti, non mi souuien che si siano ristretti à definire quali siano le linee da quelli descritte, saluo che assai generalmente sian sempre linee curue, eccetto che nelle proiezzioni perpendicolari sursum. Però quando quel poco di Geometria che io hò appreso da Euclide da quel tempo in qua che noi hauemmo altri discorsi, non sia bastante per rendermi capace delle cognizioni necessarie per l'intelligenza delle seguenti dimostrazioni, mi conuerrà contentarmi delle sole proposizioni credute, mà non sapute.*

Salu. *Anzi voglio io che le sappiate mercè dell' istesso autor dell' opera, il quale quando già mi concesse di veder questa sua fatica, perche io ancora in quella volta non haueuo in pronto i libri di Apollonio, s'ingegnò di dimostrarmi due passioni principalissime di essa Parabola senza veruna altra precognizione, delle quali sole siamo bisognosi nel presente trattato; le quali son ben' anco prouate da Apollonio, mà dopo molte altre, che lungo sarebbe a vederle; & io voglio che abbreuiamo assai il viaggio, cauando la prima immediamente dalla pura, e semplice generazione di essa Parabola, e da questa poi pure immediatamente la dimostrazione della seconda. Venendo dunque alla prima;*

Intendasi il Cono retto, la cui base sia il cerchio ibkc, *e vertice il punto* l. *nel quale, segato con vn piano parallelo al lato* lk, *nasca la sezzione* bac *detta Parabola; la cui base* bc *seghi ad angoli retti il diametro* ik *del cerchio* ibkc. *e sia l'asse della Parabola* ad *parallelo al lato* lk; *e preso qualsiuoglia punto* f *nella linea* bfa, *tirisi la retta* fe *parallela alla* bd. *Dico che il quadrato della* bd *al quadrato della* fe, *hà la medesima proporzione che l'asse* da *alla parte* ae. *Per il punto* e *intendasi passare vn piano parallelo al cerchio* ibkc, *il quale farà nel Cono vna sezzione circolare, il cui diametro sia la linea* geh. *E perche sopra il diametro*

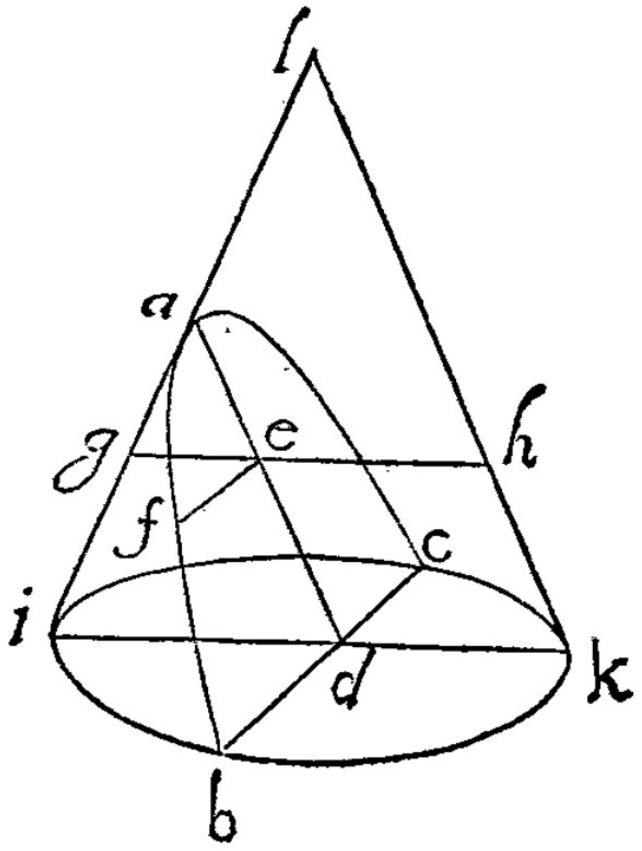
ik *del*

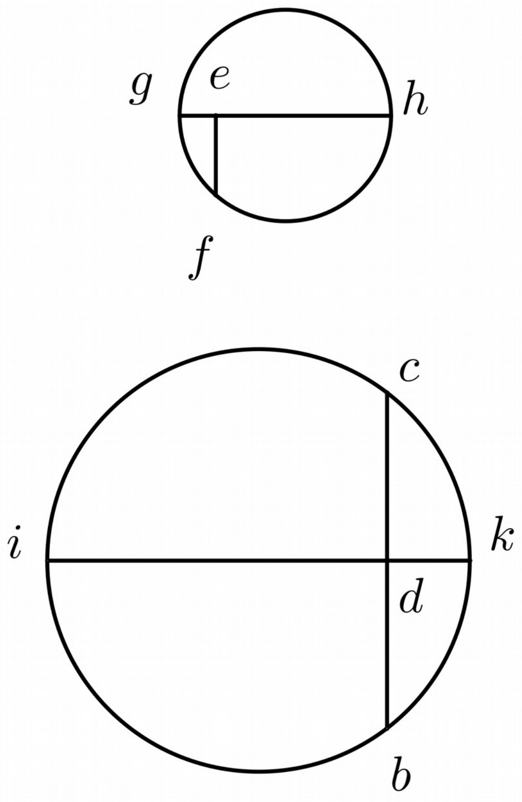


ik *del cerchio* ibk *la* bd *è perpendicolare, sarà il quadrato della* bd *eguale al rettangolo fatto dalle parti* id, dk. *e parimente nel cerchio superiore, che s'intende passare per i punti* gfh, *il quadrato della linea* fe *è eguale al rettangolo delle parti* geh. *adunque il quadrato della* bd *al quadrato della* fe *hà la medesima proporzione che il rettangolo* idk *al rettangolo* geh. *E perche la linea* ed *è parallela alla* hk, *sarà la* eh *eguale alla* dk, *che pur son parallele: e però il rettangolo* idk *al rettangolo* geh *harà la medesima proporzione che la* id *alla* ge, *cioè, che la* da *alla* ae. *adunque il rettangolo* idk *al rettangolo* geh, *cioè, il quadrato* bd *al quadrato* fe, *hà la medesima proporzione che l'asse* da *alla parte* ae. *che bisognaua dimostrare.*

L'altra proposizione pur necessaria al presente trattato così faremo manifesta. Segniamo la Parabola, della quale sia prolungato fuori l'asse ca *in* d. *e preso qualsiuoglia punto* b, *per esso intendasi prodotta la linea* bc *parallela alla base di essa Parabola. E posta la* da *eguale alla parte dell'asse* ca, *dico, che la retta tirata per i punti* d, b, *non cade dentro alla Parabola, mà fuori, si che solamente la tocca nell'istesso punto* b. *Imperò che, se è possibile, caschi dentro se-*

Dimostrazione





TESI:

$bd^2 : fe^2 = ad : ae$

DIM:

$fe^2 = ge \times eh$

$bd^2 = id \times dk$

$bd^2 : fe^2 = ge \times eh : id \times dk$

Ma $eh = dk$ e quindi

$bd^2 : fe^2 = ge : id$

Per triangoli simili

$ge : id = ad : ae$ *CVD*

La tangente nella matematica greca

- Come è definita? Ancora Euclide; *Elementi*, libro III, def. 2:

  > È detta essere tangente a un cerchio una retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio

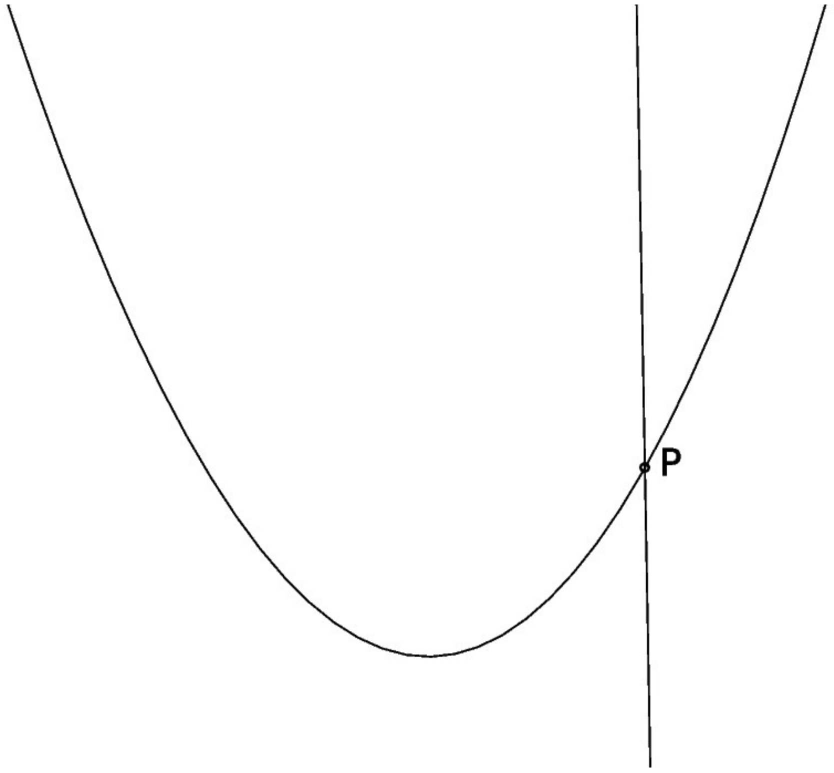
  Definizione legata all'incontro fra retta e figura curva.

- Riformulazione: una retta è tangente alla circonferenza se la incontra in un punto solo.

E per la parabola?

- Va bene la stessa definizione? Figura infinita ...

Non basta più Euclide: la tangente deve lasciare tutta la curva da una parte (per la circonferenza era scontato)



Ci vorrà qualcosa di diverso

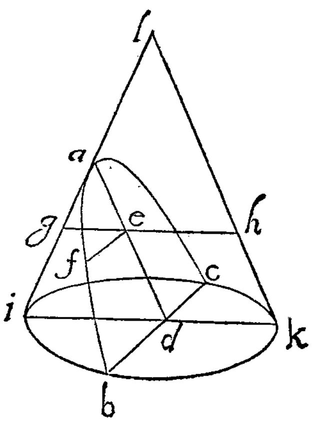
Euclide, *Elementi*, libro III, prop. 16

a) La retta perpendicolare al diametro di una circonferenza in un suo estremo **cadrà fuori dal cerchio**

b) Nello spazio fra la retta e la circonferenza **non può essere inserita un'altra retta.**

Per la parabola ?

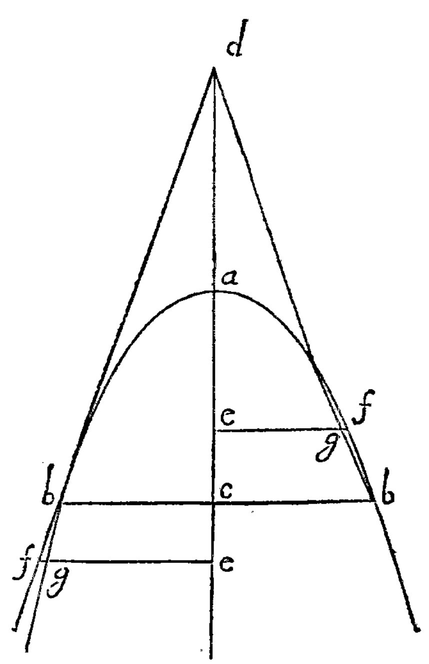
- Leggiamo ancora Galilei
- Dimostrazione per assurdo
- Più difficile della precedente
- ….



ik *del cerchio* ibk *la* bd *è perpendicolare, sarà il quadrato della* bd *eguale al rettangolo fatto dalle parti* id, dk. *e parimente nel cerchio superiore, che s'intende passare per i punti* gfh, *il quadrato della linea* fe *è eguale al rettangolo delle parti* geh. *adunque il quadrato della* bd *al quadrato della* fe *hà la medesima proporzione che il rettangolo* idk *al rettangolo* geh. *E perche la linea* ed *è parallela alla* hk, *sarà la* eh *eguale alla* dk, *che pur son parallele: e però il rettangolo* idk *al rettangolo* geh *harà la medesima proporzione che la* id *alla* ge, *cioè, che la* da *alla* ae. *adunque il rettangolo* idk *al rettangolo* geh, *cioè, il quadrato* bd *al quadrato* fe, *hà la medesima proporzione che l'asse* da *alla parte* ae. *che bisognaua dimostrare.*

L'altra proposizione pur necessaria al presente trattato così faremo manifesta. Segniamo la Parabola, della quale sia prolungato fuori l'asse ca *in* d. *e preso qualsiuoglia punto* b, *per esso intendasi prodotta la linea* bc *parallela alla base di essa Parabola. E posta la* da *eguale alla parte dell' asse* ca, *dico, che la retta tirata per i punti* d,b, *non cade dentro alla Parabola, mà fuori, sì che solamente la tocca nell' istesso punto* b. *Imperò che, se è possibile, caschi dentro se-*

tro segandola sopra, ò prolungata segandola sotto. Et in essa sia preso qualsiuoglia punto g *per il quale passi la retta* f g e. *E perche il quadrato* f e *è maggiore del quadrato* g e, *maggior proporzione haurà esso quadrato* f e *al quadrato* b c, *che'l quadrato* g e *al medesimo* b c. *E perche per la precedente il quadrato* f e *al quadrato* b c *stà come la* e a *alla* a c, *adunque maggior proporzione hà la* e a *alla* a c, *che'l quadrato* g e *al quadrato* b c, *cioè, che'l quadrato* e d *al quadrato* d c. (*essendo che nel triangolo* d g e *come la* g e *alla parallela* b c, *così stà* e d *a* d c.) *mà la linea* e a *alla* a c, *cioè, alla* a d, *hà la medesima proporzione, che* 4 *rettangoli* e a d *a* 4 *quadrati di* a d, *cioè al quadrato* c d (*che è eguale a* 4 *quadrati di* a d.) *adunque* 4 *rettangoli* e a d *al quadrato* c d *haranno maggior proporzione che il quadrato* e d *al quadrato* d c. *adunque* 4 *rettangoli* e a d *saranno maggiori del quadrato* e d: *il che è falso, perche son minori: imperò che le parti* e a, a d, *della linea* e d, *non sono eguali. Adunque la linea* d b *tocca la Parabola in* b, *e non la sega. il che si doueua dimostrare.*



Simpl. *Voi procedete nelle vostre dimostrazioni troppo alla grande; & andate sempre, per quanto mi pare, supponendo che tutte*

tutte le proposizioni d'Euclide mi siano così familiari, e pronte, come gli stessi primi assiomi, il che non è. E pur hora l'uscirmi addosso che 4 rettangoli e a d *son minori del quadrato* d e, *perche le parti* e a, a d, *della linea* e d, *non sono equali, non mi quieta, mà mi lascia sospeso.*

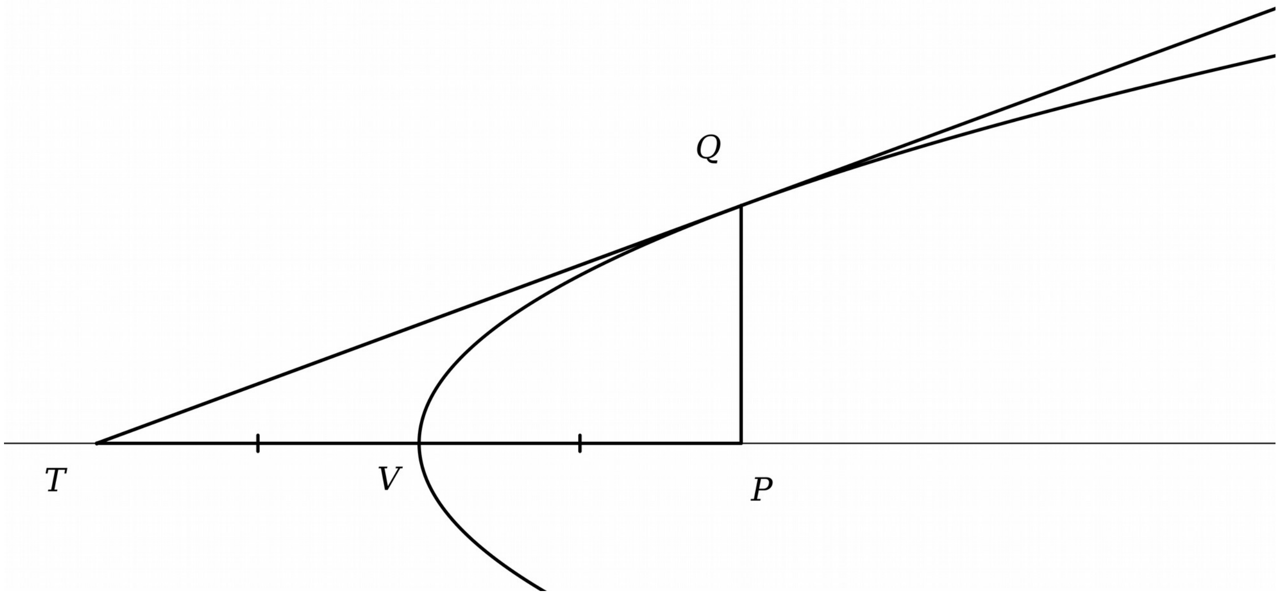
Salu. *Veramente tutti i Matematici non vulgari suppongono, che il lettore habbia prontissimi al meno gl' Elementi d'Euclide: e qui per supplire al vostro bisogno basterà ricordarui vna proposizione del secondo, nella quale si dimostra, che, quando vna linea è segata in parti eguali, & in diseguali, il rettangolo delle parti diseguali è minore del rettangolo delle parti eguali (cioè, del quadrato della metà) quanto è il quadrato della linea compresa tra i segamenti. Onde è manifesto che il quadrato di tutta, il quale contiene 4 quadrati della metà, è maggiore di 4 rettangoli delle parti diseguali. Hora di queste due proposizioni dimostrate, prese da gl' Elementi Conici, conuiene che tenghiamo memoria: per l'intelligenza delle cose seguenti nel presente trattato: che di queste sole, e non di più si serue l'Autore. Hora possiamo ripigliare il testo per vedere in qual maniera ei vien dimostrando la sua prima proposizione, doue egli intende di prouarci, la linea descritta dal Mobile graue, che mentre ci descende con moto composto dell' equabile Orizontale, e del naturale descendente, sia vna Semiparabola.*

Intelligatur horizontalis linea, seu Planum *a b* in sublimi positum: super quo ex *a* in *b* motu æquabili feratur mobile: deficiente vero plani fulcimento in *b* superveniat ipsi mobili à propria gravitate motus naturalis deorsum juxta perpendicularem *b n*. Intelligatur insuper plano *a b* in directum posita linea *b e*, tanquam temporis effluxus, seu mensura, super qua ad libitum notentur partes quotlibet temporis æquales, *b c*, *c d*, *d e*. atque ex punctis *b*, *c*, *d*, *e*, intelligantur productæ lineæ perpendiculo *b n* æquidistantes: in quarum prima accipiatur quælibet pars *c i*: cujus quadrupla sumatur in sequenti *d f*, nonupla *e h*, & consequenter in reliquis secundum ra-

Hh tionem

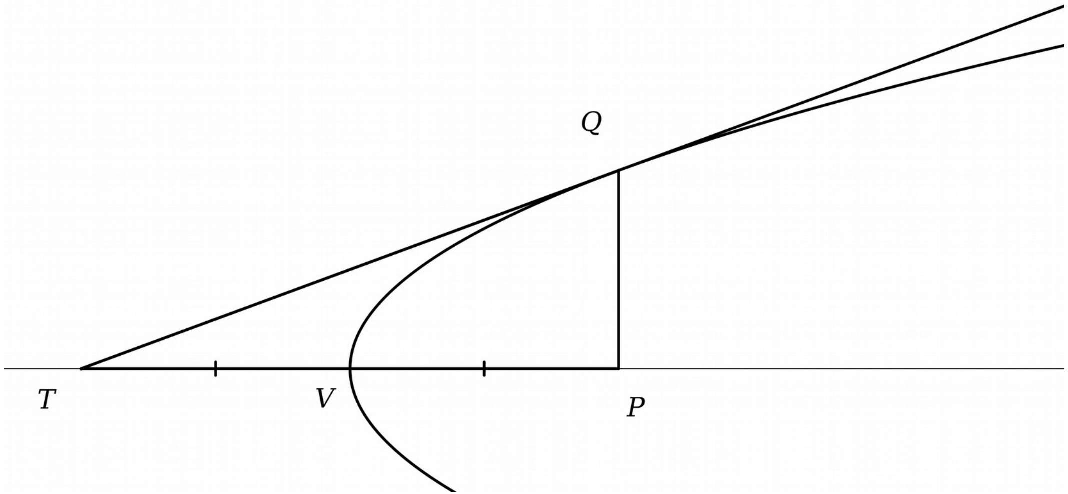
Parabola: come si traccia la tangente?

Problema: Data una parabola e un punto ad essa appartenente tracciare la tangente alla curva in quel punto.



Si usa il teorema dimostrato da Galileo

Sia data una parabola con vertice *V* e un punto *Q* sulla parabola. Sia *P* la proiezione di *Q* sull’asse della parabola. Se si prende un punto *T* sull’asse, fuori della curva, tale che *TV* = *VP* allora la retta *TQ* è tangente alla parabola.



Applicazione ad esercizi del libro di testo Bergamini

- Usare il teorema sulla tagente per affrontare qualche esercizio da libri di testo del liceo scientifico (Bergamini, Sasso).

Conclusioni e prospettive

- Possibili estensioni: come prosegue Galilei e dove usa la tangente?
- Come si fa per le altre sezioni coniche (ellisse e iperbole)
- …

Es. 1 (Sasso)

Determina la tangente a $y=2x^2-4x$ nel suo punto Q di ascissa 3

1) si determinano le coordinate del vertice V(1,-2)
2) Si determinano le coordinate del punto Q(3,6)
3) Si trova il punto T, simmetrico rispetto a V. La retta passa per T e Q.

Es. 2 dal Baroncini (modificato)

- Determina la tangente alla parabola con asse orizzontale avente vertice V(1,1) passante per il suo punto Q(4,4).

Stessa procedura di prima. $y_T=y_v-(y_Q-y_v)=2y_v-y_Q$. La retta passa per T e Q.

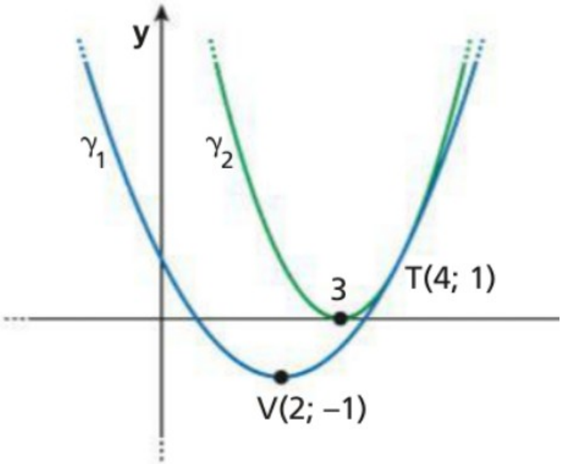
Es. 3 dal Baroncini

PROVA D

a. Dal grafico deduci l'equazione delle parabole γ_1 e γ_2 e trova l'equazione della tangente comune in T.

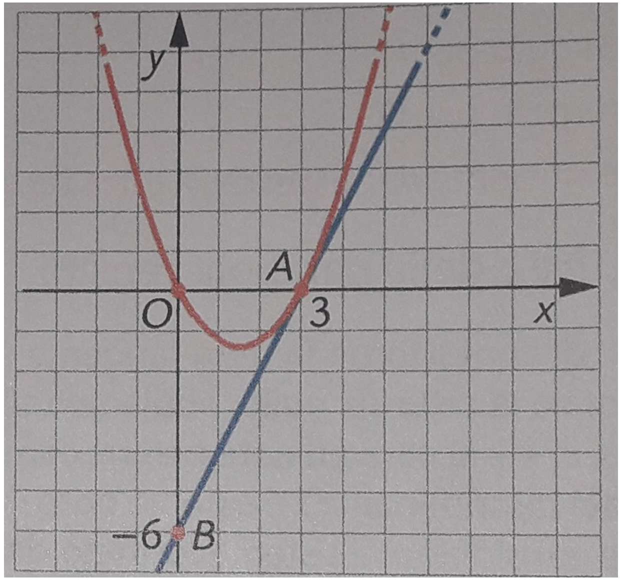
b. Determina il punto di intersezione di γ_2 con l'asse y e sull'arco AT trova quale punto C forma il triangolo ACT di area 6.

c. Scrivi l'equazione del fascio di parabole generato da γ_1 e γ_2; trova il luogo descritto dai vertici e rappresentalo graficamente.



Es. 4 dal Sasso

- Determina il vertice della parabola nella seguente figura. AB è la retta tangente alla parabola in A.



Es. 5 Un esercizio più difficile

Trova il luogo su cui stanno i vertici delle parabole (ad asse verticale) tangenti alla retta $y = -2x + 1$ nel punto di ascissa 1.