«Del modo di saper dividere una figura»

un percorso storico-didattico sulla divisione dei poligoni in parti equiestese

4 novembre 2021

Veronica Gavagna, Università di Firenze

veronica.gavagna@unifi.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

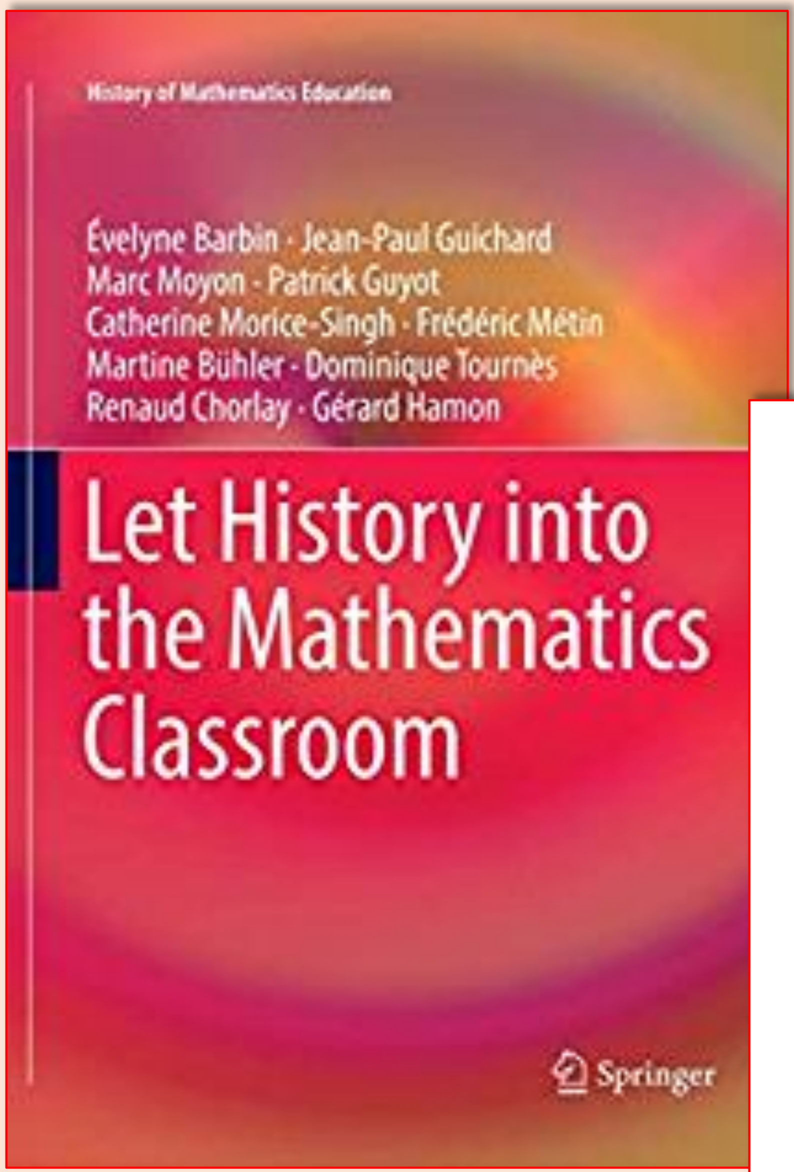
DIMAI DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA "ULISSE DINI"

Come è strutturato questo incontro

- La contestualizzazione storica del problema della divisione dei poligoni
- La fonte primaria scelta

- La descrizione di un percorso didattico già realizzato su questo tema

L'idea del tema di questo incontro viene da un percorso di tesi, a sua volta ispirato da alcuni lavori di Marc Moyon sul tema della divisione delle figure



Chapter 2
Dividing a Triangle in the Middle Ages:
An Example from Latin Works on Practical Geometry

Marc Moyon

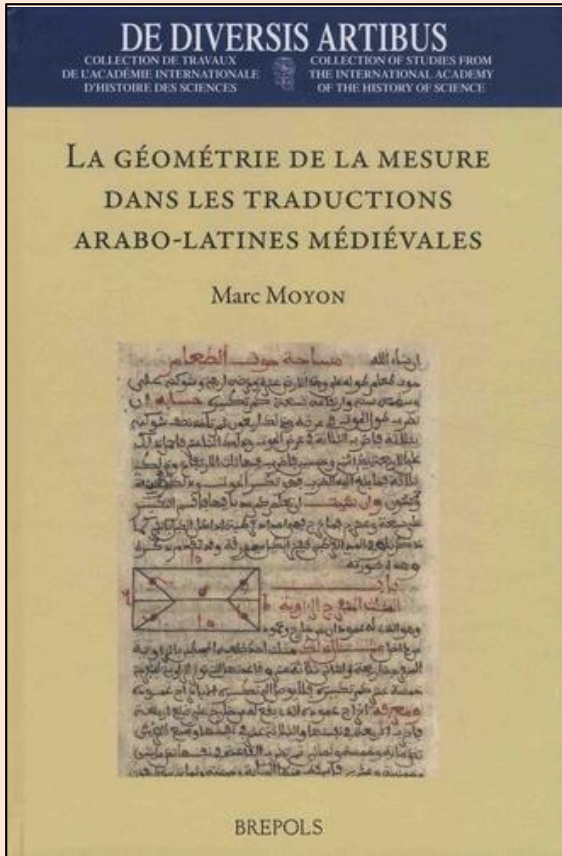
Abstract: This chapter is concerned with an important question in geometry: the division (or dissection) of 2D figures. This question has been represented and developed in numerous mathematical traditions since Mesopotamian times. In particular, the great geometers of ancient Greece such as Euclid or Hero of Alexandria each tackled it in their own way. Many other developments were achieved in Islamic countries both in the East and West. Based on extracts from medieval Latin literature of the twelfth and thirteenth centuries with Plato of Tivoli, Fibonacci and Jordanus de Nemore, this chapter deals with just one basic geometric problem: 'dividing a triangle into two equal parts', from which the geometric constraints evolve. A broad historic introduction allows these problems to be placed in context; it is a great opportunity to introduce an historic perspective into mathematics teaching. When an author is quoted for the first time, their name is followed, in brackets, by the date of death when known or the proven period when they were active. When too little viable information is known, only the century will be given.

Keywords: Practical geometry, Division of triangle, Geometric construction, Decorative pattern, Geometrical magnitudes, Arithmetisation, Middle Ages, Abraham bar Hiyya, Abû l-Wafâ', Ibn Tâhir al-Baghdâdî, Fibonacci, Plato of Tivoli

Some Elements of Context

> It would be shameful for someone to practise whatever skill it might be and not know what it actually is, its genre, what it is about and all the other things that have gone before it. (Gundissalinus, 1903, p. 44)

Teaching mathematics in the secondary school (11–18 years) (and in particular in so-called difficult areas), I have always viewed my teaching in two complementary ways: scientific education and education for citizenship. In this vision I have deliberately introduced an historical perspective into my teaching. I notice that 11- to 14-year-old students have created a relatively false idea of what mathematics is, and of who the principal movers are. In general, a mathematician does not work isolated from all research or teaching contexts. S/he delves into the history of her/his subject, following in the footsteps of those who have gone before her/him agreeing or disagreeing with them. In the same way, the main mathematical results do not appear out of nothing. They germinate for a period of time before taking their place at the birth



Il problema

In un problema di divisione di figure (piane o solide) si chiede di dividere una figura in parti secondo dei vincoli fissati.

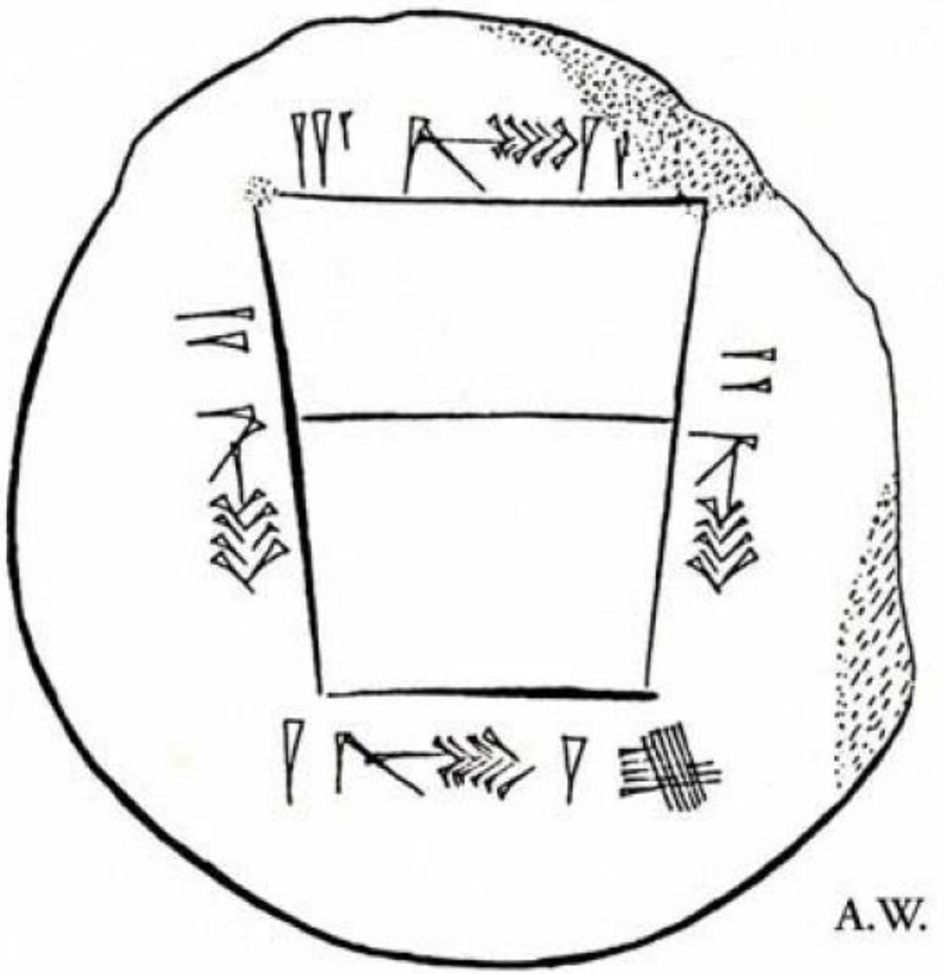
Questi vincoli possono riguardare le proprietà geometriche della o delle secanti o delle parti risultanti, ed esprimono dei rapporti tra la grandezza iniziale e le parti.

Esempi

Dividere un parallelogramma con una retta parallela a uno dei lati in due parti che stiano nel rapporto $m : n$.

Dividere un triangolo con una retta in modo che le due parti formate siano equiestese

Figure 1



Partage du trapèze d'époque sargonique (2340-2200), provenant de Nippur.
Conservée au musée de Bagdad sous le numéro IM 58045

Il problema della (misurazione e della) divisione di figure piane in parti che stanno tra loro secondo una proporzione assegnata ha origini molto antiche come attesta la tavoletta babilonese raffigurata a sinistra

Nel **mondo arabo** è attestata una tradizione di geometria pratica precedente all'impero islamico, di origine presumibilmente persiana e bizantina.

Le fonti inducono a pensare che nozioni di geometria pratica fossero dispensate a funzionari dello Stato centrale (servizio delle imposte e del catasto) nonché a geometri, architetti etc

Tra le opere che confermano questa ipotesi ci sono le opere di diritto. I giuristi erano chiamati a far rispettare le norme sulla vendita dei terreni o sulla loro divisione tra eredi ed esistevano diverse figure preposte a diverse funzioni: il **qassām** era il funzionario specializzato in divisione dei terreni secondo le norme sulle eredità o secondo gli accordi di transazioni tra parti.

Dal rapporto di Ibn Qutayba, autore persiano del IX secolo, a proposito del bagaglio di conoscenze di un buon geometra:

"è necessario […] che studi le figure per poter misurare i terreni e dunque deve conoscere il triangolo rettangolo, il triangolo acutangolo e il triangolo ottusangolo, i piedi delle altezze, i diversi quadrilateri, gli archi e i cerchi, le perpendicolari ed è necessario che metta alla prova le sue conoscenze lavorando sui terreni e non sui registri perché l'uomo che ha una reale esperienza non è come chi si limita solo ad osservare"

A.Djebbar, *La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X^{e}-XIII^{e} s.)*, in Liber amicorum *Jean Dhombres* (ed. P. Radelet-de Grave), Louvain, Brepols 2008, pp.113-151 (trad. mia)

Il più antico trattato pervenuto che contenga degli elementi scritti a proposito di lasciti testamentari è il libro di algebra di **Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī** (780-850 circa), che opera a Bagdad, nella casa della saggezza.

La sua opera ***Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*** composta fra l'813 e l'833 è considerata l'atto di nascita di questa disciplina

Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

Si compone

di un breve capitolo introduttivo sui contratti commerciali (regola del tre),

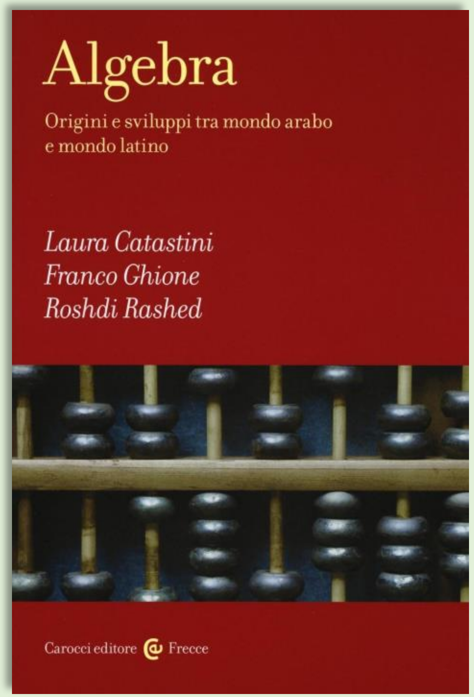
di una parte propriamente algebrica

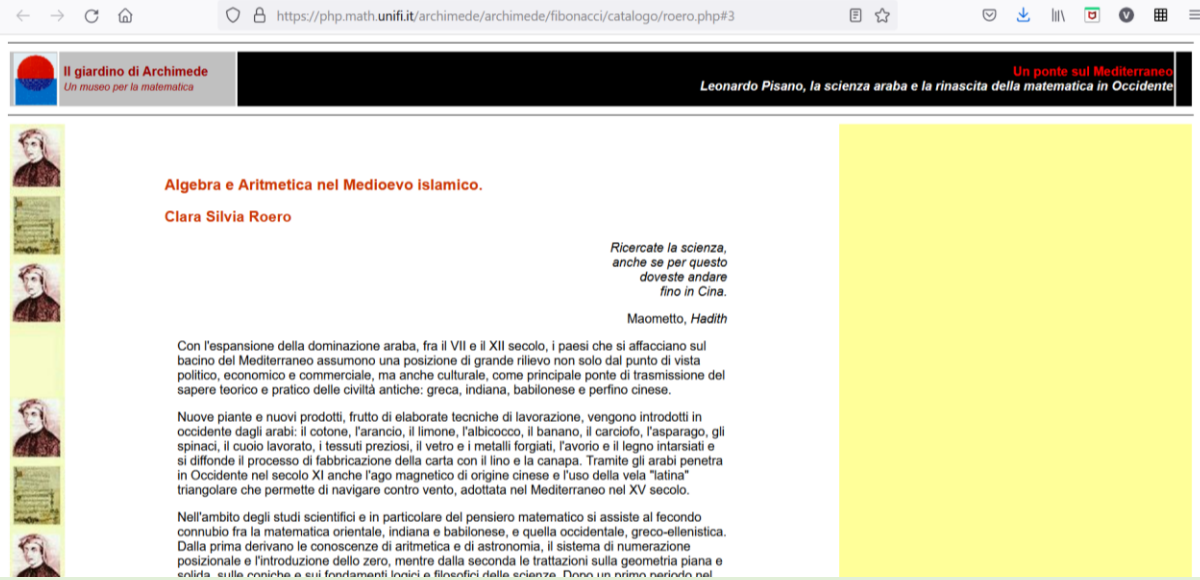
di un breve capitolo di geometria relativo al calcolo di aree e volumi

<u>di una vasta parte dedicata ai problemi di eredità</u>

Lo scopo principale, che al-Khwārizmī si era prefisso in questa opera, era di scrivere un manuale che servisse alla risoluzione dei problemi della vita quotidiana.

https://php.math.unifi.it/archimede/archimede/fibonacci/catalogo/roero.php#3





https://www.progettofibonacci.it/xFR/fibofonti-fr.html

Al-Kitab al-muktasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

La fusione con la tradizione greca

Tra le opere attribuite a **Euclide** (III sec. a.C.) da fonti antiche (Proclo, V sec. d.C.) e non pervenute fino a noi figura il trattato

Sulle divisioni delle figure

L'opera era tuttavia conosciuta nel mondo arabo: ne dà notizia il *Fihrist* (*Libro del catalogo* compilato dal bibliofilo del X secolo al-Nadīm) nel catalogo delle opere euclidee.

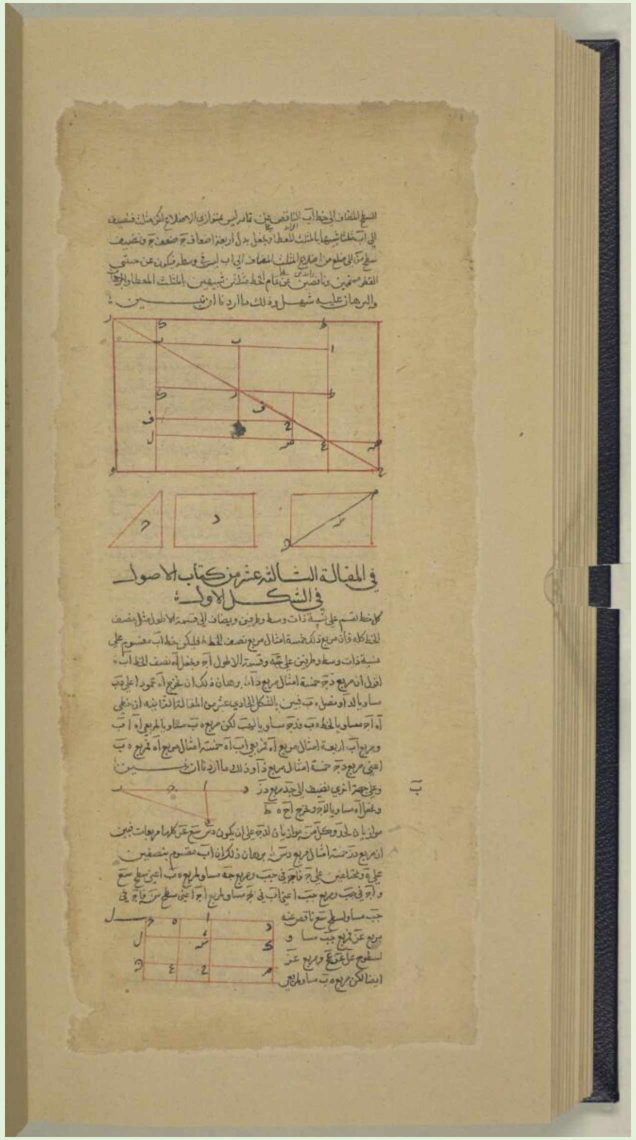
Viene menzionata una versione rivista da Thābit ibn Qurra (836-901) di cui non esiste un testimone (per quanto se ne sa), ma da cui sembrano dipendere tutti i testi posteriori.

La tradizione erudita di Euclide (ma anche Erone nei suoi *Metrica* tratta problemi di questo genere) si fonde con la tradizione di geometria pratica (di lingua) araba e da questo connubio nascono diversi trattati in cui le costruzioni geometriche sono corredate di dimostrazioni in stile euclideo.

Per esempio, il ***Libro di costruzioni geometriche necessarie agli artigiani*** di Abū l-Wafā' (m.997) che conteneva procedimenti di costruzione, di divisione e di composizione di figure, senza alcuna dimostrazione viene poi ripreso da Ibn Yūnus (1242) che giustifica teoricamente ogni costruzione.

1851: F.Woepcke pubblica la traduzione di alcune proposizioni tratte da un testo miscellaneo arabo che contiene una cinquantina di brevi trattati di geometria raccolti da **al-Siğzī** (945-1020).

Nell'*incipit* di uno dei trattati si dice esplicitamente che la serie di 36 proposizioni che seguono è tratta dal libro *Sulle divisioni* di Euclide (nella versione rimaneggiata di Thabit), ma contiene, oltre agli enunciati, solo 4 dimostrazioni: al-Siğzī dice che le altre erano troppo facili.



F. Woepcke, *Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*, «Journal Asiatique», 1851, pp.217-247.

«… le figure di cui si occupa il trattato euclideo – almeno per come è descritto dal riassunto di al-Siǧzī – sono **triangoli o quadrilateri**. Si tratta di dividere tali figure in due parti per mezzo di una trasversale passante per un punto dato o parallela a uno dei lati, in modo che queste due parti siano o uguali, o tali che una di esse sia una data parte della figura totale oppure in un rapporto dato con questa […]Per risolvere questi problemi Euclide fa uso all'inizio di nozioni piuttosto elementari, ricavabili dagli *Elementi*»

P. Crozet, *La civiltà islamica: antiche e nuove tradizioni in matematica. Geometria: la tradizione euclidea rivisitata*, Treccani, Storia della Scienza
https://www.treccani.it/enciclopedia/la-civilta-islamica-antiche-e-nuove-tradizioni-in-matematica-geometria-la-tradizione-euclidea-rivisitata_%28Storia-della-Scienza%29/

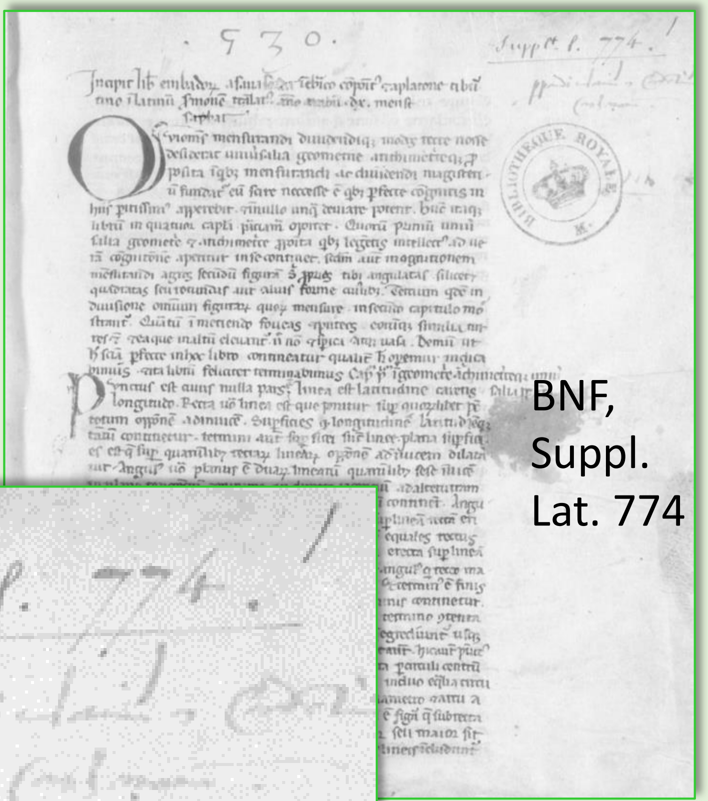
Ma come arrivano questi testi nell'Occidente Latino?

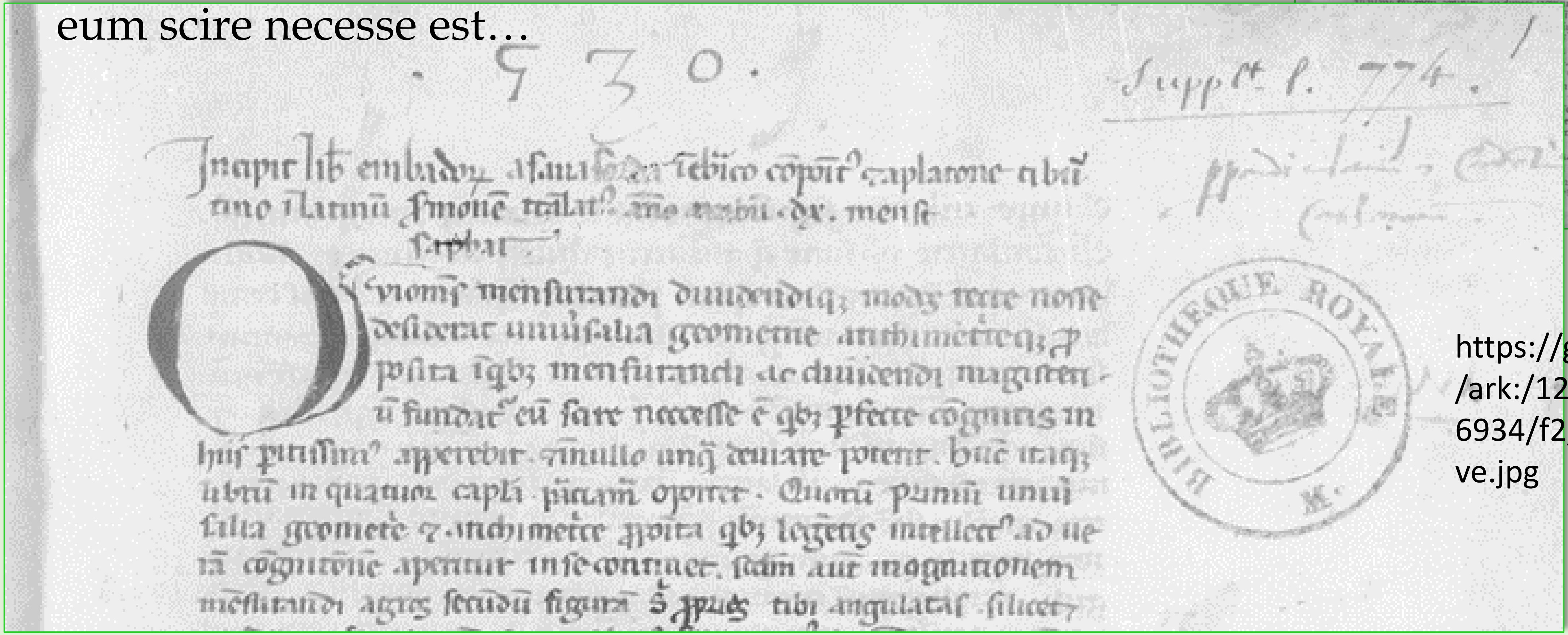
Uno dei centri di diffusione più importanti è al-Andalus (nell'immagine, i confini geografici attorno al 732, da Wikipedia) in cui fiorisce una tradizione in parte autonoma.
Con il progredire della *Reconquista* cristiana rimane a disposizione un immenso patrimonio culturale e librario che attira molti intellettuali.
Si fondano molte scuole di traduzioni (la più importante è quella di Toledo, conquistata da Alfonso VI nel 1085) e vari testi vengono tradotti dall'arabo (o dall'ebraico) in latino.
Tra questi, ad esempio, il ***Liber embadorum*** di Abraham bar Hiyya (Savasorda) tradotto in latino da Platone di Tivoli attorno nel XII sec.

Il *Liber embadorum* (Trattato sulle superfici) è una delle fonti principali della *Practica Geometriae* (1220) di Leonardo Pisano, noto come Fibonacci.

Incipit Liber embadorum a Savasorda in ebraico compositus a Platone tiburtino in latinum sermonem translatus anno arabo DX, mense Saphar. [1116 d.C.]

Qui omnes mensurandi dividendique modus recte nosse desiderat universalia geometrie arithmeticeque proposita in quibus mensurandi ac dividendi magisterium fundatur eum scire necesse est…





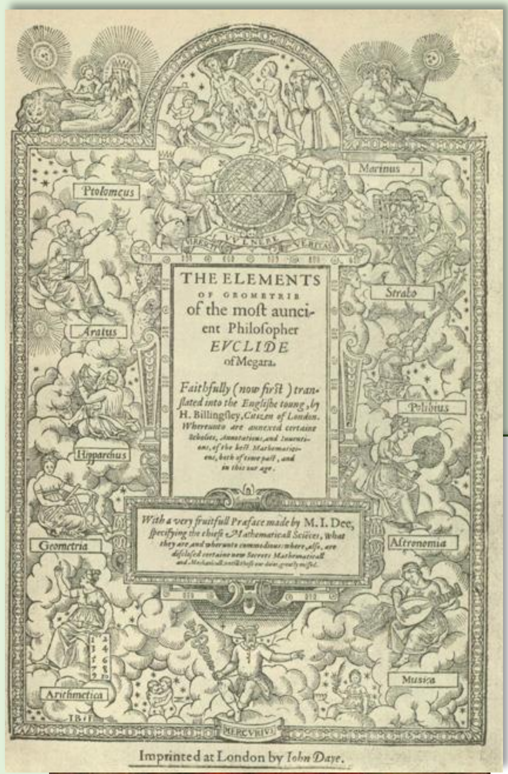
BNF, Suppl. Lat. 774

https://gallica.bnf.fr/iiif/ark:/12148/btv1b90776934/f2/full/full/0/native.jpg

La tradizione dei problemi di divisione delle figure occupa una posizione di rilievo nella trattatistica geometrica di età medievale nell'Occidente Latino.

La IV sezione della ***Practica geometriae*** di Fibonacci (1220) contiene una serie di proposizioni che coincide con buona parte di quelle attestate nell'estratto arabo di al-Siǧzī (ne mancano otto), ma evidenzia anche una stretta dipendenza dal *Liber embadorum*. Tutte le dimostrazioni sono complete e redatte in uno stile euclideo.

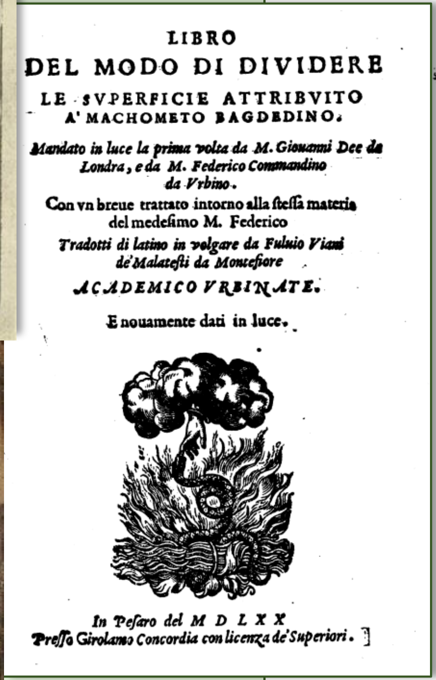
John Dee afferma di aver trovato un manoscritto arabo dedicato a questi problemi di un tal «Machomectus Bagdedinus», di averlo poi tradotto in latino e mandato a Federico Commandino,
che lo fa stampare assieme a un suo trattato.
Non sono note le fonti di Dee. Alcune proposizioni coincidono con quelle di al-Siǧzī


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most auncient Philosopher
EVCLIDE
of Megara.

Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inventions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.

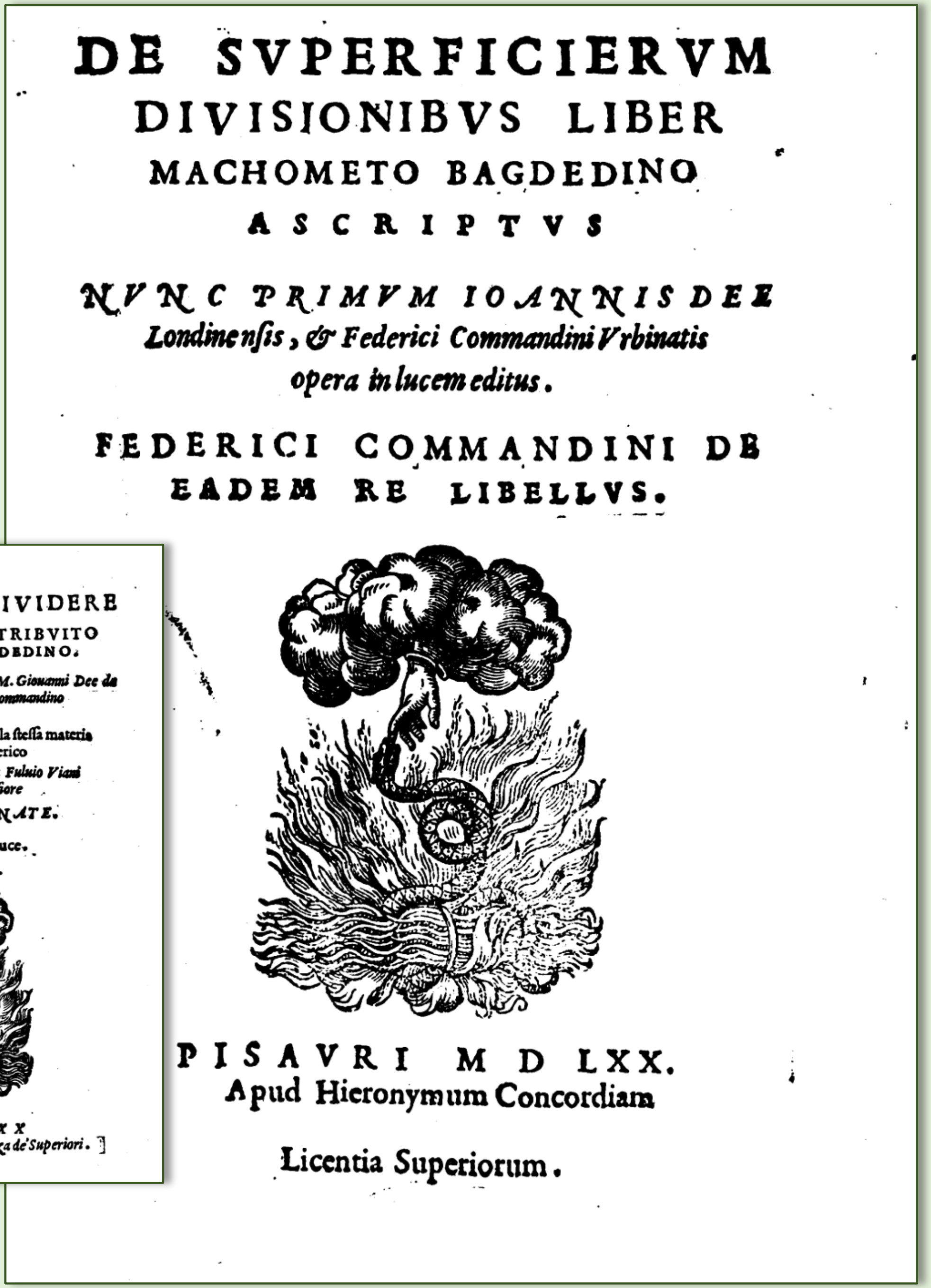
With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall

Imprinted at London by Iohn Daye.


LIBRO
DEL MODO DI DIVIDERE
LE SVPERFICIE ATTRIBVITO
A' MACHOMETO BAGDEDINO.

Mandato in luce la prima volta da M. Giouanni Dee da Londra, e da M. Federico Commandino da Vrbino.
Con vn breue trattato intorno alla stessa materia del medesimo M. Federico
Tradotti di latino in volgare da Fulvio Viani de' Malatesti da Montefiore
ACADEMICO VRBINATE.
E nouamente dati in luce.

In Pesaro del M D L X X
Presso Girolamo Concordia con licenza de' Superiori.


DE SVPERFICIERVM
DIVISIONIBVS LIBER
MACHOMETO BAGDEDINO
ASCRIPTVS

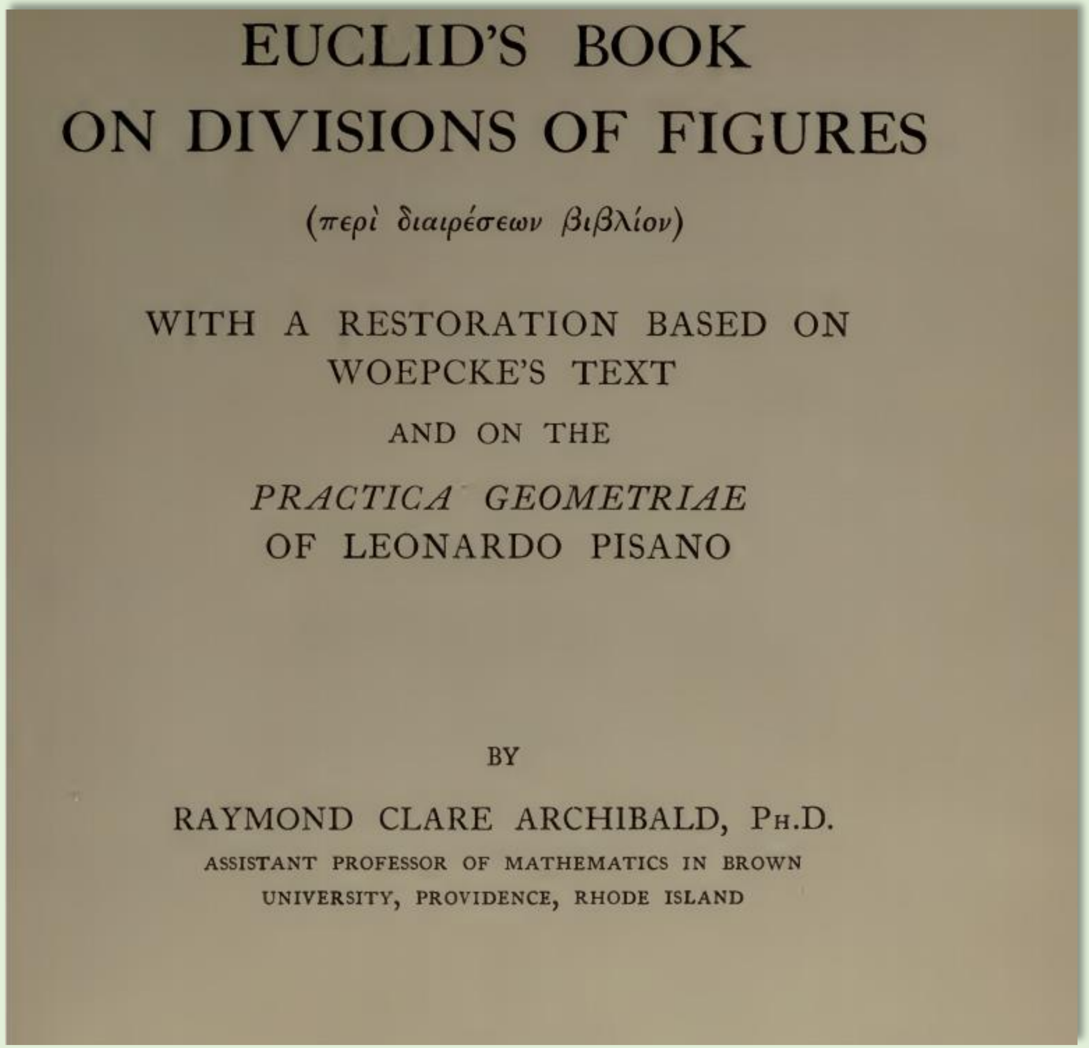
NVNC PRIMVM IOANNIS DEE
Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis
opera in lucem editus.

FEDERICI COMMANDINI DE
EADEM RE LIBELLVS.

PISAVRI M D LXX.
Apud Hieronymum Concordiam
Licentia Superiorum.

Nel 1915 Raymond Archibald ha ricostruito il testo euclideo supponendo che quelle di Fibonacci siano le dimostrazioni euclidee omesse da al-Siğzī (1915).

Dal punto di vista filologico si tratta naturalmente di una ricostruzione arbitraria perché non sono state individuate tutte le fonti usate da Fibonacci (e non è chiara la sua dipendenza dal testo di Euclide)



EUCLID'S BOOK

ON DIVISIONS OF FIGURES

(περὶ διαιρέσεων βιβλίον)

WITH A RESTORATION BASED ON WOEPCKE'S TEXT

AND ON THE

PRACTICA GEOMETRIAE

OF LEONARDO PISANO

BY

RAYMOND CLARE ARCHIBALD, PH.D.

ASSISTANT PROFESSOR OF MATHEMATICS IN BROWN UNIVERSITY, PROVIDENCE, RHODE ISLAND

https://archive.org/details/euclidsbookondiv00archuoft/page/2/mode/2up?view=theater

Una ricostruzione (in senso lato) alternativa a quella di Archibald e in traduzione italiana è presente in *Euclide. Tutte le opere*. Introduzione, traduzione, note e apparati a cura di Fabio Acerbi, Bompiani 2007.

La ricostruzione è articolata in 8 sezioni, le prime 6 delle quali contengono «principalmente traduzioni intercalate da commenti e comparazioni tra varianti di costruzione e dimostrazione» (p.2386)

Tra queste: l'epitome dell'opera euclidea di al-Siǧzī, le prime 19 proposizioni dei *Metrica* di Erone, i capitoli 8 e 9 del *Libro di costruzioni geometriche necessarie agli artigiani* di Abū l-Wafā', alcune dimostrazioni tratte dalla *Practica geometriae* di Leonardo Pisano.

La ricostruzione del trattato euclideo è ostacolata da (una) tradizione indiretta troppo ricca!

- Più tradizioni che interagiscono

- Gruppi di problemi che non sono legati da una struttura deduttiva forte (e il numero può essere ampliato o ridotto molto facilmente)

- Il principio ordinatore può essere modificato provocando una riorganizzazione (numero dei lati, generalità, posizione dei punti da cui tracciare le rette secanti, crescente difficoltà delle tecniche adottate etc)

Le caratteristiche che hanno portato alla ramificazione della tradizione del problema lo rendono un’interessante proposta didattica

- la complessa tradizione testuale documenta la presenza del tema della divisione delle figure in diverse epoche e in diversi contesti culturali ne testimonia la vivacità e l’utilità pratica. Il tema infatti è spesso discusso nei trattati di geometria pratica (e uno di questi sarà la fonte usata nel laboratorio)

- Il percorso storico-didattico si può progettare e sviluppare secondo varie direzioni (e con vari strumenti)

La fonte storica usata nel laboratorio:

il *General Trattato* di Niccolò Tartaglia (1557-1560)

- Il linguaggio non ha sostanzialmente bisogno di mediazione
- Fonte disponibile in buona risoluzione

https://www.e-rara.ch/?lang=it

http://mathematica.sns.it/

Quando i censi e le cose sono equali al numero se vole recare a un censo, et demeççare le cose et moltiplicare in sé, e quello che fa ponare sopra il numero; e la radici de la somma meno il dimeççamento de le cose vale la cosa.

(Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*)

Data l'equazione di secondo grado (a coefficienti positivi)

$$ax^2 + bx = c$$

la formula risolutiva per determinare l'incognita (positiva) è

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

Censi e cose uguale a numero

$$ax^2 + bx = c$$

Quando i censi e le cose sono equali al numero	$ax^2 + bx = c$
se vole recare a un censo,	$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$
et demeççare le cose et moltiplicare in sé, e quello che fa ponare sopra il numero;	$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$
e la radici de la somma meno il dimeççamento de le cose vale la cosa.	$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$

Niccolò Tartaglia
(1499-1557)

La Rotonda o Duomo vecchio

Nato da «Micheletto cavallaro»,
Niccolò rimane orfano di padre giovanissimo.
L'evento che più segnerà la sua vita è il «Sacco di Brescia» ad opera delle truppe francesi nel 1512. Così lo ricorda Niccolò:
quando che li Francesi saccheggiorno Bressa … ma più che essendo io fugito nel domo de Bressa insieme con mia madre et mia sorella et molti altri huomini, et donne della nostra contrata, credendone in tal luogo esser salvi, almen della persona, ma tal pensier ne andò fallito

perche in tal giesa alla presentia

mi fur date cinque ferrite mortale

…non solamente io non poteva

parlare (salvo che in gorga come

fanno le gazzole) ma neanche poteva

manzare …essendo io quasi guarito di tale et tai

ferrite steti un tempo che io non poteva ben

proferire parole, ma sempre balbutava … me

imposero il sopranome de Tartalea

La vita di Tartaglia si svolge costantemente all’insegna delle difficoltà economiche:

… vero è che essendo poi di età di anni 14 vel circa andei volontariamente circa giorni 15 à scola de scrivere da uno chiamato maestro Francesco, nel qual tempo imparai affare la A.b.c. per fin al k de lettera mercantesca.

… mai piu ne andai da alcun’altro precettore, ma solamente in compagnia di una figlia di poverta chiamata industria

≈ 1518 - 1534 si sposta aVerona

1521: attivo come matematico

1529: maestro d’abaco

1534 Si trasferisce a Venezia

1536 Succede all’umanista Giovan Battista Memmo come lettore pubblico di Euclide

Le scuole d’abaco nell’ambiente veneto

Le scuole d’abaco fioriscono a partire dal Trecento e sono gestiti da Maestri toscani. Dalla metà del Quattrocento il «corpo insegnante» è in prevalenza locale.

Si registra un forte interesse per le matematiche e un buon livello di alfabetizzazione scientifica.

E’ in un ambiente come questo che assume un’importanza rilevante il cosiddetto ***strato culturale intermedio*** conoscenza del **latino**

Strato culturale intermedio

pratici*:* mercanti, artigiani, artisti, architetti, maestri d’abaco, ingegneri, idraulici, agrimensori, cartografi, meccanici, costruttori di strumenti scientifici, chirurghi, speziali, maestri d’artiglieria

capacità di **leggere e scrivere in volgare** (mercantesca)

Venezia, una città unica…

Le tecniche a Venezia avevano una lunga tradizione

- sapienza idraulica codificata nelle disposizioni dei magistrati preposti alla tutela della Laguna (Arsenale)
- Commerci
- Sviluppo dell'editoria (tra il 1469 e il 1501, nelle circa 200 tipografie attive, vengono stampati circa 2 milioni di volumi, che riguardano soprattutto le umanità)

L'editoria tecnica (vernacolare)

Nell'ambiente dei 'pratici' la stampa inizialmente non riscuote successo se non nell'ambiente abachistico

1478 Arithmetica di Treviso

1484 P. Borghi, *Libro de abacho*

1494 L.Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita*

1515 G.Tagliente, *Libro de abacho*

Dagli anni Quaranta la situazione cambia

Il vecchio mondo è definitivamente finito: progressivamente scompare l'empiria di bottega e si afferma l'idea che la conoscenza debba essere diffusa

1539-40 Polemica con Cardano

1543 ***Elementi, Archimede***

1546 ***Quesiti et inventioni diverse***

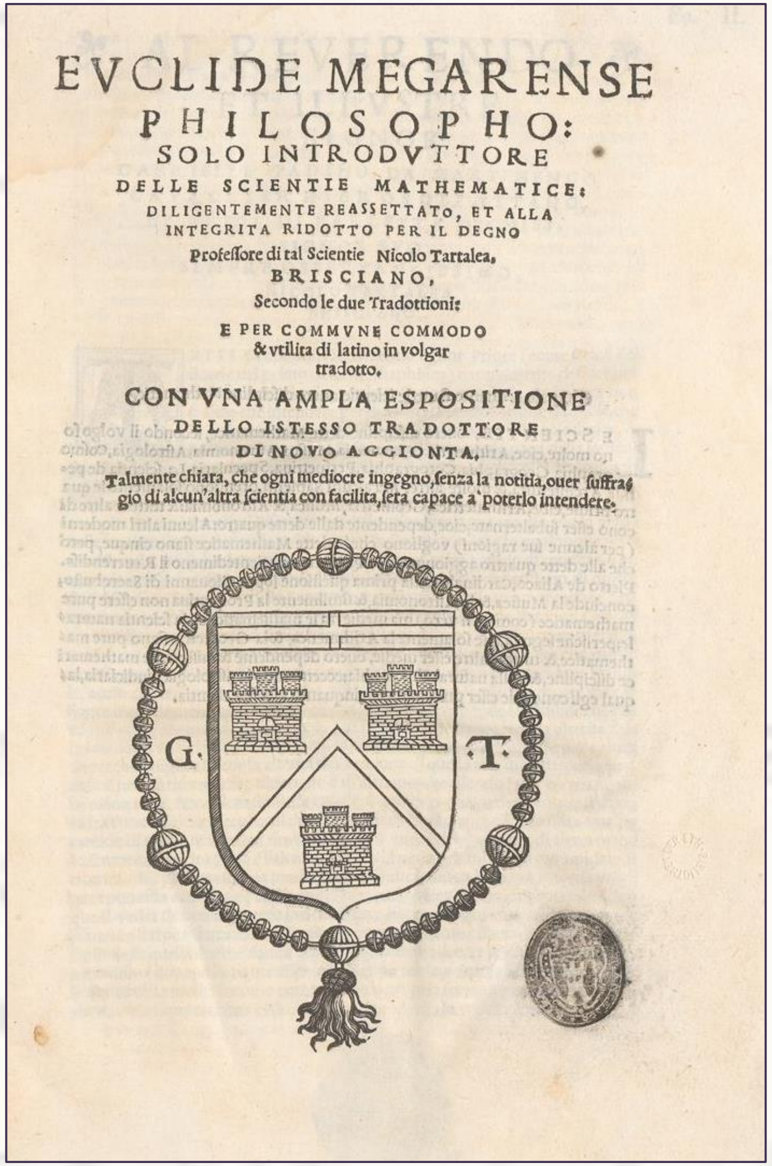
1547-48 Cartelli, controcartelli e disfida finale con Ferrari. Torna a Brescia e legge Euclide fino al 1549

1551 ***Travagliata inventione***

1556 Prime due parti del ***General Trattato de' numeri e misure***

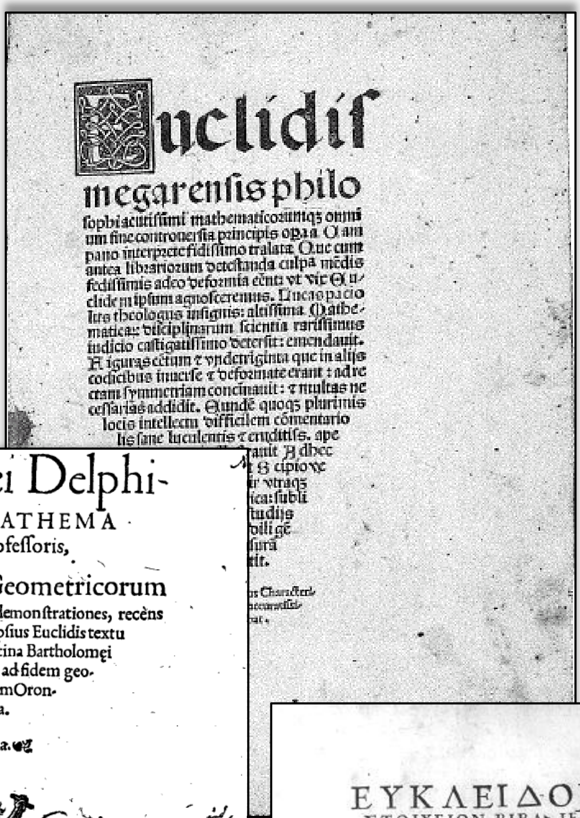
1557 muore a Venezia

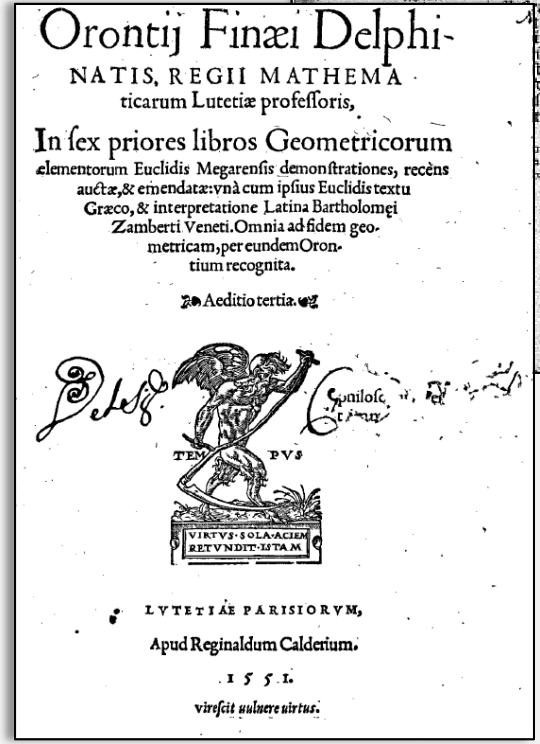
1560 Curzio Troiano pubblica le restanti parti



Principali edizioni a stampa degli Elementi di Euclide

1482 Erhard Ratdolt pubblica la redazione medievale di Campano da Novara
1501 Giorgio Valla, *De expetendis et fugiendis rebus opus*
1505 Bartolomeo Zamberti
1509 Luca Pacioli
1516 Jacobus Faber Stapulensis
1533 Simone Grynaeus, *editio princeps* del testo greco
1536 Oronce Finé, 6 libri



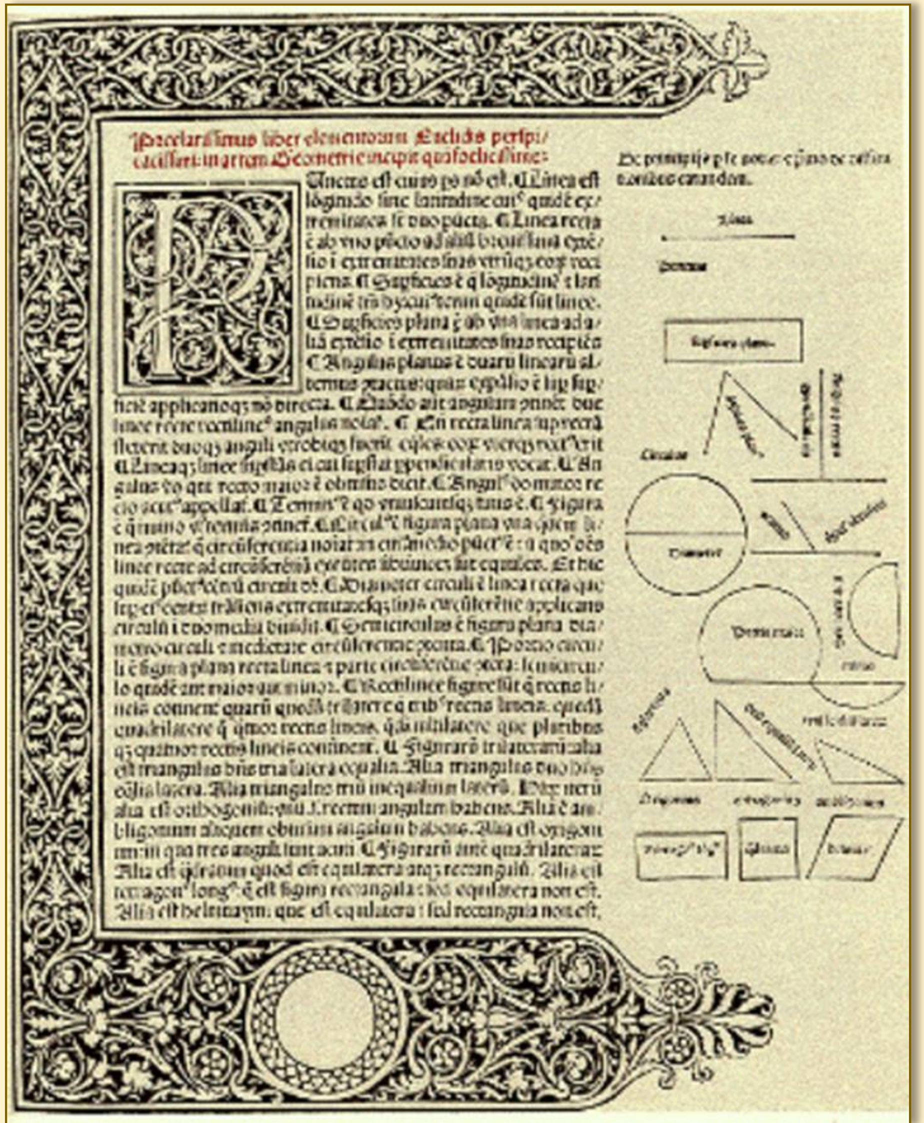


Perché un'altra edizione di Euclide?
E perché in vernacolo?

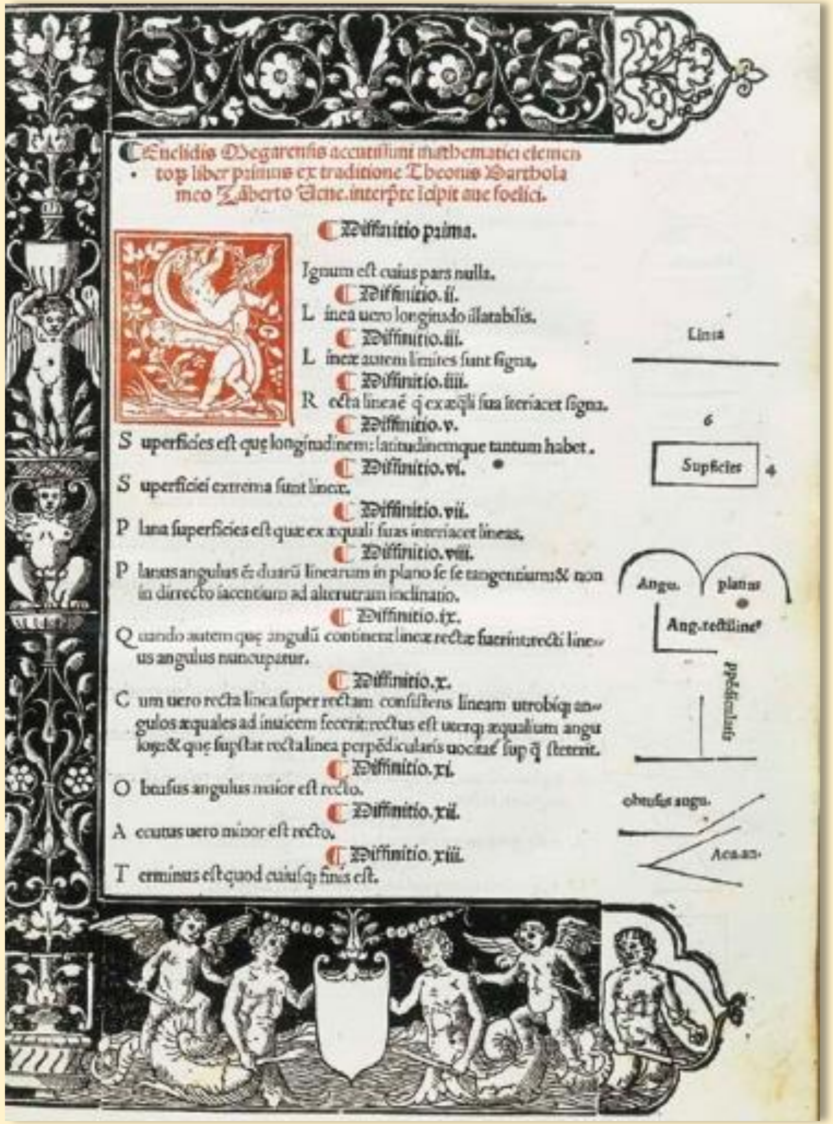
Onde tra me pensando alla grandissima utilita che di queste due discipline ne consegue per coloro che le sanno secondo li debiti bisogni allo intelletto accommodare, accio che quelle tornino nel pristino stato & che l'Opra dello ingegniosissimo Euclide sia riconosciuta, non solamente ho vogliuto durar questa fatica di riassettarla & integrarla secondo **le due Tradottioni**, **ma etiam per commune utilita dal latino in volgar tradurla & dilucidarla con espositioni talmente chiare (sopra tutte le diffinitioni & altri oscuri passi) che ogni mediocre ingegno senza notitia di alcuna altra scientia sera capace de intenderla**

Le due tradottioni

Campano da
Novara, 1482


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

Bartolomeo
Zamberti, 1505


Euclidis Megarensis acutissimi mathematici elementorum liber primus ex traditione Theonis Bartholomeo Zaberto Vene. interprete incipit aue foelici.

Diffinitio prima.
Signum est cuius pars nulla.
Diffinitio ii.
Linea uero longitudo illatabilis.
Diffinitio iii.
Lineae autem limites sunt signa.
Diffinitio iiii.
Recta linea é quae ex aequali sua interiacet signa.
Diffinitio v.
Superficies est quae longitudinem: latitudinemque tantum habet.
Diffinitio vi.
Superficiei extrema sunt lineae.
Diffinitio vii.
Plana superficies est quae ex aequali suas interiacet lineas.
Diffinitio viii.
Planus angulus est duarum linearum in plano se se tangentium & non in directo iacentium ad alterutram inclinatio.
Diffinitio ix.
Quando autem quae angulum continent lineae rectae fuerint rectilineus angulus nuncupatur.
Diffinitio x.
Cum uero recta linea super rectam consistens lineam utrobique angulos aequales ad inuicem fecerit: rectus est uterque aequalium angulorum: & quae supstat recta linea perpendicularis uocatur super quam stetit.
Diffinitio xi.
Obtusus angulus maior est recto.
Diffinitio xii.
Acutus uero minor est recto.
Diffinitio xiii.
Terminus est quod cuiusque finis est.

La tradizione arabo-latina

Adelardo di Bath (1075-1160)

Gli sono attribuite tre versioni degli *Elementi*, ovvero

1. Una traduzione vera e propria (al-Haǧǧāǧ ?)
2. Un compendio (commenti al posto delle dimostrazioni)
3. Un'edizione mista, con le dimostrazioni di (1) e i commenti di (2)

Adelardo non usa solo fonti arabe, ma anche fonti greche: il suo stile è infarcito di arabismi ma anche di ellenismi.
Le traduzioni di Adelardo saranno le fonti utilizzate dal più importante traduttore e commentatore euclideo del Medioevo:

Campano da Novara (m.1296)

Cappellano pontificio alla corte di Viterbo dal 1264.

La tradizione greco-latina

Nella Sicilia normanna vengono fatte traduzione direttamente dal greco, ma circolano limitatamente.

Giorgio Valla, nel suo *De expetendis et fugiendis rebus opus* (1501) pubblica *excerpta* degli *Elementi* e il suo allievo

Bartolomeo Zamberti

pubblica nel 1505 una traduzione del testo euclideo condotta direttamente su un codice greco.

Il *General Trattato de' Numeri e Misure*

1556

Prima Parte aritmetica abachistica

Seconda Parte aritmetizzazione dei libri II, V e X, parafrasi dei libri aritmetici VII-IX

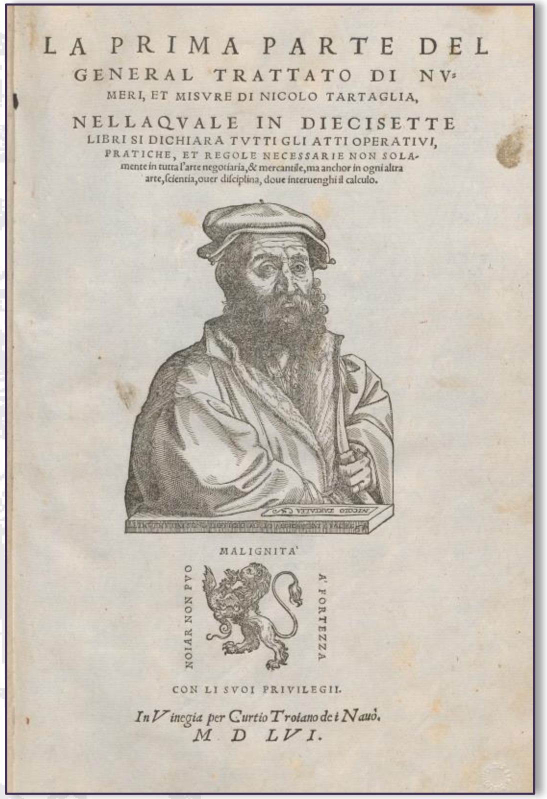
Terza Parte «pratica minore»: libro I e geometria pratica (squadro)

1560

Quarta Parte «pratica maggiore»: poliedri (libro XIII), parafrasi volgare del libro I della *Sfera e il Cilindro*

Quinta Parte geometria del compasso fisso

Sesta Parte algebra


LA PRIMA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA, NELLAQVALE IN DIECISETTE LIBRI SI DICHIARA TVTTI GLI ATTI OPERATIVI, PRATICHE, ET REGOLE NECESSARIE NON SOLAmente in tutta l'arte negotiaria, & mercantile, ma anchor in ogni altra arte, ſcientia, ouer diſciplina, doue interuenghi il calculo.

MALIGNITA'
NOIAR NON PVO
A' FORTEZZA

CON LI SVOI PRIVILEGII.

In Vinegia per Curtio Troiano dei Nauò.
M D LVI.

Breve storia del *General Trattato*
1556-1560

1554 Tartaglia chiede la licenza di stampa e il copyright per 20 anni (per un'opera in due Parti)

1556 Stampa del *General Trattato* (Prima e Seconda Parte). Tartaglia annuncia che il lavoro sarà articolato in 6 Parti

1557 10 Dicembre Tartaglia nomina Curzio Troiano come esecutore testamentario (il 13 dicembre muore)

1557, 16 dicembre. Dall'inventario dei beni

107 copie della Parte I e II

150 copie della Parte III

150 copie della Parte IV («disligata»)

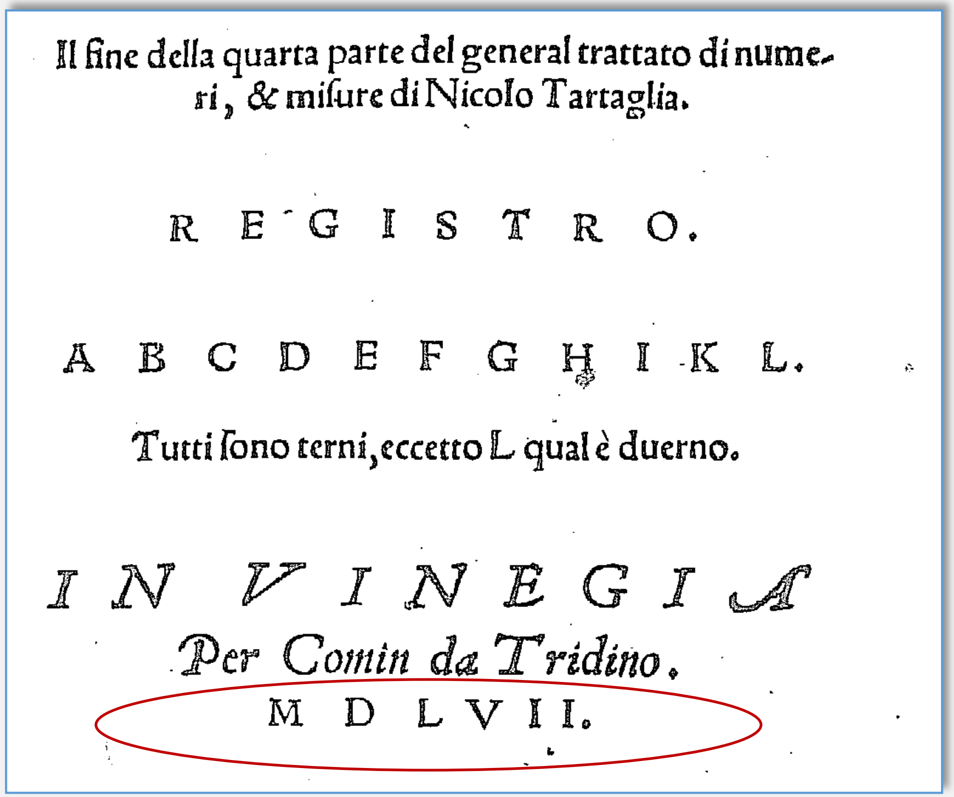
.....

1559 Curzio Troiano richiede la licenza di stampa per le Parti III-VI

1560 Pubblicazione delle Parti III-VI

Troiano probabilmente si limita a sostituire il *colophon* della Terza e Quarta Parte. Il *colophon* della Quarta Parte rimane datato 1557.

E' ragionevole supporre che la **Quinta** e la Sesta Parte siano state composte sfruttando le carte ereditate, <u>senza diretta supervisione dell'autore</u>


Il fine della quarta parte del general trattato di numeri, & misure di Nicolo Tartaglia.

REGISTRO.

A B C D E F G H I K L.

Tutti sono terni, eccetto L qual è duerno.

IN VINEGIA

Per Comin da Tridino.

M D L V I I.

Parte V

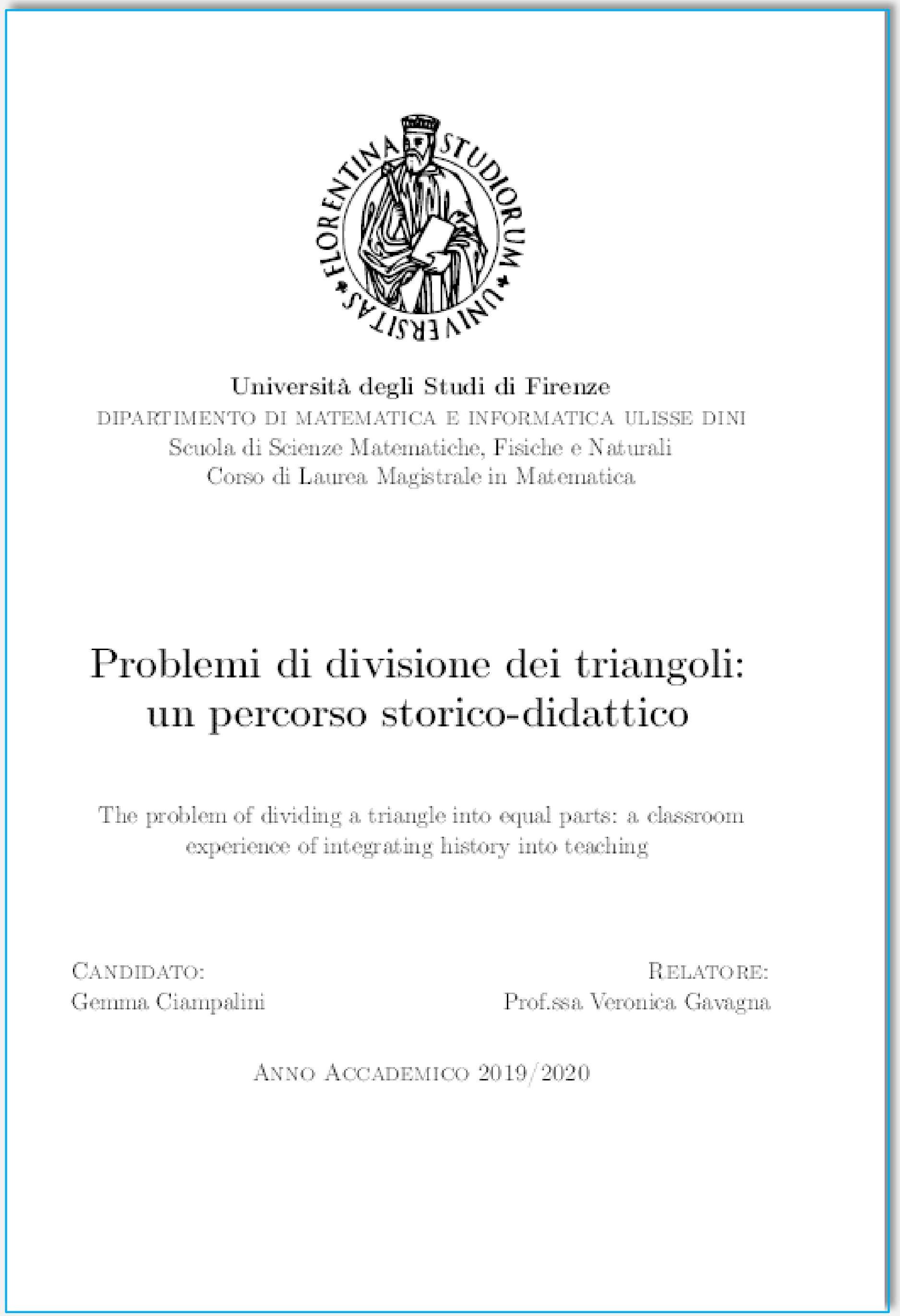
La Quinta Parte del General Trattato de' Numeri et Misure di Nicolo Tartaglia, nella quale si mostra il modo de essequire con il compasso et con la regha tutti li problemi geometrici di Euclide et da altri philosophi et con modi più ispedienti et brevi di quelli dati da esso Euclide, materia non men utile che necessaria a ***geometrici, disegnatori, perspettivi, architettori, Ingegneri et Machinatori, si naturali come mathematici***


LA QVINTA PARTE DEL
GENERAL TRATTATO
DE' NVMERI ET MISVRE,
MATERIA NON MEN' VTILE CHE NECESSARIA A GEO-
CON SVOI PRIVILEGII.
IN VENETIA PER CVRTIO TROIANO
M. D. LX.

Il percorso in classe

Il percorso è stato sviluppato, nell'ambito del progetto di tesi di Gemma Ciampalini, nella classe terza della sezione Liceo Matematico del Liceo Agnoletti Enriques di Sesto Fiorentino, sotto la supervisione della Prof.ssa Lucia Serena Spiezia.

Gli incontri si sono svolti nell'autunno 2020, in presenza. Purtroppo il peggioramento della situazione sanitaria ha impedito che il percorso venisse concluso secondo il progetto originario.



Università degli Studi di Firenze
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA ULISSE DINI
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Problemi di divisione dei triangoli: un percorso storico-didattico

The problem of dividing a triangle into equal parts: a classroom experience of integrating history into teaching

CANDIDATO: Gemma Ciampalini

RELATORE: Prof.ssa Veronica Gavagna

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

Il problema

In un problema di divisione di figure (piane o solide) si chiede di dividere una figura in parti secondo dei vincoli fissati.

Questi vincoli possono riguardare le proprietà geometriche della o delle secanti o delle parti risultanti, ed esprimono dei rapporti tra la grandezza iniziale e le parti.

Esempi

Dividere un parallelogramma in due parti che stiano nel rapporto $m : n$ con una retta parallela a uno dei lati.

Dividere un triangolo in 9 triangoli congruenti.

Porre il problema in termini molto generali può generare una discussione con spunti interessanti:

Dividere un triangolo in due parti uguali con una retta secante.

Cosa significa «parti uguali»?

Esiste una (sola) soluzione?

Se ne esiste più di una, da cosa dipende?

E' un problema dalla formulazione immediatamente comprensibile

Contempla alcuni casi molto semplici…

… ma che possono complicarsi velocemente

Potenzia le capacità di conversione da un registro semiotico a un altro

Si è deciso di procedere con problemi di difficoltà gradualmente crescente, alternando momenti di esplorazione tramite GeoGebra con momenti di costruzione della dimostrazione delle congetture (e momenti di confronto con la fonte storica).

Gli studenti hanno svolto l'attività a coppie.

Nel corso del primo incontro si è chiesto agli studenti e alle studentesse di **dividere un triangolo in due parti equiestese con una retta secante che passasse da uno dei vertici del triangolo**.

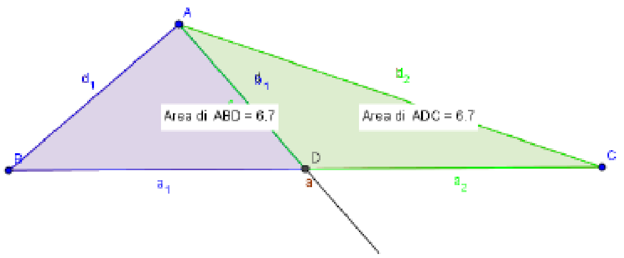


Figura 5.5: Soluzione del problema 1, gruppo 2.

Dopo la congettura segue la fase di verbalizzazione

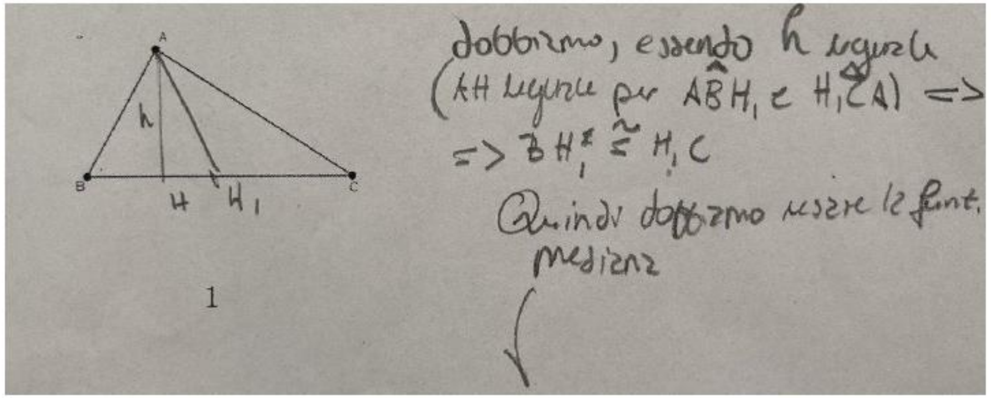
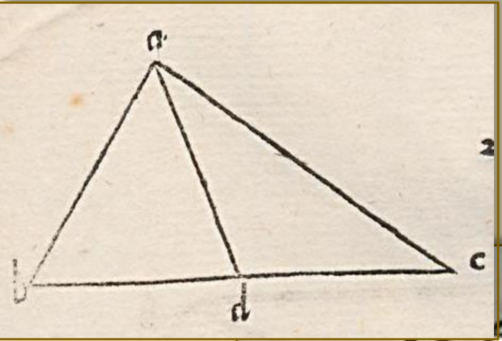


Figura 5.7: Soluzione del problema 1, gruppo 6.

congettura problema 1

Per dividere un triangolo in due parti di area uguale è necessario che la semiretta uscente dal vertice di A intersechi il lato opposto nel suo punto medio , quindi la semiretta deve essere la mediana del lato opposto, poiché i due triangoli che si creano hanno la stessa altezza e affinché esse abbiano la stessa area devono avere anche due basi uguali.

Figura 5.8: Soluzione del problema 1, gruppo 8.



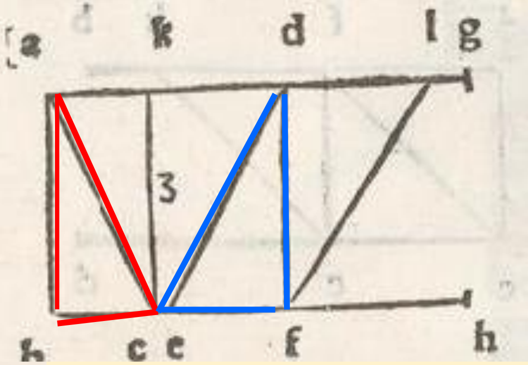
General Trattato, Parte V, Libro I, c.23v

Regole di ſaper geometricamente diuidere un triangolo in parti per piu vie. Cap. XIII.

2 OGni triangolo potemmo da l'uno di ſuoi angoli diuidere geome-tricamente in due,ouer piu parti eguali. Eſſempi gratia ſia il trian-golo.a b c.volendo tal triangolo , poniamo dal angolo.a.diuidere in due parti eguali,diuiderai il lato oppoſito a quel tal angolo (cioe il lato.b c. in due parti eguali in ponto.d.& dal detto angolo.a.al detto ponto d. tira la linea retta.a d.& hauerai lo intento tuo , cioe che con tal linea. a d. ha uerai diuiſo il detto triangolo.a b c. in due parti eguali , (per la 38. del primo, ouer per la prima del ſeſto di Euclide)perche la baſa. b d. del triangolo.a b d.e eguale alla baſa.d c. del triangolo. a d c. e pero li detti duoi triangoli. a b d. & a d c. ſono fra loro eguali,il medeſimo ſi potria eſſequir da qual ſi voglia delli altri duoi angoli.b.ouer.c.diuidendo il lato a quel oppoſito in due parti egua-li,& tirar dal angolo al ponto diuidente pur vna linea retta.

Theorema.xxviii. Propoſitione.xxxviii.

38 **Se duoi triangoli ſeranno coſtituidi ſopra baſe equale,& fra mede-**
38 **ſime linee equidiſtante,ſeranno fra loro equali.**



SIano li duoi triangoli.a.b.c.&.d.e.f.coſtituidi ſopra le baſe.b.c.&.f.e.equale & fra le linee.a.g.&.b.h.equidiſtante,hor dico che li detti duoi triangoli ſono fra loro equali.Et per dimoſtrar queſto io tiraro la linea.c.K.equidiſtante alla linea.a.b.(lato del triangolo.a.b.c.) & ſimilmente la linea.f.l.equidiſtante al lato.e.d.& le due ſuperficie.a.b.c.K.&.d.e.f.l.ſeranno equale(per la trigeſima ſeſta propoſitione) & perche li detti duoi triangoli ſono la mita di ciaſcuna di quelle (per lo correlario della trigeſima quarta propoſitione) dilche (per commune ſententia)li detti duoi triangoli ſeranno equali,che e' il propoſito.

Elementi 1543

Theorema.xxvi. Propoſitione.xxxvi.

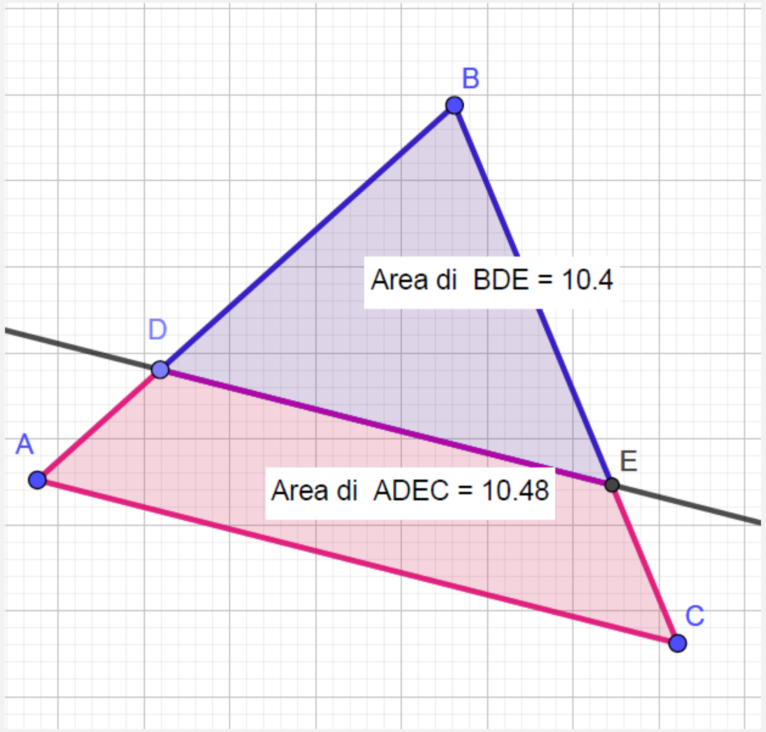
36 **Tutte le ſuperficie paralellogramme, coſtituide in baſe equale, &**
36 **fra medeſime linee paralelle,ſono fra loro equale.**

34 **Ogni ſuperficie contenuta da lati equidiſtanti, ha le linee,& li an-**
34 **goli contrapoſiti equali,& lo diametro diuide quella per mezzo.**

Nel corso del secondo incontro gli studenti si sono cimentati con questo problema:

Dividere un triangolo in due parti equiestese con una retta parallela a uno dei lati

Come si determina la posizione corretta del punto D che può scorrere lungo il lato AB facendo variare le aree di BDE e ADEC?



L'esplorazione con GeoGebra permette di convincersi che la retta esiste

Alunna 2: È *intuitivo, ma non riesco a provarlo!*

Nel frattempo il gruppo 2, formato da tre ragazze, prima di utilizzare il software ha iniziato a congetturare sulla figura presente nel testo dell'esercizio, richiamando frammenti di teoria.

Alunna 3: *Mi sa che è un corollario del teorema di Talete...*

Alunna 4: *Mi sa che è un terzo del lato...*

Alunna 5: *Ah sì, è vero, è vero!*

Alunna 5: *Che cos'è? Che stai facendo?*

Alunna 4: *Mi sa che A doveva andare nel punto medio?*

Alunna 3: *Ah sì è vero.*

Alunna 5: *Ma è il teorema delle mediane questo?*

Alunna 3: *No!*

Processi ascendenti di tipo abduttivo

GeoGebra come strumento di una prima validazione

A quel punto dopo aver discusso su come tracciare la mediana, osservano il risultato ottenuto con GeoGebra, concludono che la retta parallela al lato BC che divide il triangolo in due parti di area uguale non è quella passante per il baricentro G.

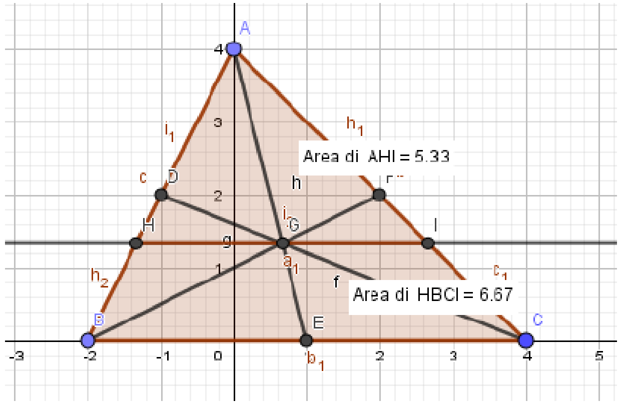


Figura 5.9: Soluzione errata del problema 2, gruppo 2.

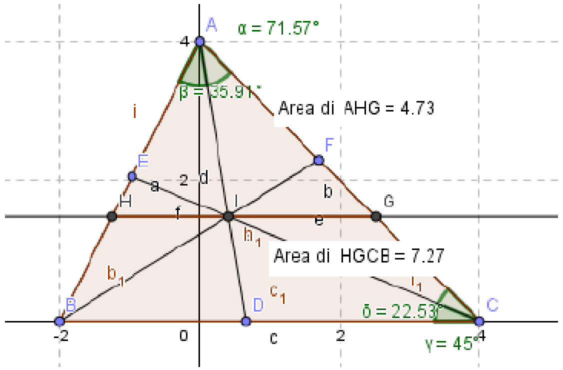


Figura 5.10: Soluzione errata del problema 2, gruppo 2.

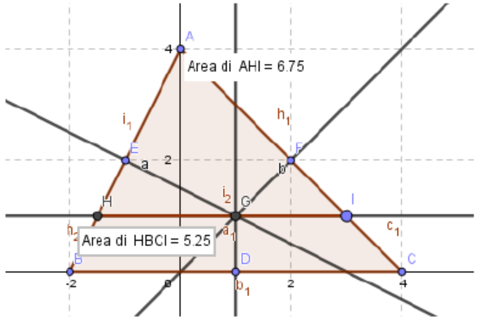
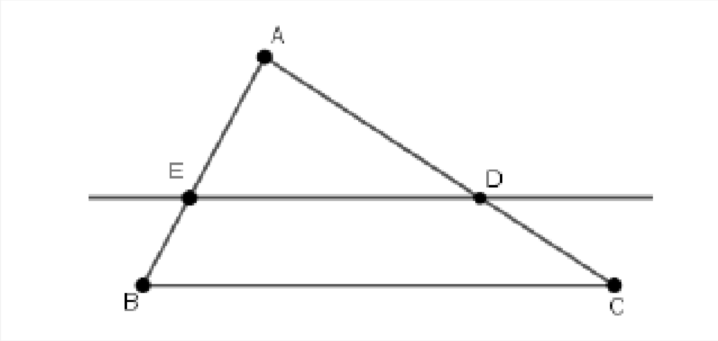


Figura 5.11: Soluzione errata del problema 2, gruppo 2.

Approccio algebrico



Prof.: *Avete preferito la via algebrica, pur avendo la possibilità di usare GeoGebra?*

Alunna 6: *Sì!*

Prof.: *Quindi nonostante potevate disegnare su GeoGebra un triangolo qualsiasi e da lì ricavare la soluzione, avete preferito la strata algebrica. Come mai?*

Alunna 6: *Per non andare per tentativi.*

Alunna 6: *Torna!*

Prof.: *Che cosa avete verificato con GeoGebra?*

Alunna 6: *Che le aree fossero effettivamente uguali una volta impostata la relazione tra BC ed ED.*

Prof.: *Qual è la relazione che avete trovato?*

Alunna 6: *Che $BC = \sqrt{2}ED$.*

$$\frac{(BC+ED)\cdot h_1}{2} = \frac{ED\cdot(h-h_1)}{2}$$

$$BC\,h_1 + ED\,h_1 = ED\,h - ED\,h_1$$

$$2ED\,h_1 = ED\,h - BC\,h_1$$

$$A_1 : A = ED^2 : BC^2$$

$$A_1 : A_2 =$$

$$A_1 : (A - A_1) = ED^2 : (BC-ED)^2$$

$$ADE + EDBC = ABC$$

$$2ADE = ABC$$

$$A_{ABC} : A_{ADE} = BC^2 : ED^2$$

$$2 = \left(\frac{BC}{ED}\right)^2$$

$$BC^2 = 2ED^2$$

$$BC = \sqrt{2}ED$$

Il difficile passaggio dal registro algebrico a quello geometrico

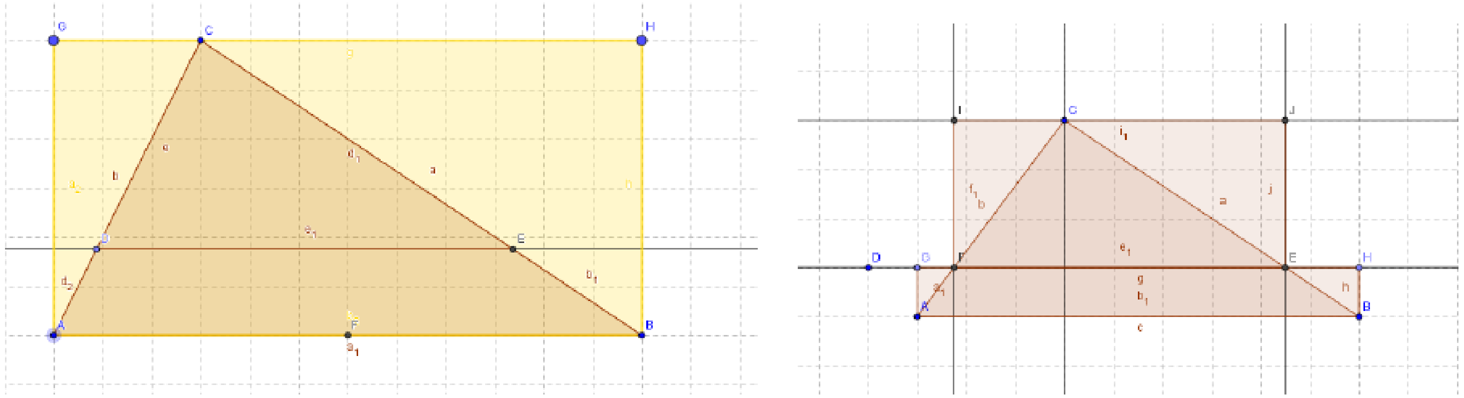


Figura 5.16: Tentativi di costruzione geometrica del punto D, gruppo 1.

Come si determina geometricamente il punto D, ovvero come si può costruire «con riga e compasso» la retta richiesta?

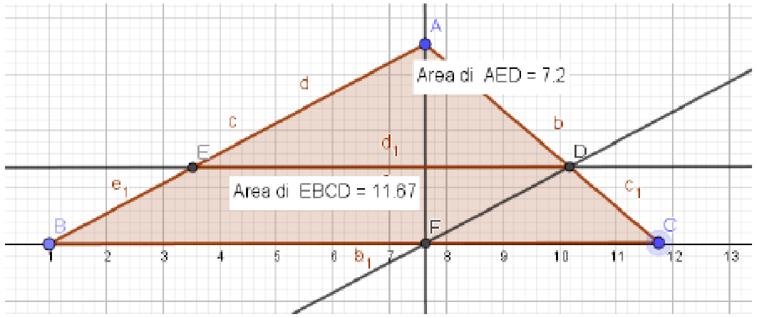
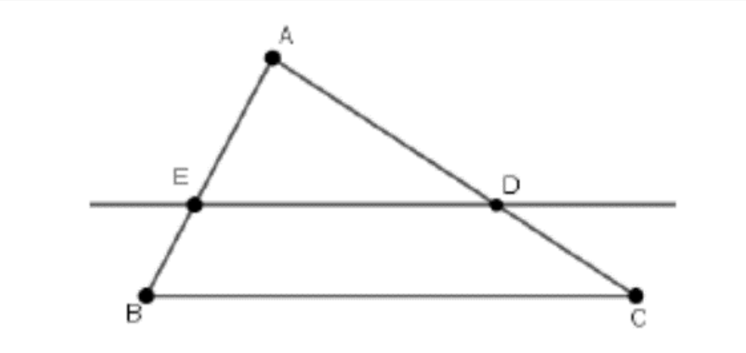
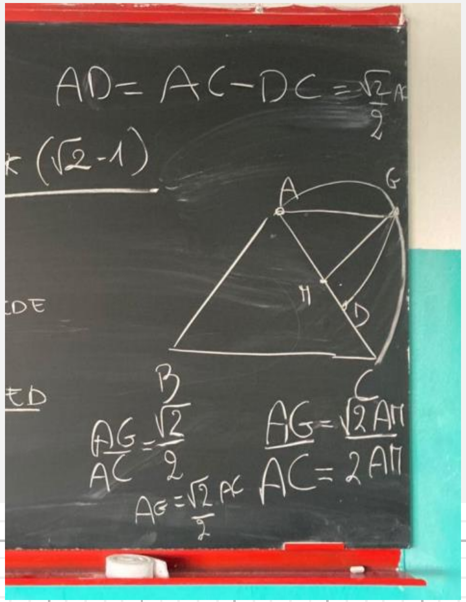
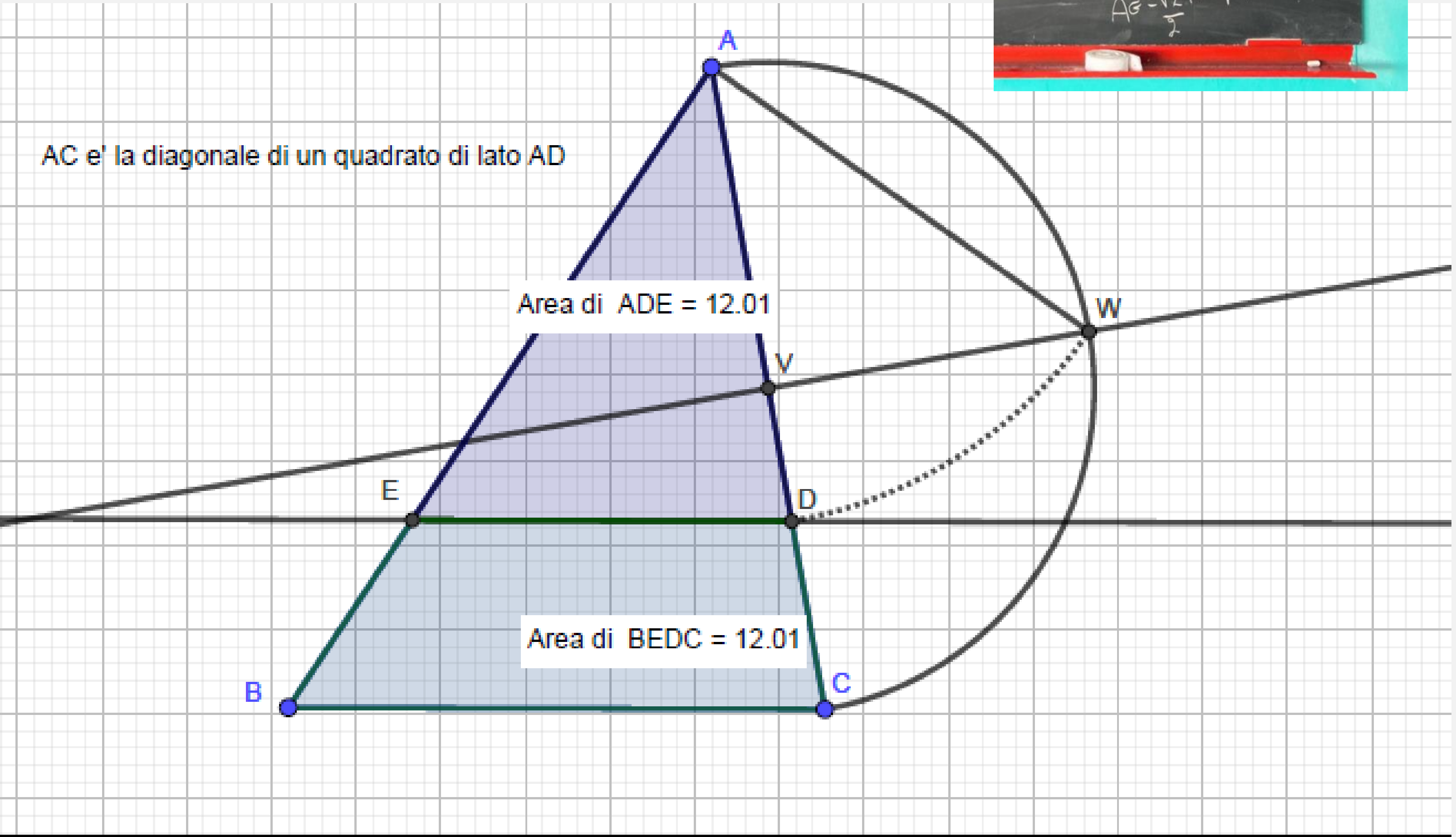


Figura 5.18: Tentativi di costruzione geometrica del punto D, gruppo 3.







Il problema si riduce a questo: dato che il rapporto tra le aree dei triangoli simili AED e ABC è 1:2 significa che il rapporto tra i lati omologhi è 1: $\sqrt{2}$

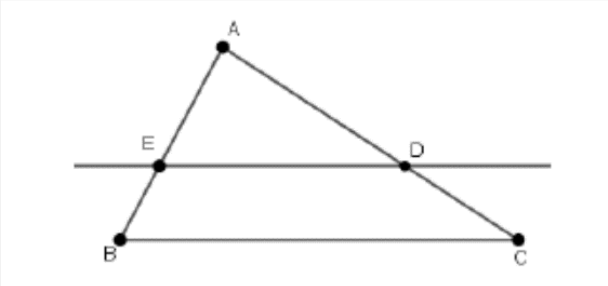
Quindi si deve costruire AD in modo tale che

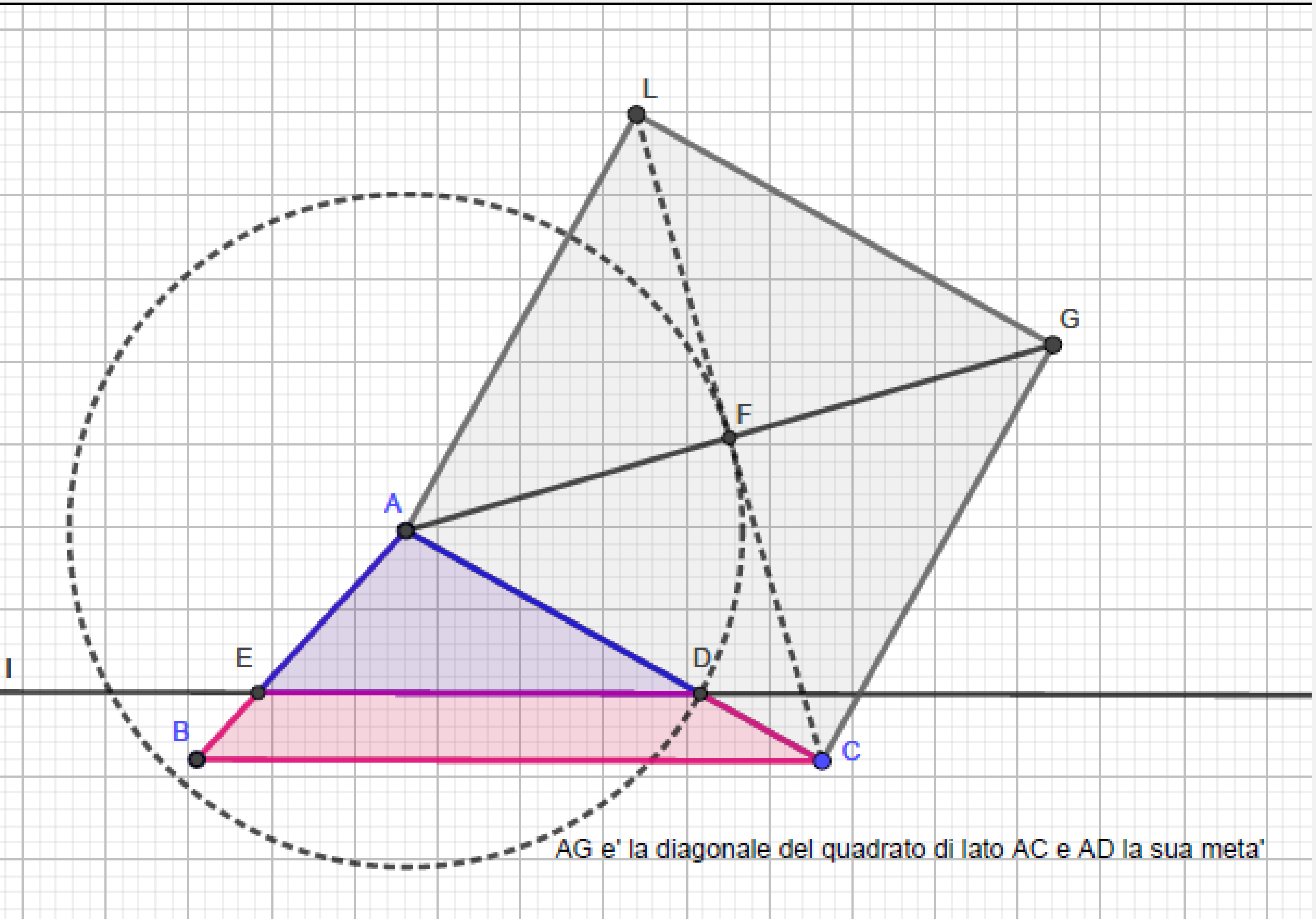
$$\boldsymbol{AC = \sqrt{2}\,AD}$$

Ovvero

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{AC}$$

La prima relazione ci porta a costruire un quadrato il cui diametro sia AC





Il problema si riduce a questo: dato che il rapporto tra le aree dei triangoli simili AED e ABC è 1:2 significa che il rapporto tra i lati omologhi è $1 : \sqrt{2}$

Quindi si deve costruire AD in modo tale che

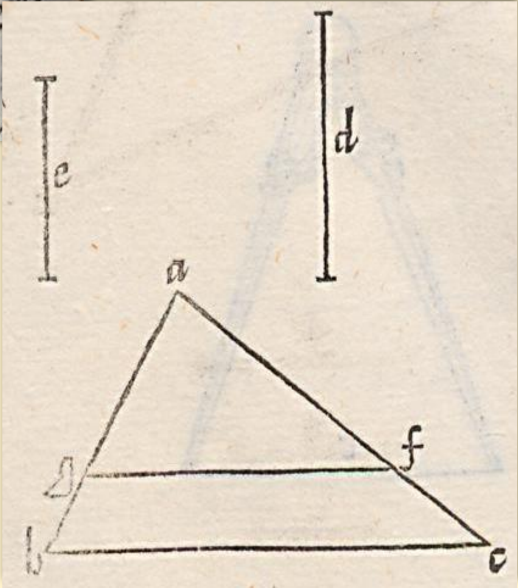
$$AC = \sqrt{2}\, AD$$

Ovvero

$$\boldsymbol{AD = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{AC}}$$

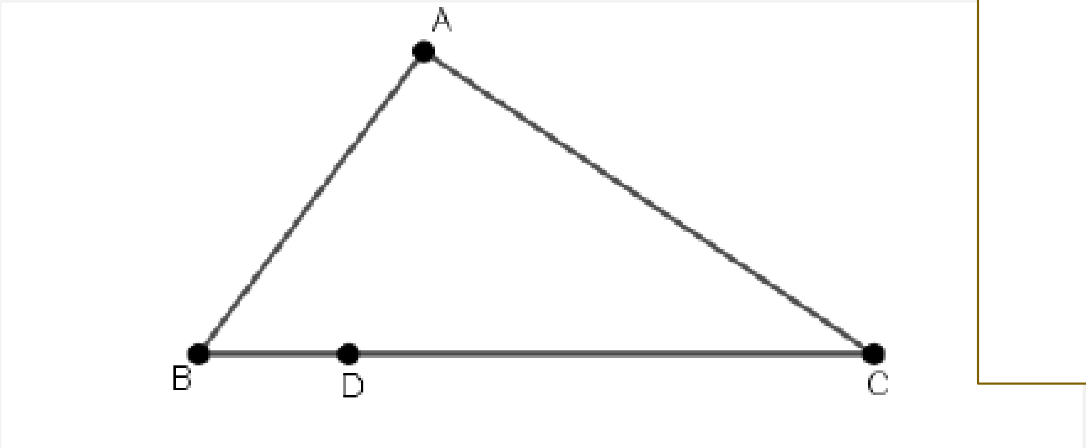
In questo caso costruiamo un quadrato di lato AC e ne consideriamo la semi-diagonale

OGni proposto triangolo con vna linea equidistante alla basa potemmo diuidere in due parti eguali. Essempi sia gratia il proposto triangolo.a b c.volendolo con vna li nea equidistante alla basa.b c.diuidere in due parti eguali, sia trouata vna linea, che il quadrato di quella sia la mita del quadrato del lato.a c. onde operando (secondo la regola data nella sesta, ouer nella ottaua del terzo capo) trouarassi quella esser eguale alla.d. si milmente ne sia trouata vn'altra, che il quadrato di quella sia la mita del lato.a b.onde(per la det ta regola)trouarassi quella esser eguale alla.e.fatto questo nel lato. a c. ne signaremo la parte.a f. eguale alla.d.& similmente nel lato.a b.ne signaremo la parte.a g.eguale alla.e. dapoi tiraremo la.g f.laqual dico esser equidistante alla basa.b c. (per la seconda parte della seconda del sesto di Euclide)& diuidere il detto triangolo.a b c.in due parti eguali, perche li duoi triangoli.a b c.& a g f.sono simili (come piu volte è stato detto , & dimostrato) e pero la proportione di l'uno a l'altro (per il correlario della decimanona del sesto di Euclide)è si come il quadrato del lato.a c. al quadrato del lato.a f.ouer del quadrato del lato.a b.al quadrato del lato.a g. & perche la pro portione di tali quadrati e doppia, seguita il triangolo.a b c.esser doppio al triangolo.a f g.e pe il detto triangolo.a f g.vien a esser la mita del triangolo.a b c.che è il proposito.



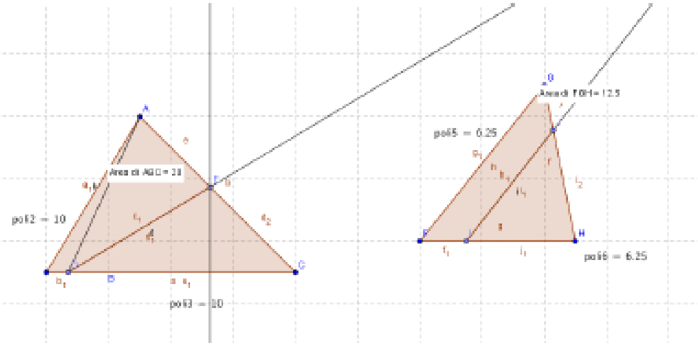
Nell’incontro successivo gli studenti si sono cimentati con il problema generale

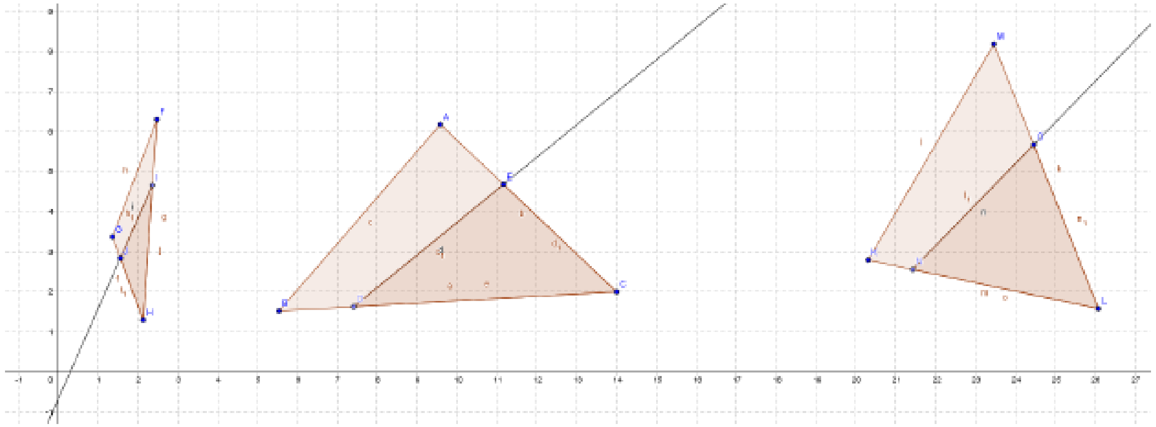
Dividere un triangolo in due parti equiestese con una secante che taglia due suoi lati



Prof.: *Il punto D è un punto qualsiasi sul lato BC, nel senso che alla fine troverete una costruzione che andrà bene per qualsiasi punto del lato BC. Per convenzione prendetelo più vicino al punto B.*

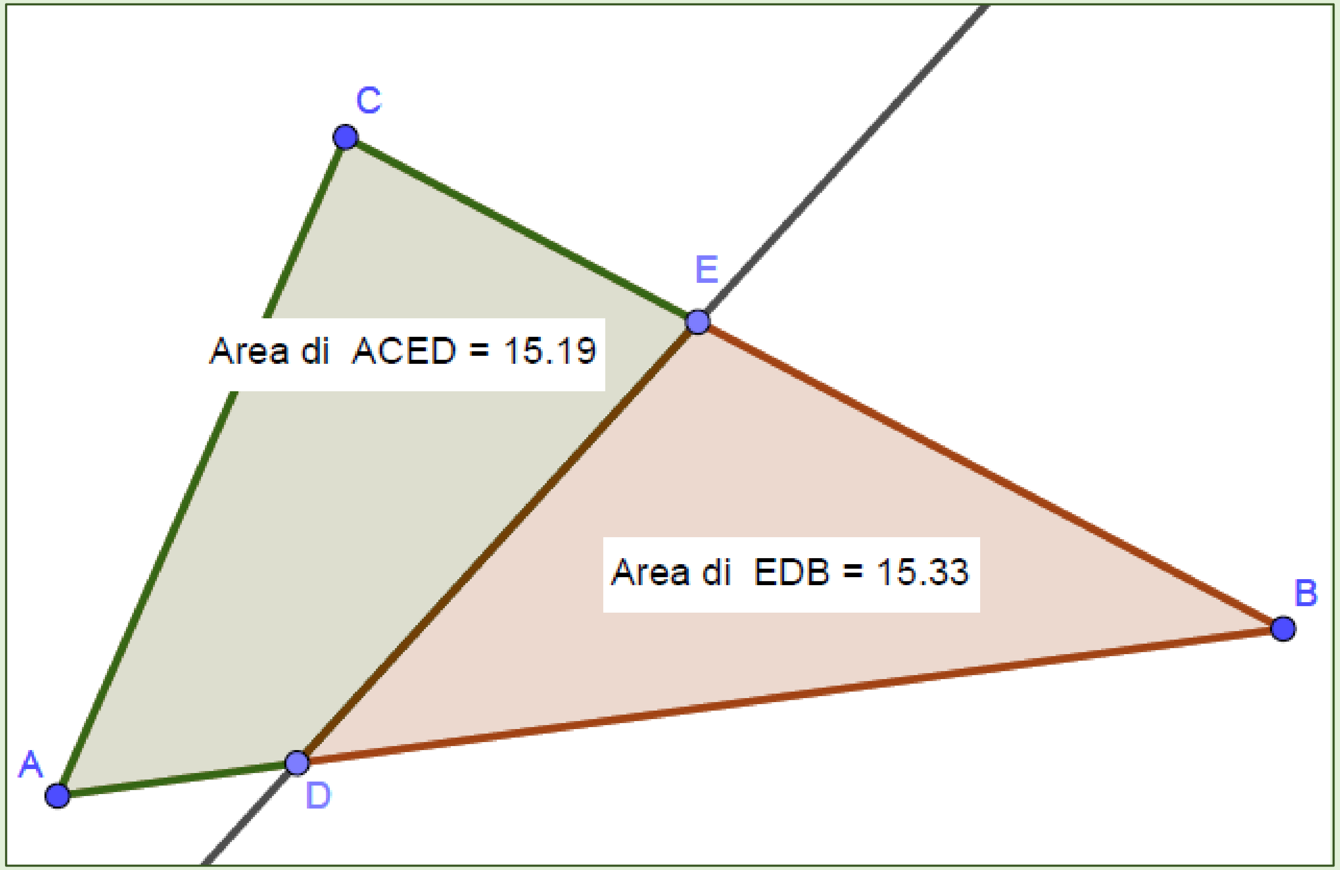
I ragazzi si sono messi così a ragionare sulla possibile costruzione, producendo i seguenti file su GeoGebra:





Dividere un triangolo in due parti equiestese con una secante che taglia due suoi lati

Nella figura è rappresentato un tentativo… ma come si dovrebbe costruire in maniera precisa la retta ED?



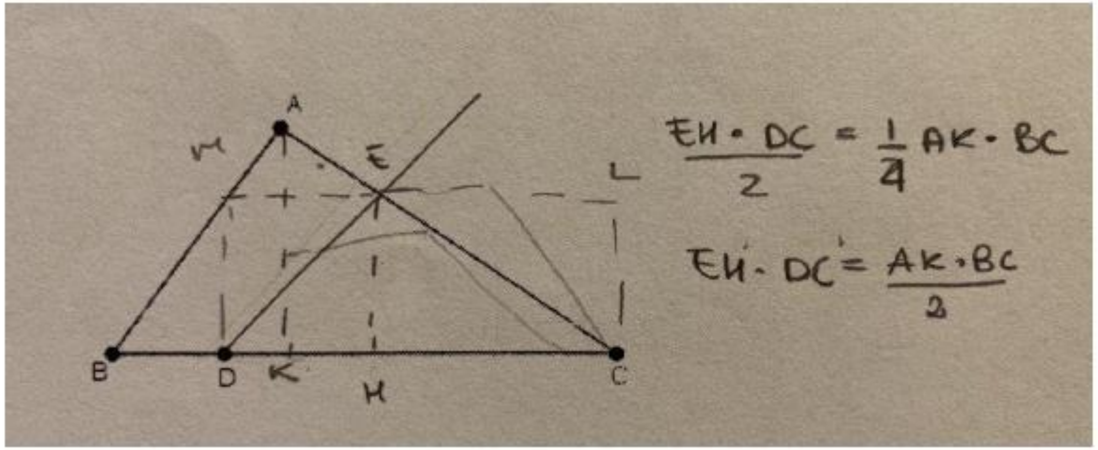


Figura 5.30: Calcoli, gruppo 1.

Prof.: *Ok. Però ancora non avete trovato un modo per costruire il punto E?*

Alunna 7: *No! Stavamo cercando di capire una relazione per determinare il punto E.*

Prof.: *Il punto medio però non lo avete utilizzato?*

Alunna 7: *Abbiamo fatto un altro disegno per vedere se ci viene in mente qualcosa, però per adesso no.*

Alunna 3: *Abbiamo tracciato la mediana della base.*

Prof.: *Sarebbe GK?*

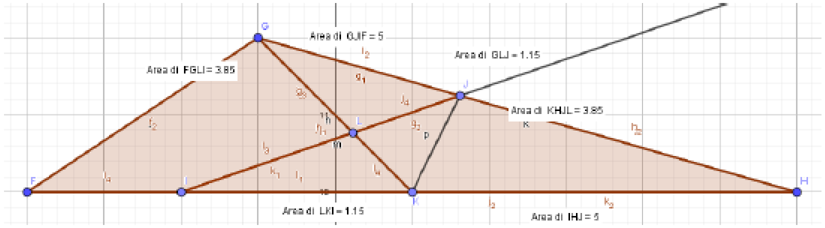


Figura 5.31: Immagine della possibile soluzione del problema 3, gruppo 2.

Alunna 3: *Si e abbiamo visto che questi due triangoli sono congruenti* (indicandomi i triangoli $L\widehat{I}K$ e $G\widehat{L}J$) *e anche questi du* (indicandomi i quadrilateri $GFIL$ e $JLKH$).

Alunna 4: *No non congruenti, hanno l'area uguale.*

Prof.: *E quindi?*

Alunna 3: *Si sono simili!*

Prof.: *Ok, sono simili. Ma qual è il segmento che vi divide il triangolo in due parti di area uguale?*

Alunna 3: *Questo!?* (indicandomi il segmento IJ).

Prof.: *Si esatto quello, quindi avete trovato la costruzione!?*

Alunna 3: *Magia!*

Prof.: *Me la sapresti ripetere? Cosa avete fatto?*

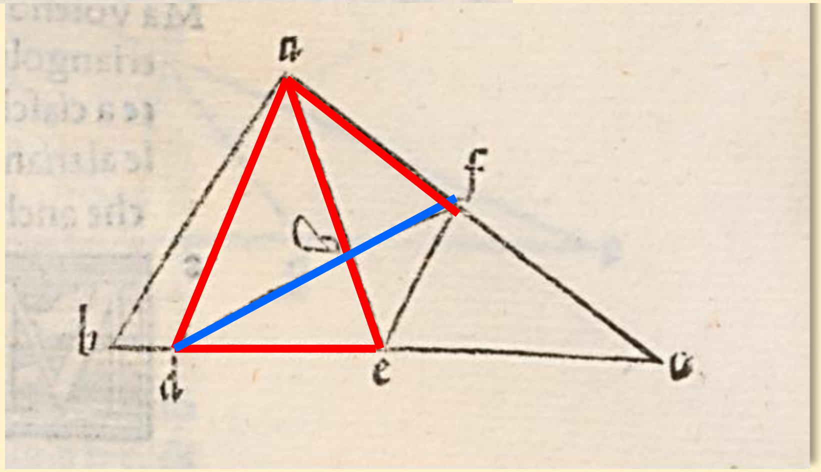
Alunna 5: *Abbiamo tracciato la mediana e abbiamo trovato che i due triangoli e quadrilateri sono equivalenti...*

Alunna 3: *Si sono equivalenti!*

ſeguita il propoſito.Et queſto fu il primo modo da me trouato, per dimoſtrar le ſimili diuiſioni,ma dapoi trouai,che per vn'altro piu breue modo ſi puo dimoſtrare,che la detta linea.d f.diuide il detto triangolo.a b c.in 2 parti eguali,il qual modo è queſto,li duoi triãgoli.a d f.&.a d e.ſono eguali(per la 37 del primo di Euclide)per eſſer ambiduoi ſopra vna medeſima baſa,che è la.a d.& fra le due linee a d.&.e f.equidiſtanti, e per tanto aggiongendo communamente a ciaſcheduno di quelli,il triangolo.a b d.(per communa ſcienza)li duoi reſultanti ſaranno eguali,delliquali duoi reſultanti,l'uno è il triangolo.a b e.& l'altro è il quadrilatero.a f d b.& perche il triangolo.a b e.è la mita del triangolo.a b c.ſeguita che anchora il quadrilatero.a f d b. ſia la mita del medeſimo triangolo.a b c.che è il propoſito.Et coſi con queſti duoi modi ſi puo dimoſtrare non ſolamente la ſopranotata concluſione,ma anchora la maggior parte di quelle,che ſeguitano in queſta materia di diuidere le ſuperficie in parti, come nel noſtro proceſſo intenderai,ma queſto ſecondo è molto piu iſpediente del primo, perche ſempre le prime inuẽtioni hanno ſempre del ruſtico,ma con tempo ſi vanno limando.

Theorema.xxvii. Propoſitione.xxxvii.

37 Tutti li triangoli liquali ſono coſtituidi ſopra una medeſima ba
37 la & fra due meedeſime linee equidiſtante ſono fra loro equali.



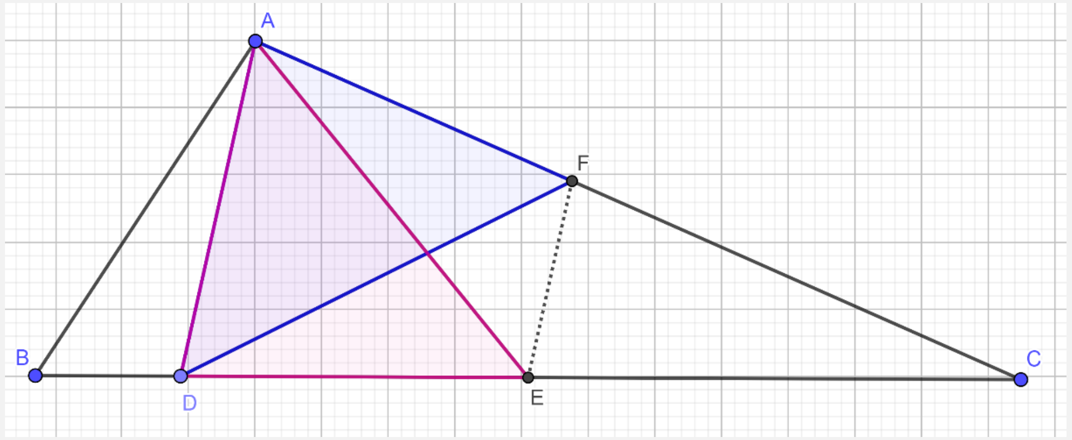
Euclide di Tartaglia, 1543

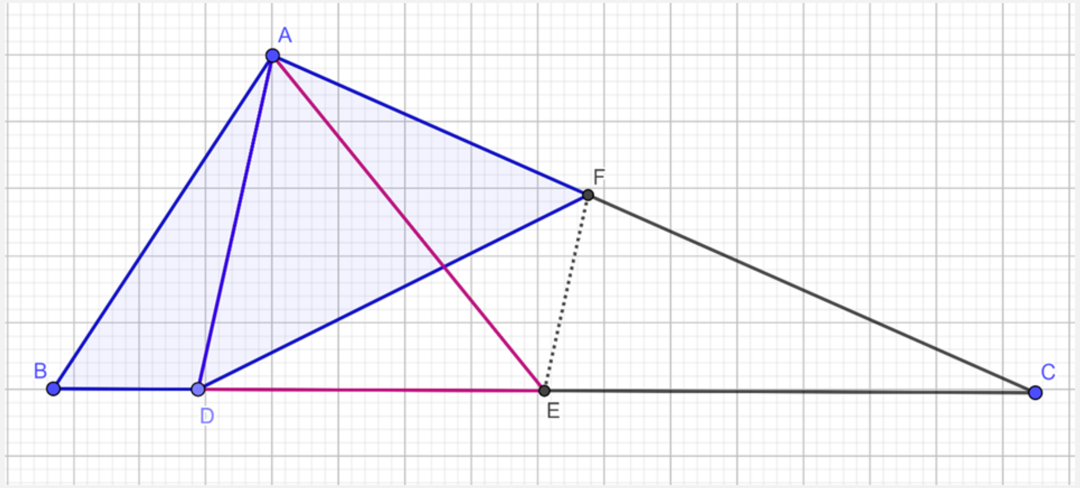
$T(\mathrm{ADF}) \cong T(\mathrm{ADE})$ per *El.* I.37

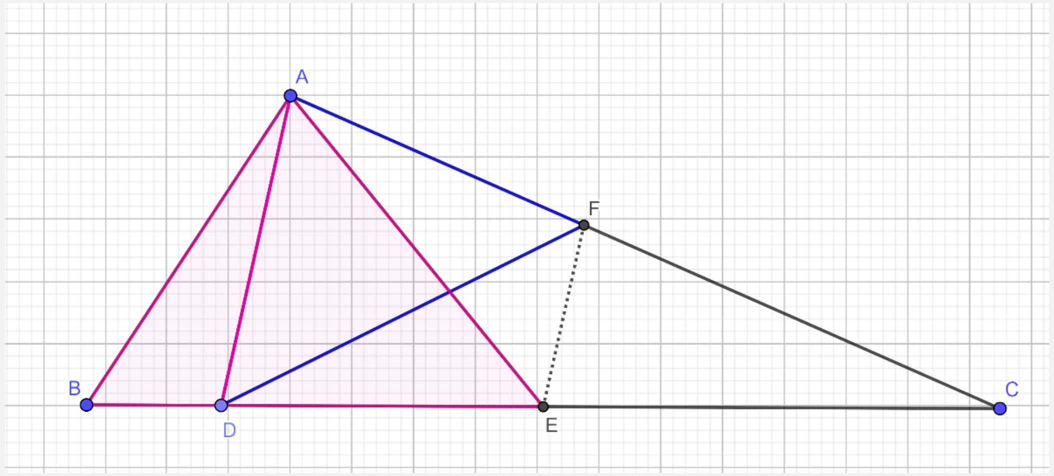
$T(\mathrm{ADF}) + T(\mathrm{ABD}) \cong T(\mathrm{ADE}) + T(\mathrm{ABD})$

$Q(\mathrm{ABDF}) \cong T(\mathrm{ABE})$

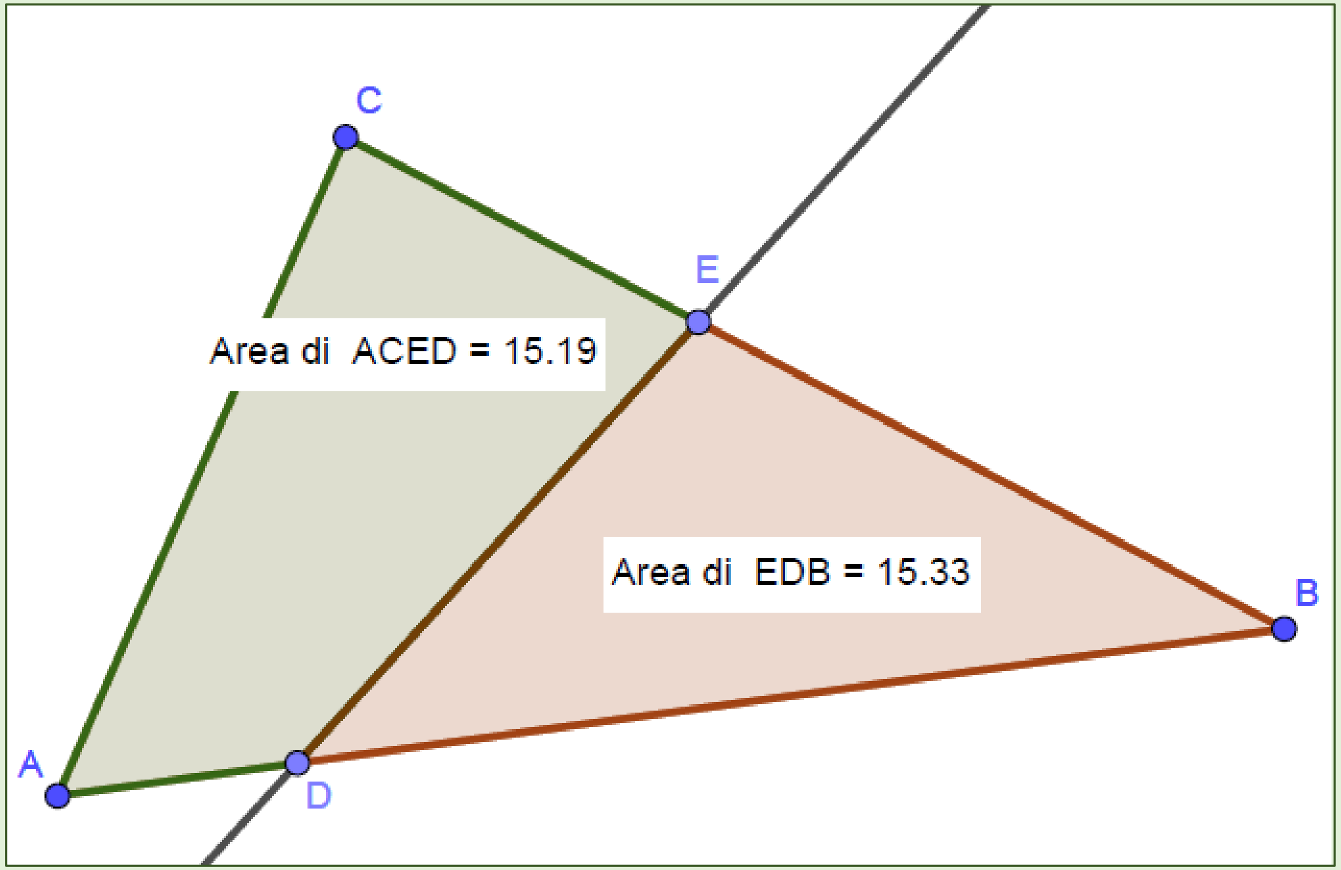
Ma $T(\mathrm{ABE})$ è la metà di $T(\mathrm{ABC})$ perché AE è una mediana e dunque anche $Q(\mathrm{ABDF})$ è la metà di $T(\mathrm{ABC})$



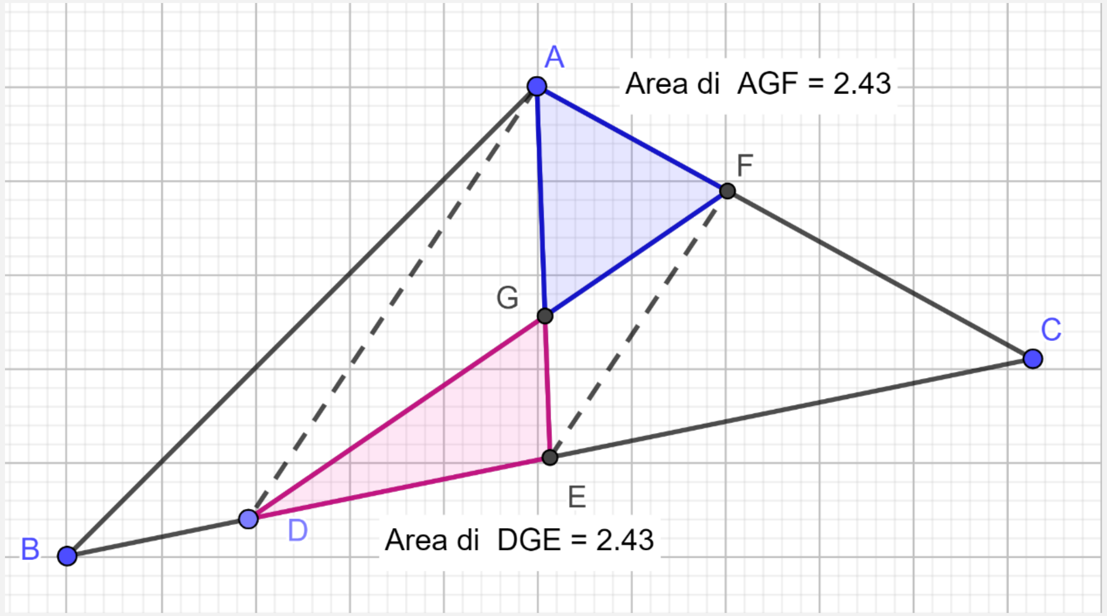




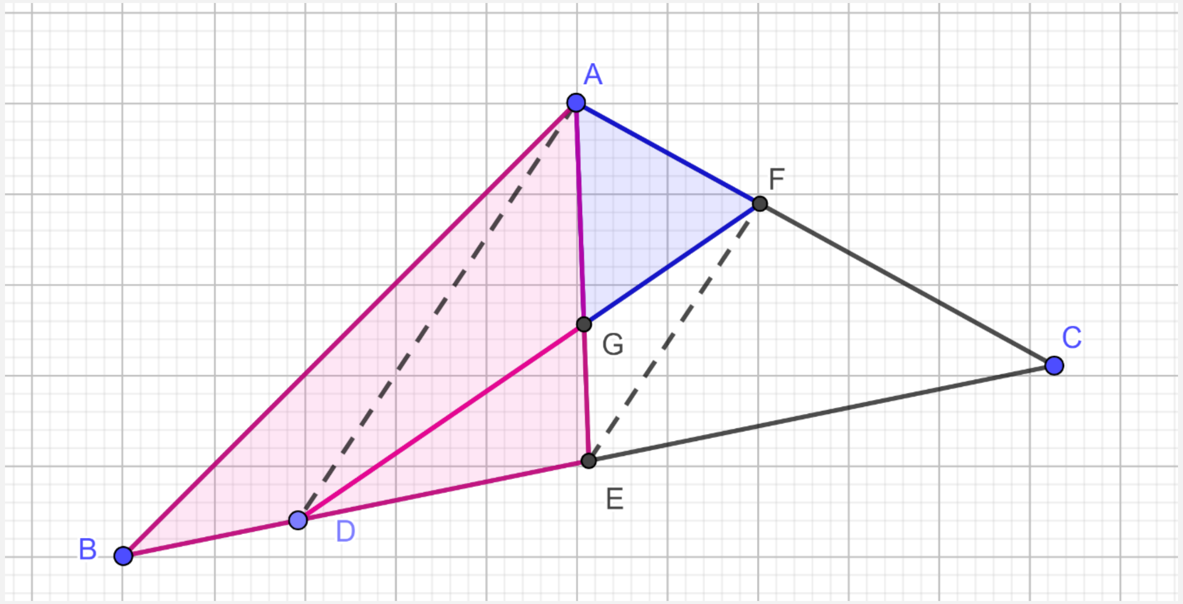
Dividere un triangolo in due parti equiestese con una secante che taglia due suoi lati

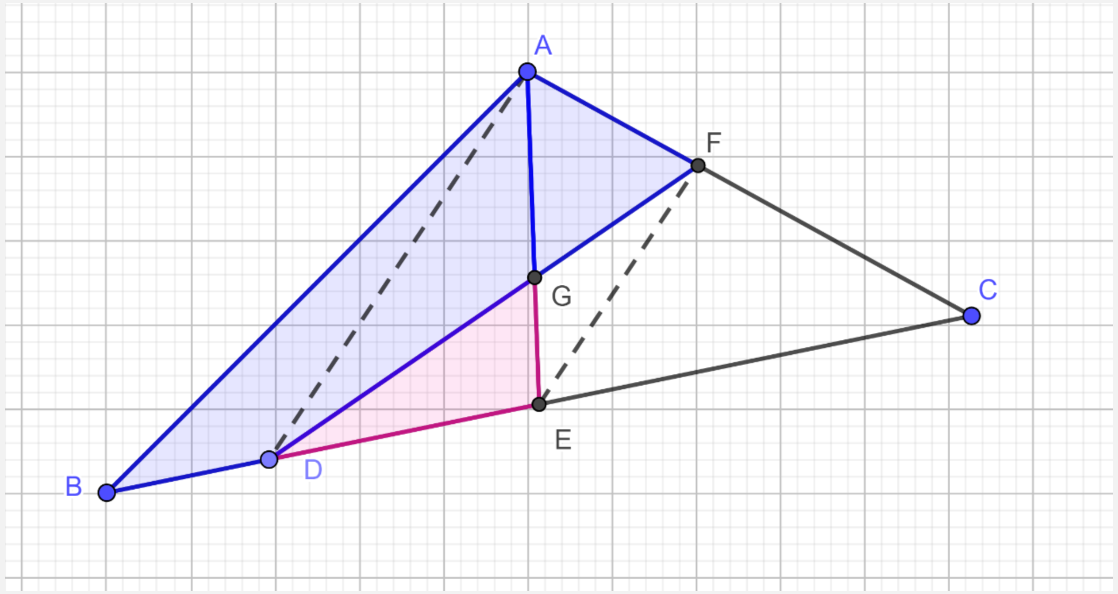


Se D scorre sul lato AB, il punto E finirà per giacere sul lato CA. Quando avviene il passaggio di E dal lato BC al lato CA?



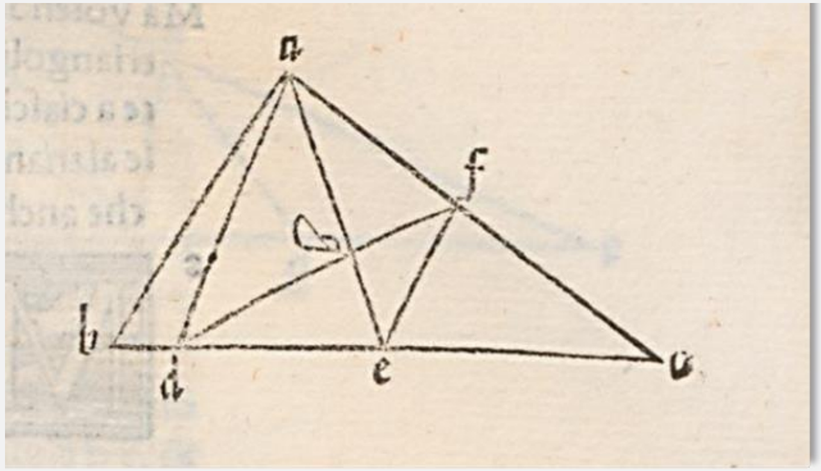
Ma qual era il primo metodo? L'idea è quella di dimostrare che i due triangoli AGF e DGE sono equiestesi (senza ricondursi al caso precedente)

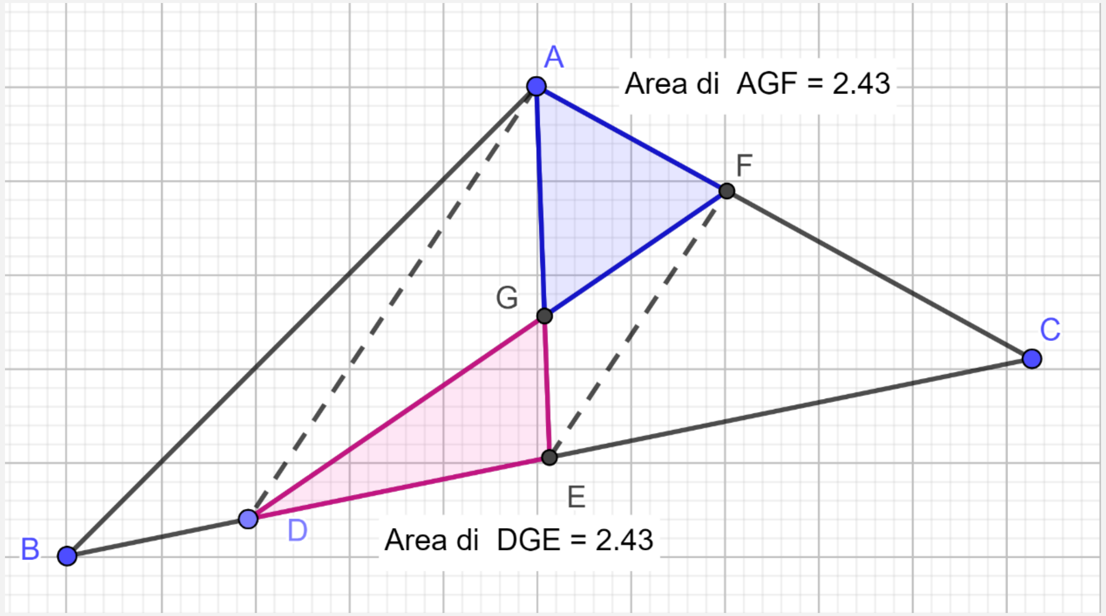




to.a b c.in due parti eguali,che è il proposito.

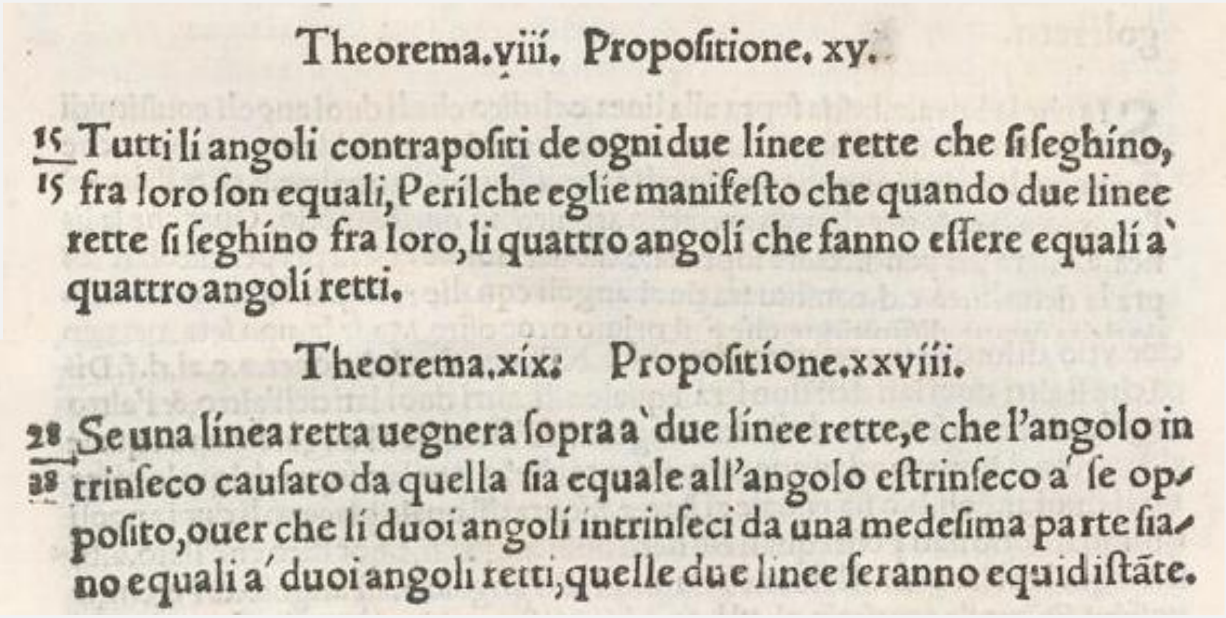
Per dimostrare che li detti duoi triangoletti.a g f.&.d g e.sono eguali, eglie manifesto (per la decima quinta,& vintesima ottaua del primo di Euclide)li duoi triangoli.a g d.&.e g f. esser simili, e pero la proportione del lato.d g.al lato.g f.esser si come quella del lato.a g. al lato.g e. liquali lati sono anchora lati delli duoi triangoletti.a g f.& . d g e. liquali lati in quelli vengono a essere mutui,ouer reciproce,ouer Mutukesia,perche si vede,che la proportione del lato.g d.del triangolo.d g e.al lato.g f.del triangolo.a g f.e si come quella del lato.a g. del triangolo . a g f. al lato g e.del triangolo.d g e.è l'angolo.g.di l'uno(per la decimaquinta del primo di Euclide)è eguale a l'angolo.g.dell'altro, e pero(per la decimaquinta del sesto di Euclide)sono eguali , e per tanto seguita il proposito.Et questo fu il primo modo da me trouato , per dimostrar le simili diuisio-





Per dimostrare che li detti due triangoletti AGF & DGE sono eguali, egli è manifesto (per la decimaquinta & vintesima ottava del primo di Euclide) li **duoi triangoli AGD & EGF esser simili**, e pero la proportione del lato DG al lato GF esser si come quella del lato AG al GE liquali lati sono anchora lati delli duoi triangoletti AGF & DGE

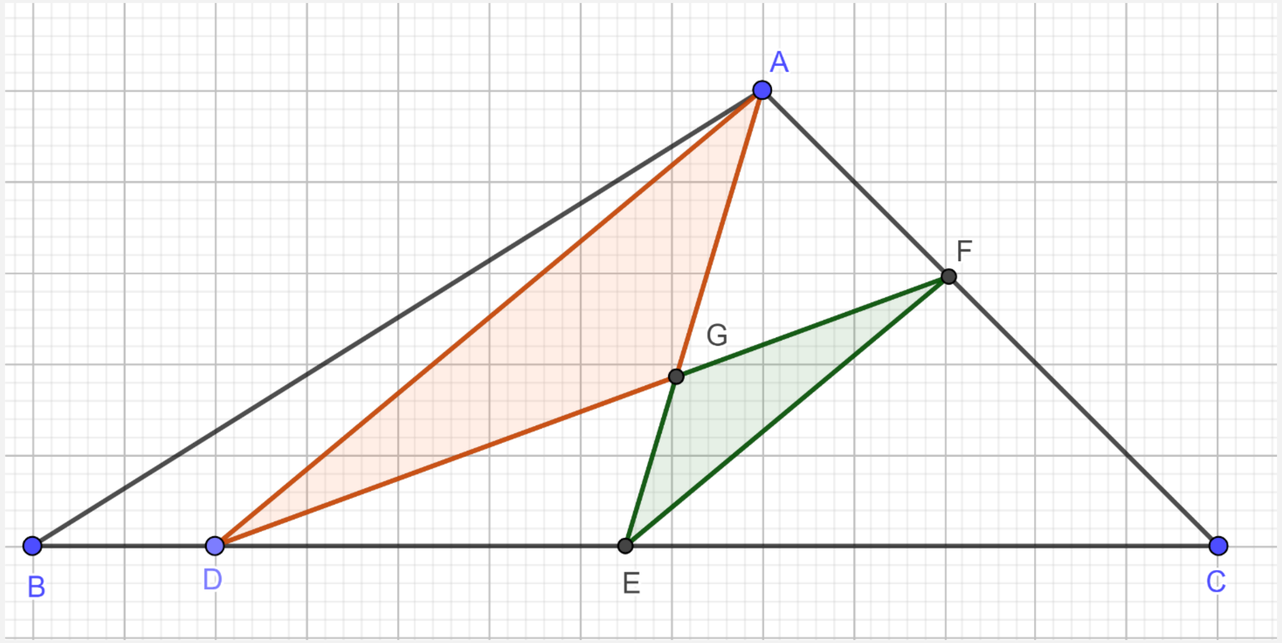
$$DG : GF = AG : GE$$


Theorema.viii. Propoſitione.xv.

15 Tutti li angoli contrapoſiti de ogni due linee rette che ſi ſeghino,
15 fra loro ſon equali, Perilche egli e manifeſto che quando due linee
rette ſi ſeghino fra loro, li quattro angoli che fanno eſſere equali a`
quattro angoli retti.

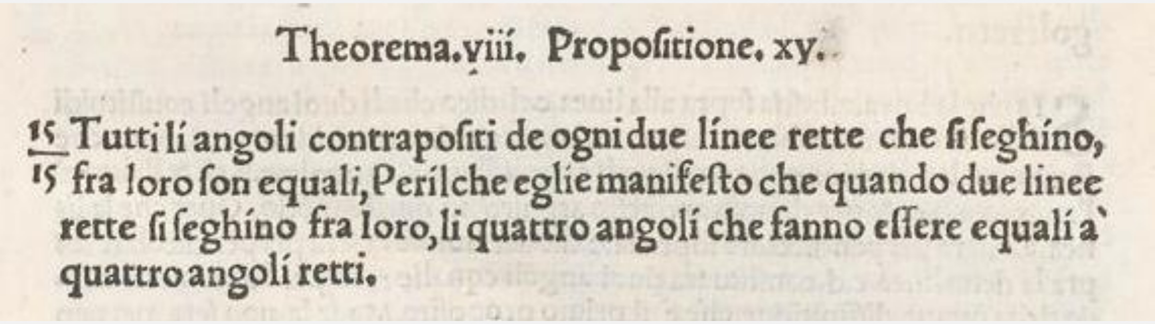
Theorema.xix. Propoſitione.xxviii.

28 Se una linea retta uegnera ſopra a` due linee rette, e che l'angolo in
28 trinſeco cauſato da quella ſia equale all'angolo eſtrinſeco a' ſe op-
poſito, ouer che li duoi angoli intrinſeci da una medeſima parte ſia-
no equali a' duoi angoli retti, quelle due linee ſeranno equidiſtãte.



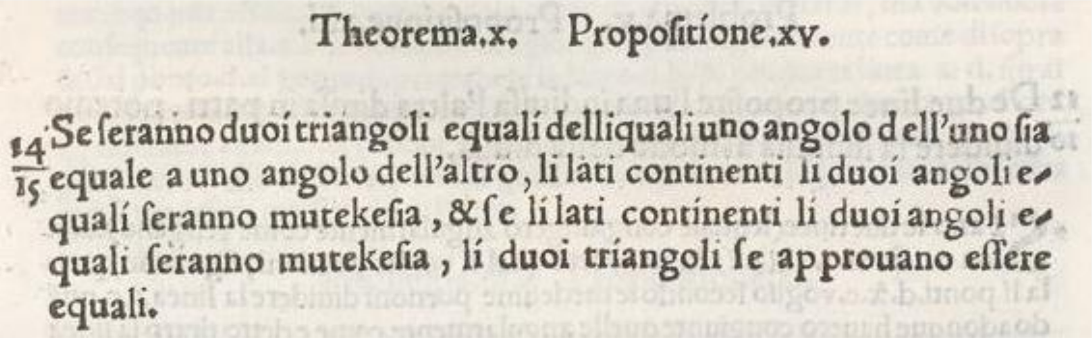
Li quali lati in quelli vengono a essere mutui, over reciproce, over Mutekefia, perche si vede, che la proportione del lato GD del triangolo DGE al lato GF del triangolo AGF si come quella del lato AG del triangolo AGF al lato GE del triangolo DGE e l’angolo G di uno (per la decimaquinta del primo di Euclide) è eguale all’angolo G dell’altro e **pero (per la decimaquinta del sesto di Euclide) sono eguali e pertanto seguita il proposito**.

$$DG : GF = AG : GE$$



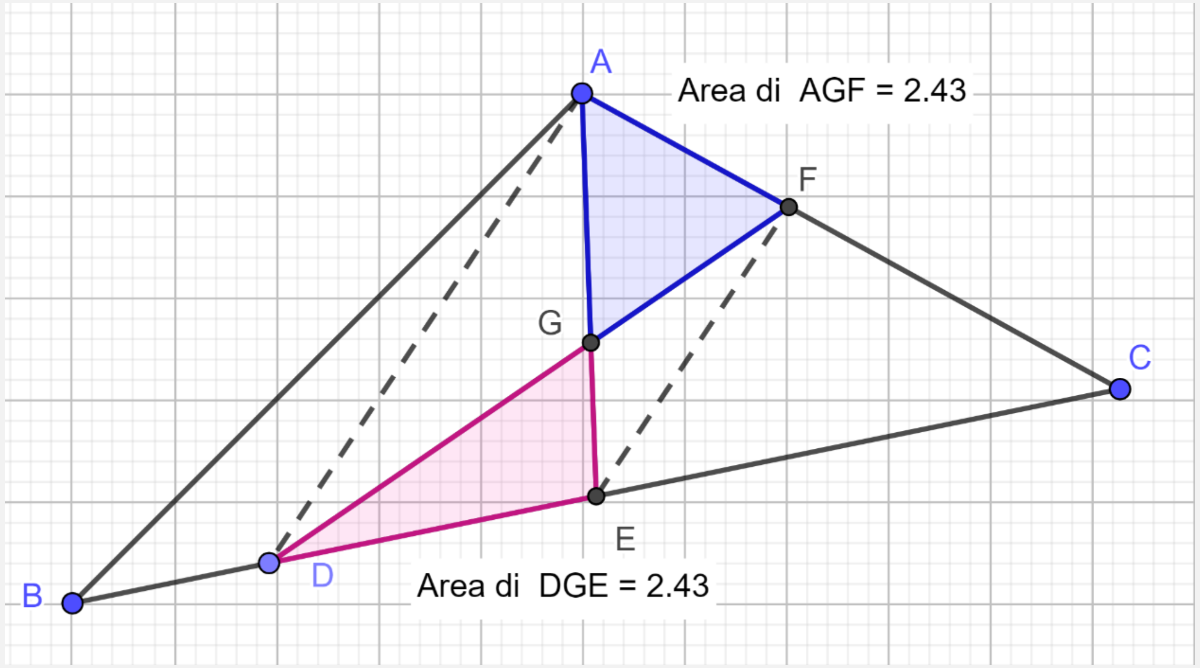
Theorema.viii. Propoſitione.xy.

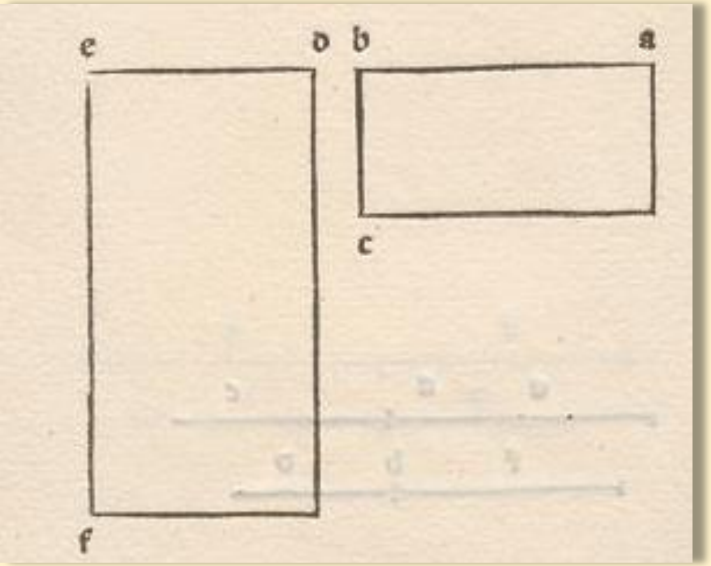
15 Tutti li angoli contrapoſiti de ogni due linee rette che ſi ſeghino,
15 fra loro ſon equali, Perilche egli e manifeſto che quando due linee rette ſi ſeghino fra loro, li quattro angoli che fanno eſſere equali à quattro angoli retti.



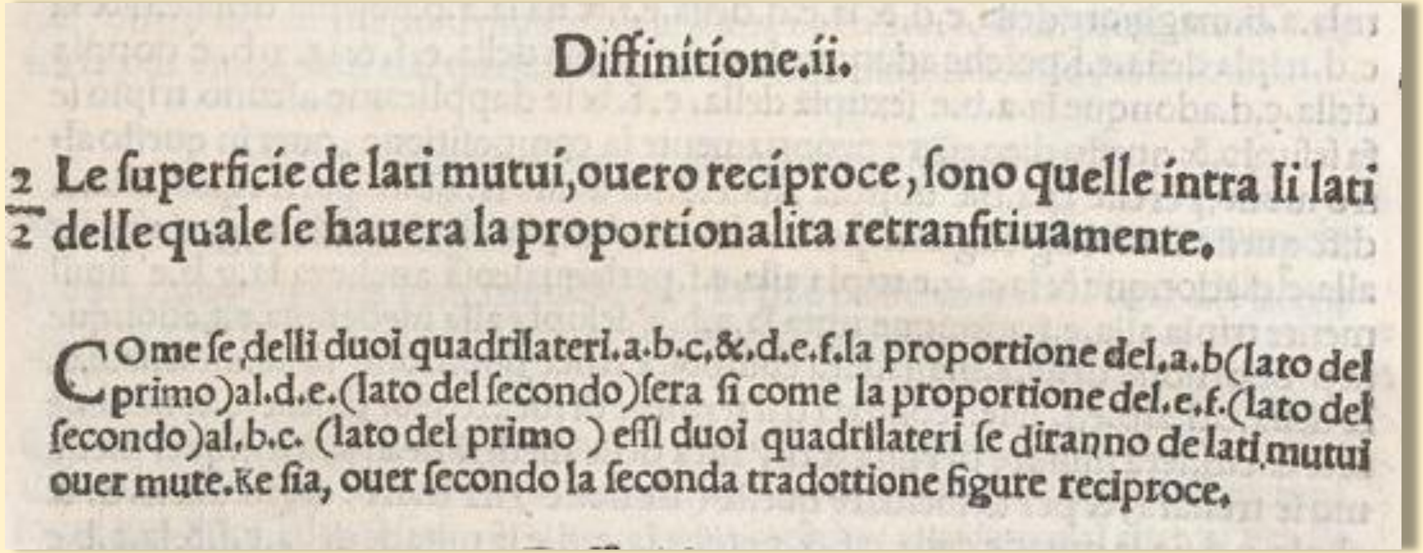
Theorema.x. Propoſitione.xv.

14/15 Se ſeranno duoi triangoli equali delliquali uno angolo dell’uno ſia equale a uno angolo dell’altro, li lati continenti li duoi angoli equali ſeranno mutekeſia, & ſe li lati continenti li duoi angoli equali ſeranno mutekeſia, li duoi triangoli ſe approuano eſſere equali.





Def. VI.13 […] At si duorum quadrilaterum a b c, d e f proportio a b lateris primi ad d e latus secundi fuerit sicut proportio e f lateris secundi ad b c latus primi, illa duo quadrilatera dicuntur mutuorum laterum sive mutekefia.



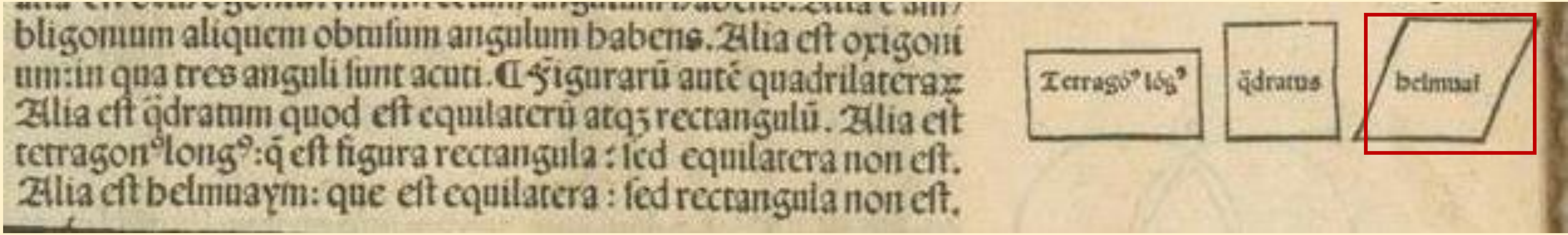
Diffinitione.ii.

2/2 Le ſuperficie de lati mutui,ouero reciproce, ſono quelle intra li lati delle quale ſe hauera la proportionalita retranſitiuamente.

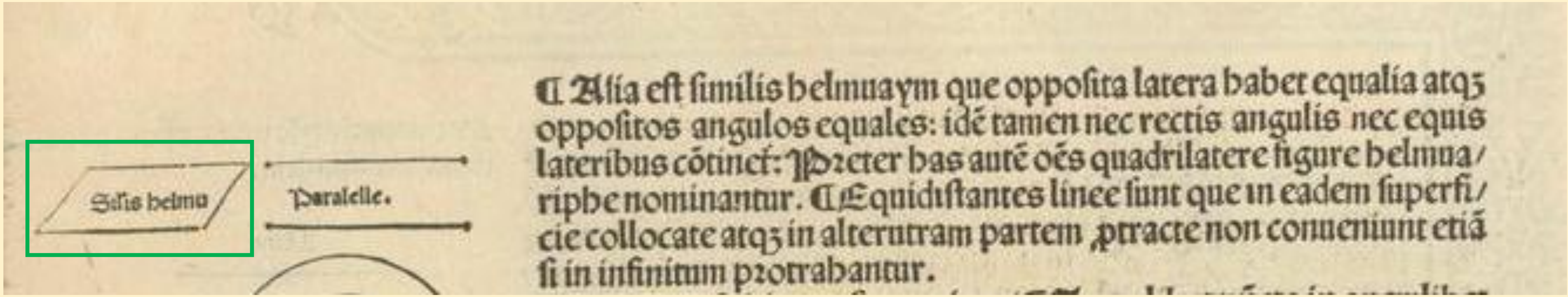
Come ſe, delli duoi quadrilateri.a.b.c,&.d.e.f.la proportione del.a.b(lato del primo)al.d.e.(lato del ſecondo)ſera ſi come la proportione del.e.f.(lato del ſecondo)al.b.c. (lato del primo) eſſi duoi quadrilateri ſe diranno de lati mutui ouer mute.Ke ſia, ouer ſecondo la ſeconda tradottione figure reciproce.

Il termine *mutekefia* ricorre nei testi latini basati sulle versioni degli *Elementi* di Adelardo di Bath e di Ermanno di Carinzia ed è passato nella redazione di Campano

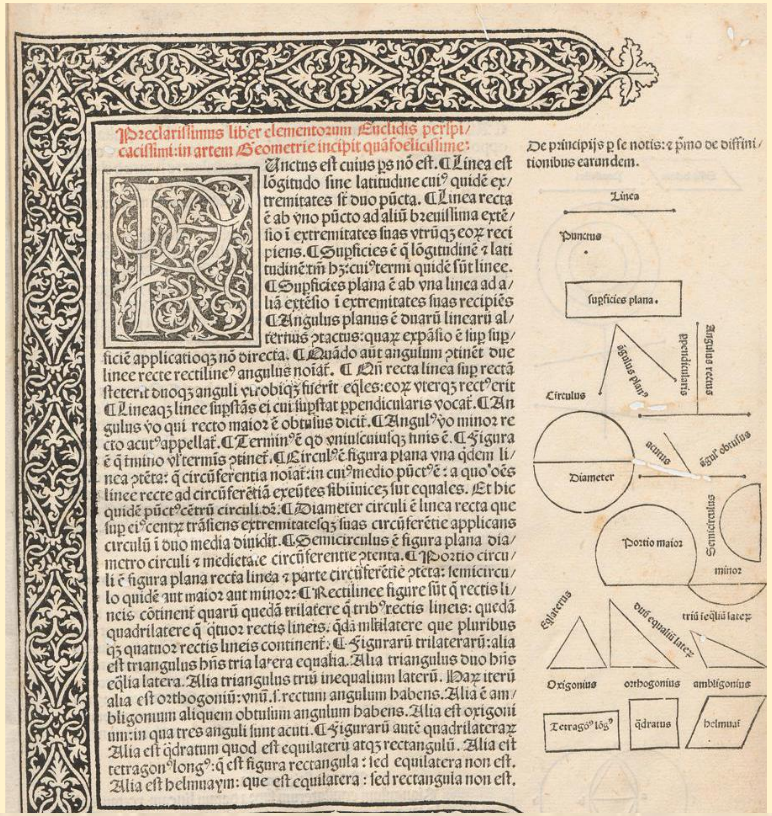
Alia est ***helmuaym*** [rombo]: *que est equilatera: sed rectangula non est. Alia est* ***similis helmuaym*** [parallelogramma o romboide] *que opposita latera habet equalia atque oppositos angulos equales…. Preter has autem omnes quadrilatere figure helmuariphe nominantur* (ed. Ratdolt 1482, recensio di Campano)



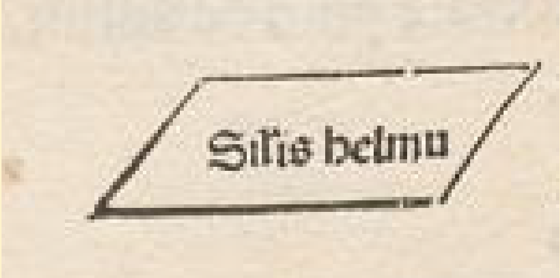
bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est origonium: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarū autē quadrilaterarum Alia est q̃dratum quod est equilaterū atq; rectangulū. Alia est tetragonus longus: q̄ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.



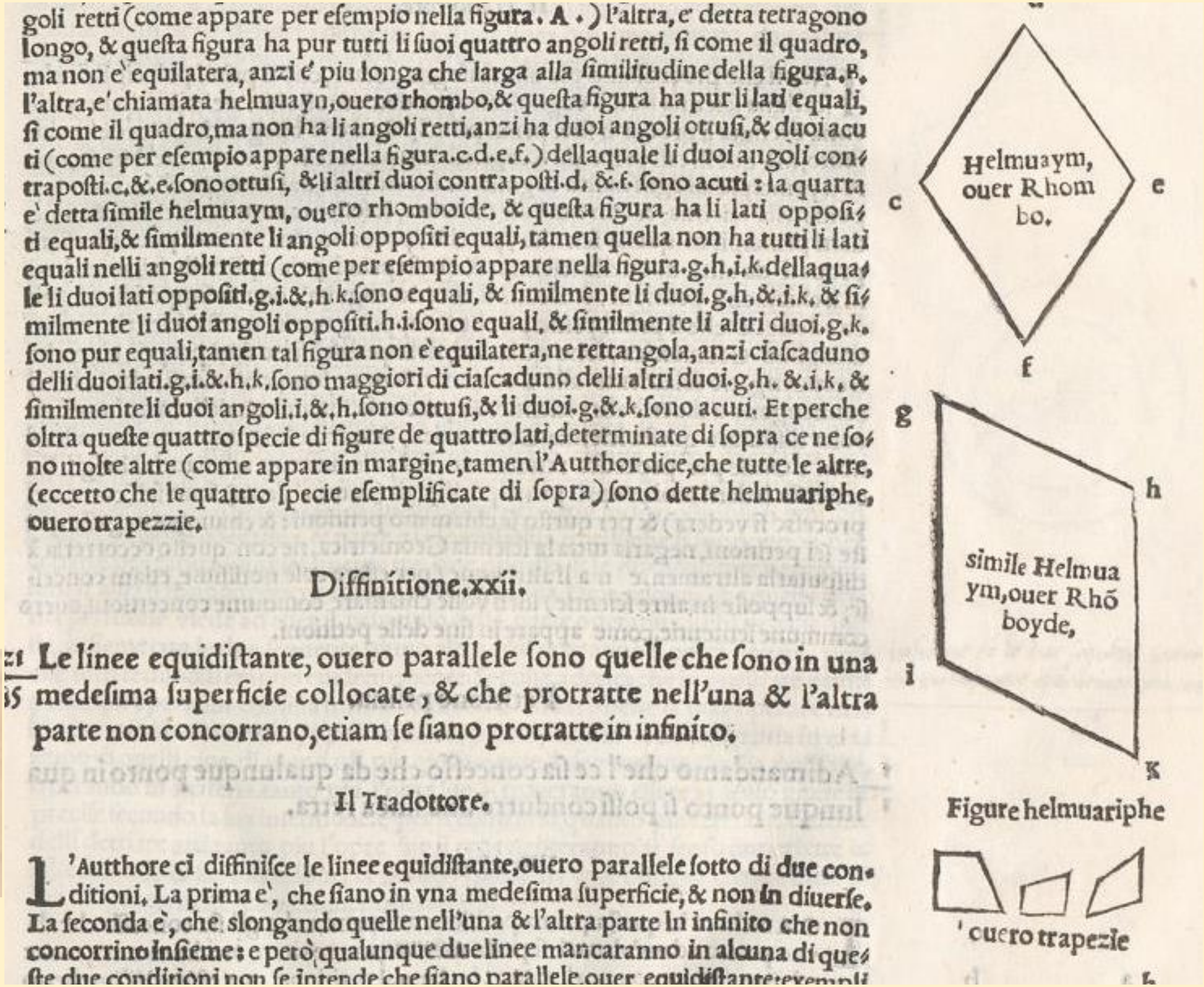
¶ Alia est similis helmuaym que opposita latera habet equalia atq; oppositos angulos equales: idē tamen nec rectis angulis nec equis lateribus cōtinet: Preter has autē oēs quadrilatere figure helmuariphe nominantur. ¶ Equidistantes linee sunt que in eadem superficie collocate atq; in alterutram partem protracte non conueniunt etiā si in infinitum protrahantur.



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:



Campano 1482



goli retti (come appare per esempio nella figura. A.) l'altra, e' detta tetragono longo, & questa figura ha pur tutti li suoi quattro angoli retti, si come il quadro, ma non e' equilatera, anzi e' piu longa che larga alla similitudine della figura. B. l'altra, e' chiamata helmuayn, ouero rhombo, & questa figura ha pur li lati equali, si come il quadro, ma non ha li angoli retti, anzi ha duoi angoli ottusi, & duoi acuti (come per esempio appare nella figura. c. d. e. f.) dellaquale li duoi angoli contrapositi. c. & e. sono ottusi, & li altri duoi contrapositi. d. & f. sono acuti: la quarta e' detta simile helmuaym, ouero rhomboide, & questa figura ha li lati oppositi equali, & similmente li angoli oppositi equali, tamen quella non ha tutti li lati equali nelli angoli retti (come per esempio appare nella figura. g. h. i. k. dellaquale li duoi lati oppositi. g. i. & h. k. sono equali, & similmente li duoi. g. h. & i. k. & similmente li duoi angoli oppositi. h. i. sono equali, & similmente li altri duoi. g. k. sono pur equali, tamen tal figura non e' equilatera, ne rettangola, anzi ciascaduno delli duoi lati. g. i. & h. k. sono maggiori di ciascaduno delli altri duoi. g. h. & i. k. & similmente li duoi angoli. i. & h. sono ottusi, & li duoi. g. & k. sono acuti. Et perche oltra queste quattro specie di figure de quattro lati, determinate di sopra ce ne sono molte altre (come appare in margine, tamen l'Autthor dice, che tutte le altre, (eccetto che le quattro specie esemplificate di sopra) sono dette helmuariphe, ouero trapezzie.

Diffinitione. xxii.

Le linee equidistante, ouero parallele sono quelle che sono in una medesima superficie collocate, & che protratte nell'una & l'altra parte non concorrano, etiam se siano protratte in infinito.

Il Tradottore.

L'Autthore ci diffinisce le linee equidistante, ouero parallele sotto di due conditioni. La prima e', che siano in vna medesima superficie, & non in diuerse. La seconda e', che slongando quelle nell'una & l'altra parte in infinito che non concorrino insieme: e però qualunque due linee mancaranno in alcuna di queste due conditioni non se intende che siano parallele, ouer equidistante: exempli

Tartaglia 1543

Eucl. Elem. VI.15

Theorema.x. Propositione.xv.

14/15 Se ſeranno duoi triangoli equali delliquali uno angolo dell'uno ſia equale a uno angolo dell'altro, li lati continenti li duoi angoli equali ſeranno mutekeſia, & ſe li lati continenti li duoi angoli equali ſeranno mutekeſia, li duoi triangoli ſe approuano eſſere equali.

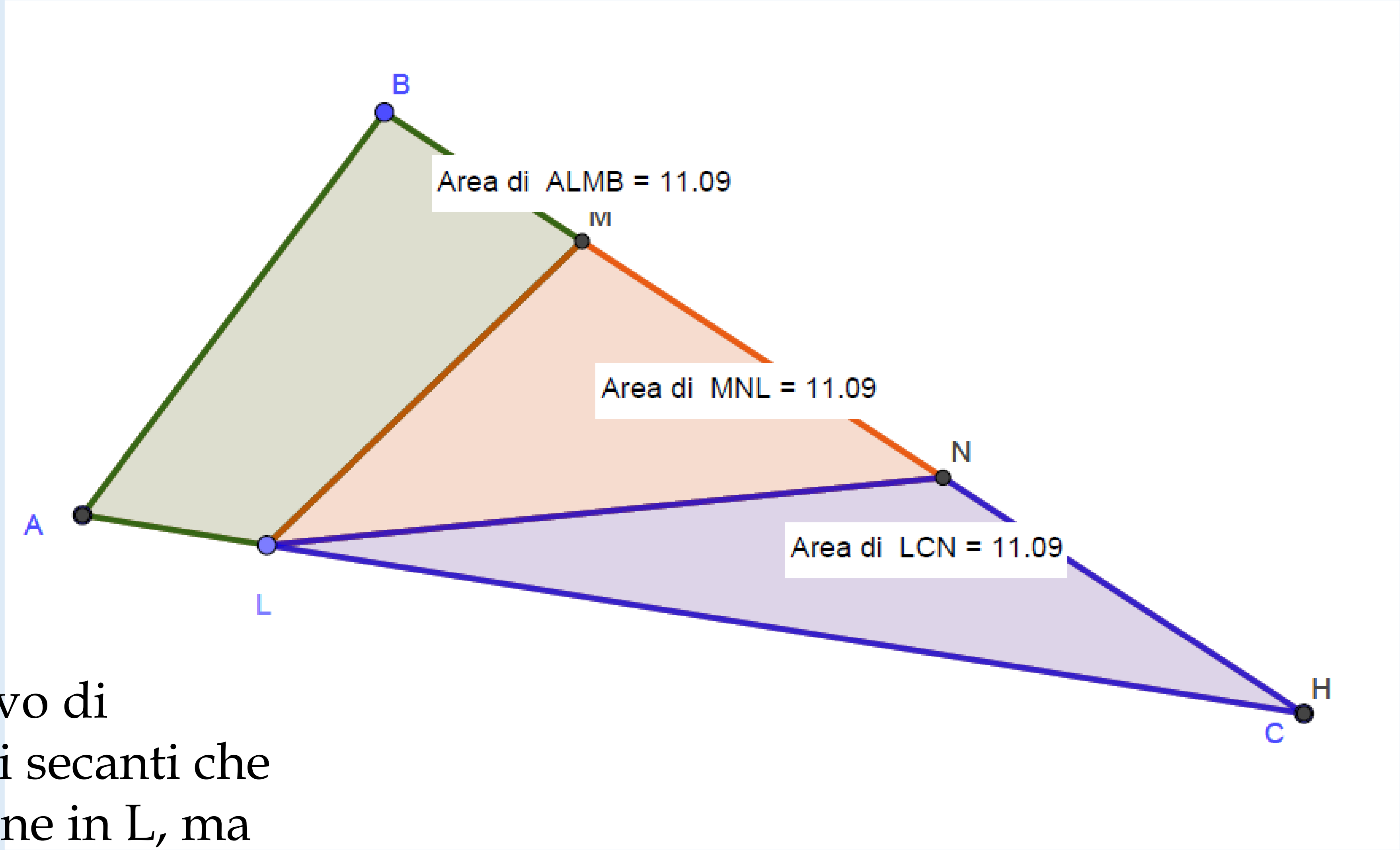
Teorema.x.propoſitio.xv.

Equalium τ vnum vni aequalē habentiū angulū triāgulorum reciproca ſunt latera que circa aequales angulos: τ quorum vnū vni angulū aequalem habentium triāgulorum reciproca ſunt latera que circum aequales angulos: ea quoque ſunt aequalia.

Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli con un angolo congruente siano equiestesi è che i lati contenenti l'angolo siano inversamente proporzionali

L'usuale traduzione per mutekefia è «inversamente proporzionali»

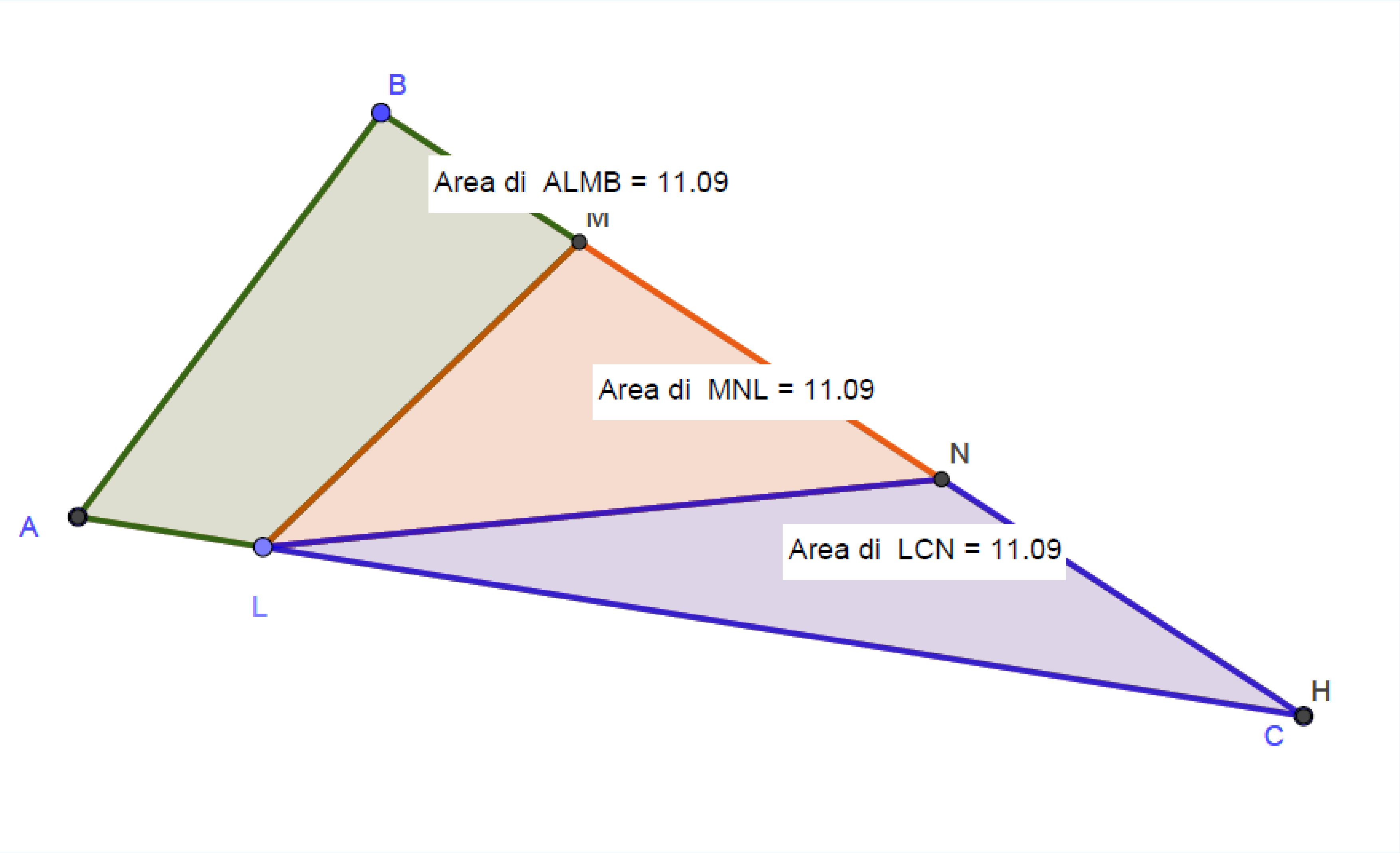
Dividere un triangolo in <u>tre</u> parti equiestese con due secanti che si interescano in un punto di un lato



A destra c'è un tentativo di costruire due segmenti secanti che hanno l'estremo comune in L, ma come si possono costruire esattamente i punti M e N?

Ci si può ispirare alla costruzione precedente?

In questo caso può essere utile osservare che una volta determinato il segmento LM che stacca il quadrilatero ALMB pari a un terzo del triangolo, poi è facile determinare il segmento LN come mediana di MLC.



DA vn ponto dato in vno di lati di vn triangolo potemmo tagliar la terza parte di tal triangolo. Sia eſſempi gratia il triangolo.a b c.& nel lato.b c.di quello ſia dato il ponto.d.volendo dal detto ponto.d.con vna linea retta tagliar la terza parte di tal triangolo, ſe per ſorte il ponto.d.fuſſe nella terza parte della . b c. tirando vna linea dal detto ponto.d.al ponto.a. (per le ragioni adutte ſopra la ſettima di queſto capo) ſaria riſolto il problema.

Ma ſel non e nella terza parte, ouer che ſara lontano dal.b.piu , ouer meno della detta terza parte , hor poniamo, che la.b d.ſia meno della terza parte , tiraremo pur ſi come nella precedente la linea.a d.& trouaremo la terza parte della.b c. laqual ſia la.b e.& dal ponto. e. tiraremo la

Il primo passo per la costruzione potrebbe essere trovare il punto P tale che AP sia 1/3 di AC (caso particolare semplice).

Ma come si costruisce senza misure?

(Gli studenti hanno usato un *escamotage* che ha di fatto reso le loro figure «non robuste» … quindi il problema si pone).

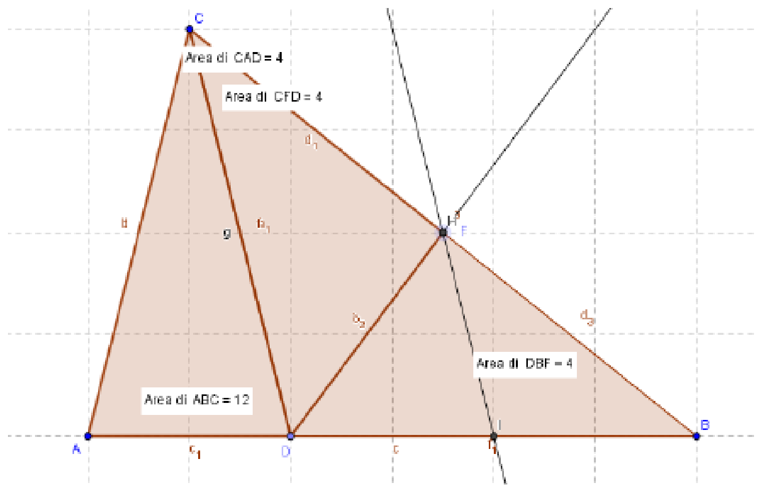


Figura 5.37: Costruzione della soluzione del problema 4, gruppo 8.

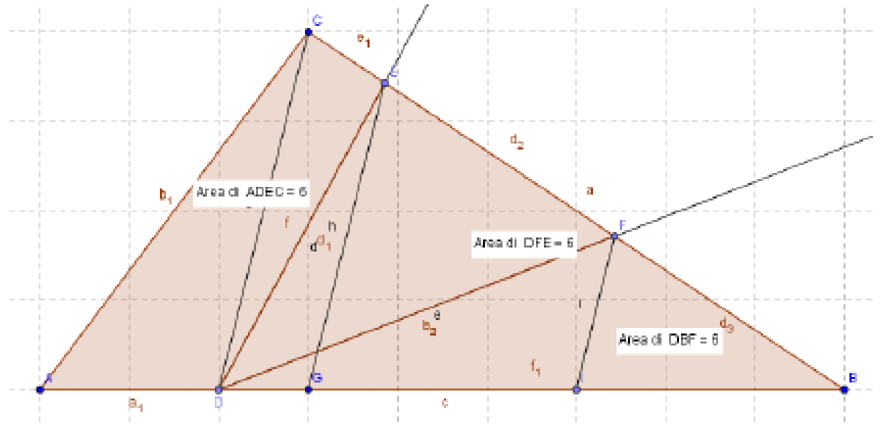
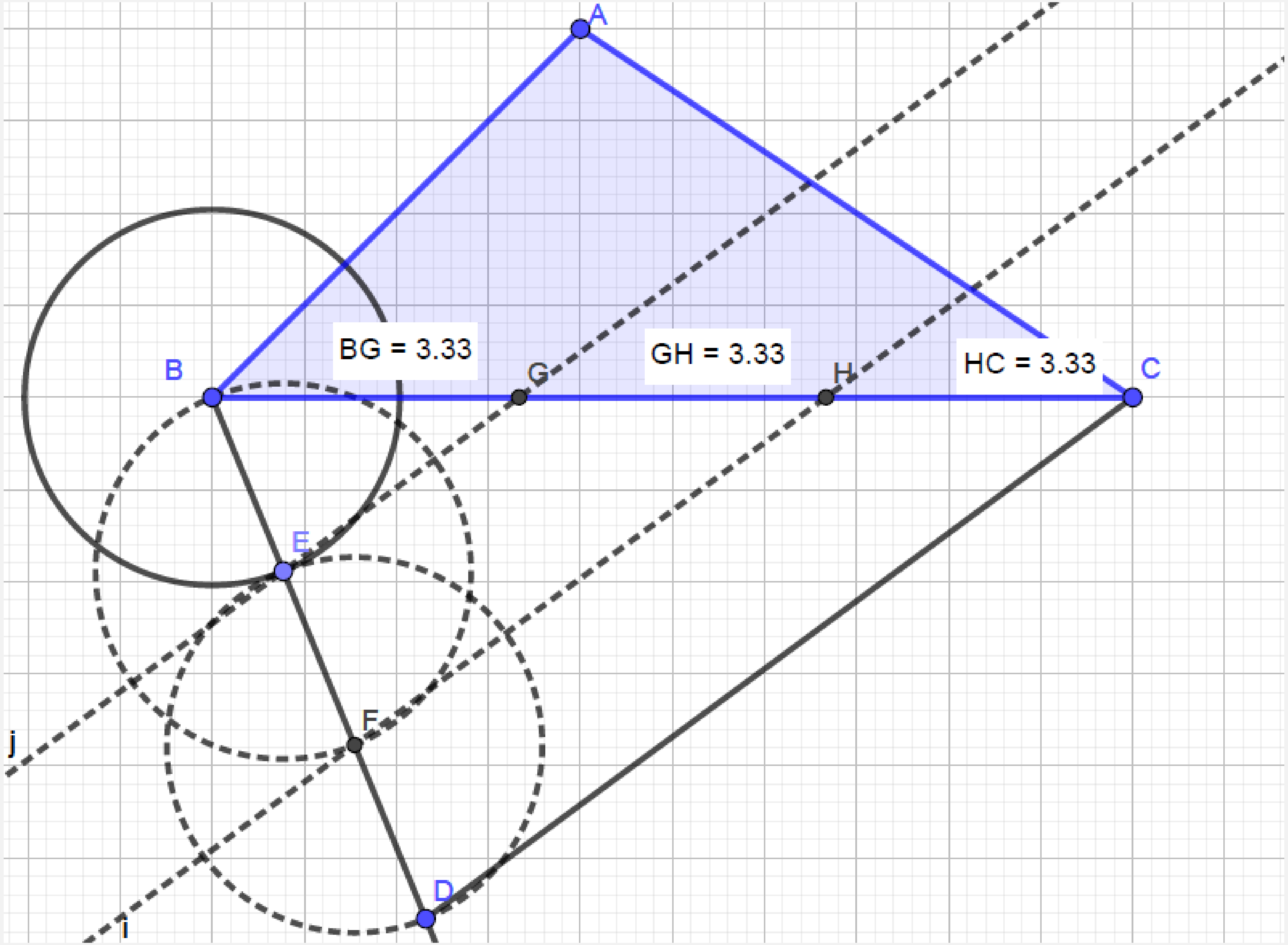
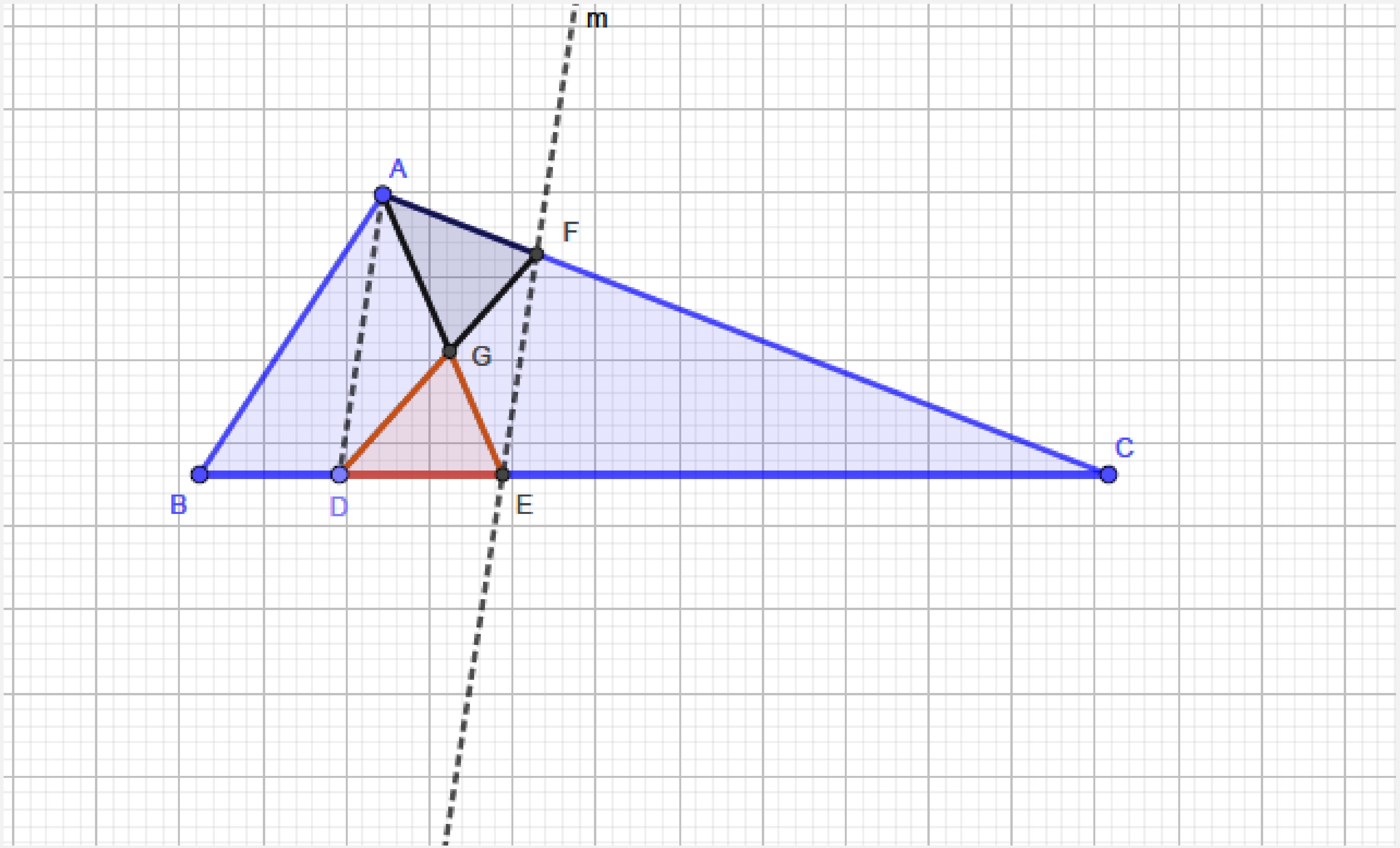


Figura 5.38: Costruzione del problema 4, gruppo 2.

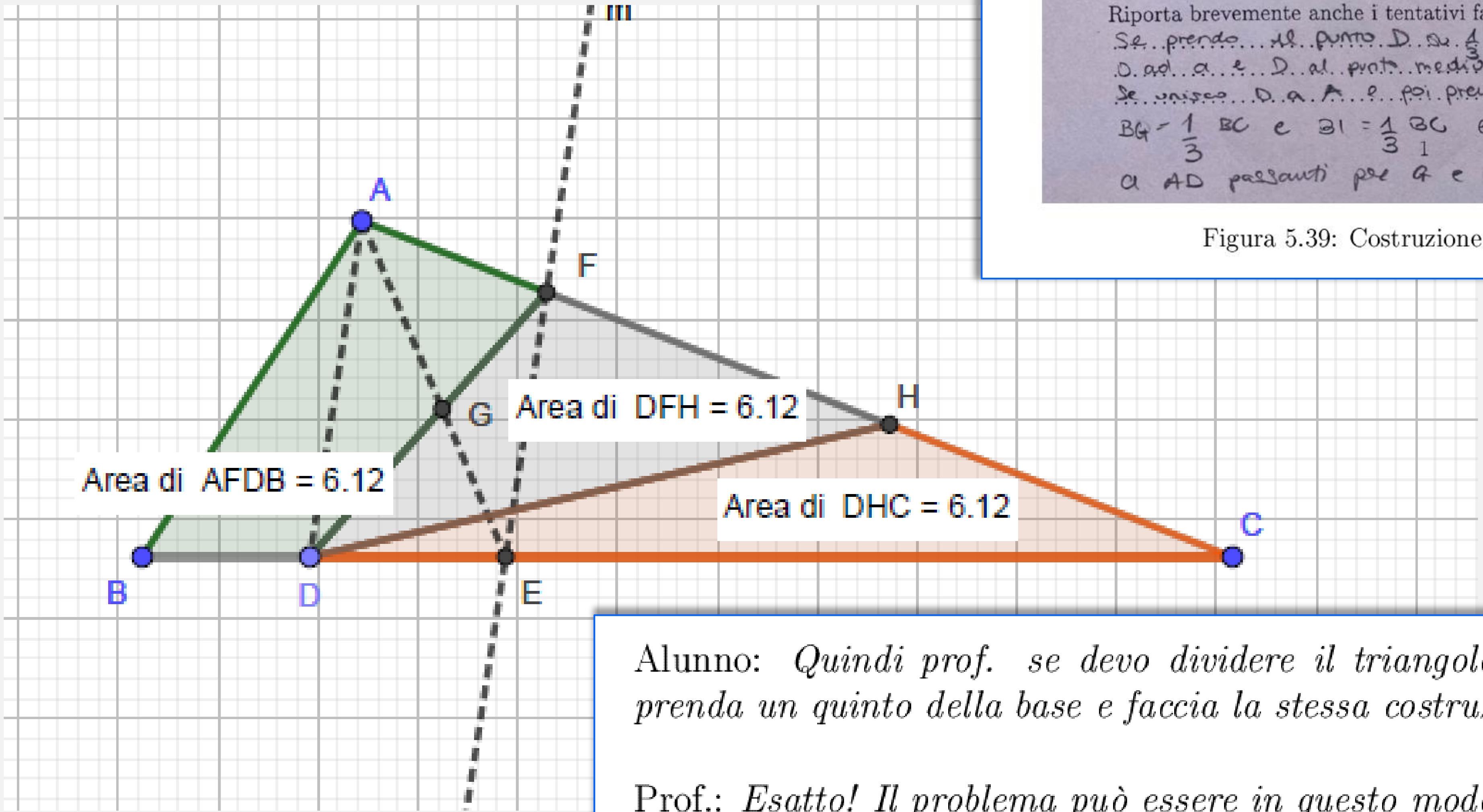


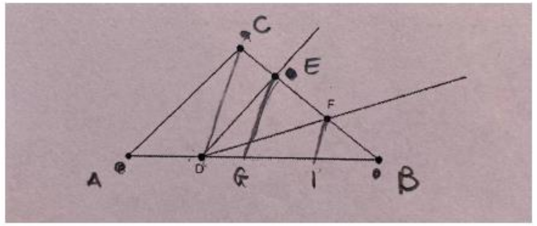
Applicazione del *Teorema di Talete* per dividere un segmento in *n* parti di uguale lunghezza (n=3)

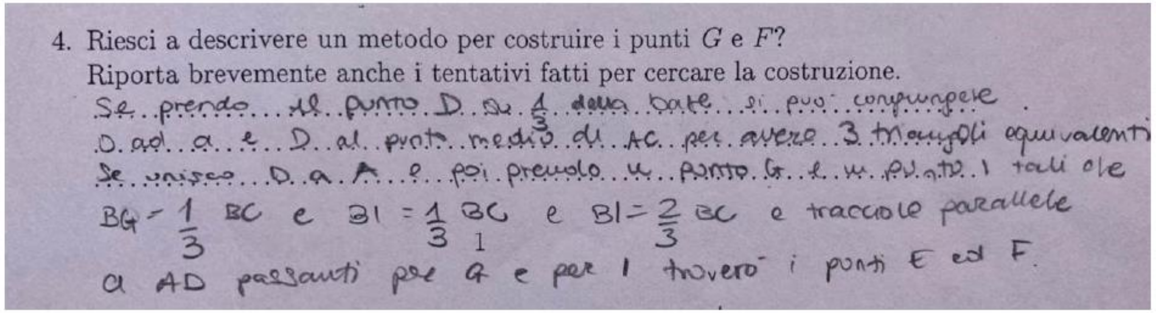


La costruzione è del tutto analoga al caso precedente, con l'unica differenza che il punto E non è il punto medio di BC ma è pari a 1/3 di BC

La fase di verbalizzazione







4. Riesci a descrivere un metodo per costruire i punti G e F?
Riporta brevemente anche i tentativi fatti per cercare la costruzione.
Se prendo il punto D a $\frac{1}{3}$ della base si può congiungere D ad A e D al punto medio di AC per avere 3 triangoli equivalenti. Se unisco D a A e poi prendo un punto G e un punto I tali che BG = $\frac{1}{3}$ BC e BI = $\frac{1}{3}$ BC 1 e BI = $\frac{2}{3}$ BC e traccio le parallele a AD passanti per G e per I troverò i punti E ed F.

Figura 5.39: Costruzione del problema 4, gruppo 2.

Alunno: *Quindi prof. se devo dividere il triangolo in 5 parti uguali basta che prenda un quinto della base e faccia la stessa costruzione?*

Prof.: *Esatto! Il problema può essere in questo modo generalizzato.*

5. – Saper vedere le cose facili

Una cosa difficile è spesso il vedere le cose facili, ossia riuscire a distinguere, nel complesso di circostanze presenti in un problema, quelle che bastano per impostarlo, o che permettono di effettuare l'impostazione in diversi passi facili successivi.

Ecco un esempio semplicissimo (proposto in una Gara matematica): *dato un triangolo, dividerlo in 5 parti di uguale area mediante una spezzata a zig-zag* (cfr. *fig. 8*).

È semplicissimo se ... se si pensa dapprima soltanto al triangolo I che dev'essere $^1/_5$ del dato, sicché basta prendere D in modo che CD

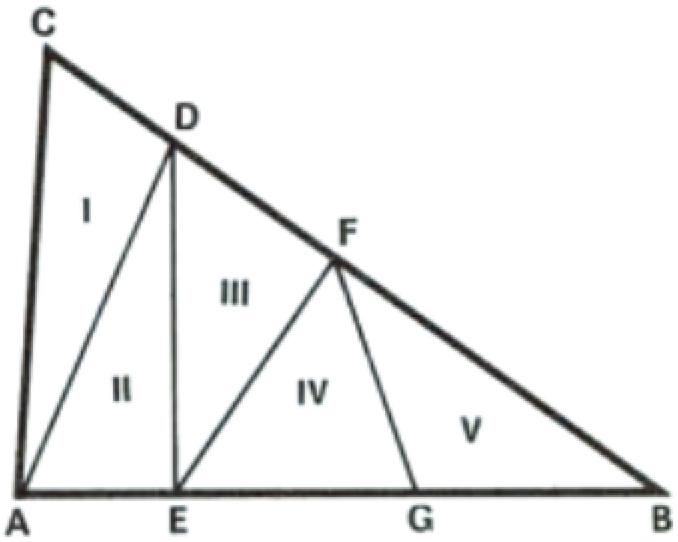


Figura 8

sia $^1/_5$ del lato CB ([5]). Proseguendo allo stesso modo, il triangolo II dev'essere $^1/_4$ del rimanente sicché AE va preso uguale a $^1/_4$ del lato AB; poi DF sarà $^1/_3$ di DB, ed infine G sarà a metà di EB. (Non sarebbe possibile invece, ad es., cominciare dal V e procedere nell'altro verso).

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 299-408

Il "saper vedere" in Matematica (*)

Bruno de Finetti

1. – Riflettere per giungere a un risultato

La matematica richiede anzitutto immaginazione e interesse per vedere direttamente i problemi, *e allora è istruttiva e anche divertente. Perché i giovani se ne persuadano, e conservino anche da grandi il vantaggio di sapersi regolare in ogni circostanza afferrando gli aspetti matematici e logici dei problemi che dovranno affrontare nella vita, basta che si abituino a riflettere, a rendersi conto del senso e del valore e dell'utilità di ciò che fanno. La matematica sembra e diventa arida e odiosa soltanto se, lasciando in ombra gli scopi cui risponde, si riduce a passiva accettazione di nozioni, metodi, formalismi.*

Giova soprattutto riflettere su esempi, imparare a riflettere su esempi svariati ed a modificarli o costruirsene di nuovi, e riuscire così sempre meglio a capire e scoprire ciò che occorre saper vedere *per dominare un problema. Cominciamo da tre esempi effettivi, di epoche molto diverse, che possono servire da utile spunto.*

Il percorso descritto può essere ampliato in varie direzioni

- Aumentare il numero dei lati del poligono da dividere in due parti equiestese (ma sarà sempre possibile dividere un poligono in parti equiestese con una retta secante)?
- Aumentare il numero di parti in cui si vuole dividere un poligono
- Fissare un rapporto tra le parti in cui rimane diviso il poligono
- Cambiare le condizioni (es. punto interno/esterno)

Suggerimenti…

Dividere un quadrilatero con una secante in modo da ottenere due parti equiestese.

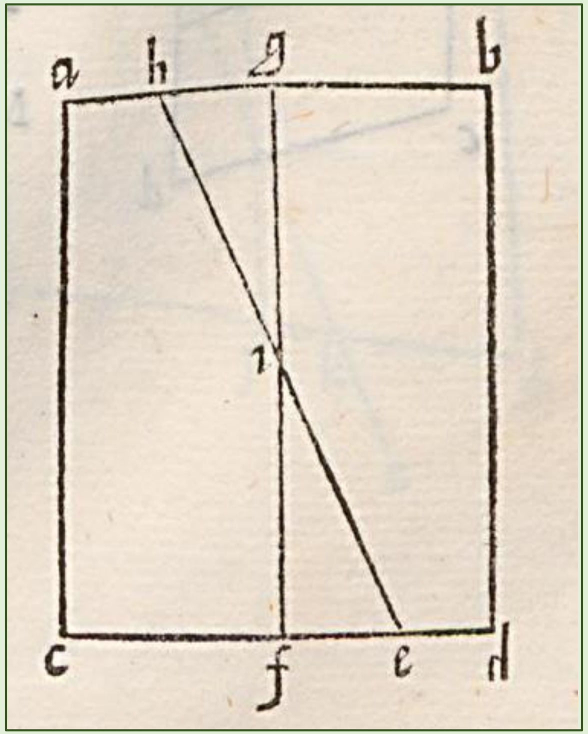
- Ci sono configurazioni semplici (figure particolari come quadrati, rettangoli, rombi o parallelogrammi in generale) e configurazioni più complesse

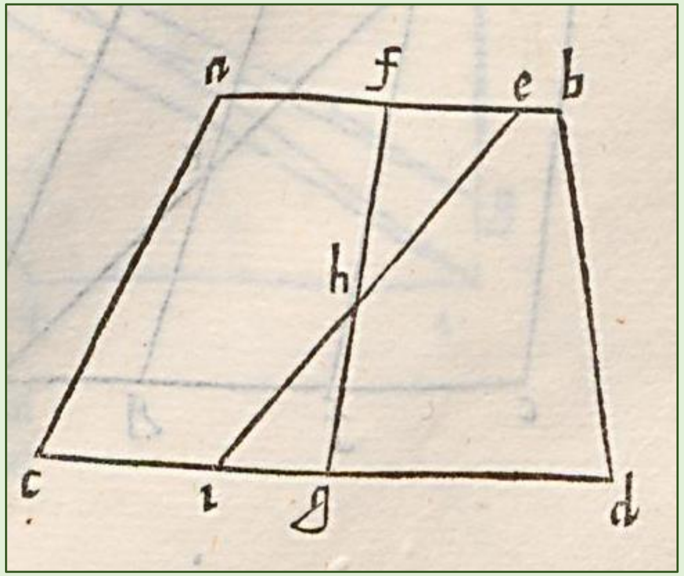
Nel caso generale si distinguono due configurazioni

- la secante passa per un vertice
- la secante non passe per un vertice

Il modo, ouer regola di ſaper diuidere geometricamente le figure parallelogramme, cioe di lati equidiſtanti, & in diuerſi modi. Cap. XIIII.

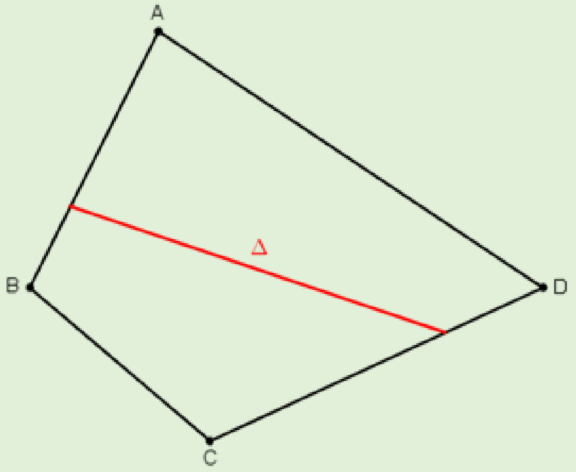
LE ſpecie delle figure parallelogramme, ouer di lati equidiſtanti ſono quattro, la prima è il quadrato, la ſeconda è il tetragon longo, la terza è il rhombo, ouer helmuaim, la quarta, & vltima è il rhomboide, ouer ſimile helmuaim, & perche con quel modo, che ſi diuide vna di queſte quattro ſpecie, con quel medeſimo ſi diuide anchora tutte le altre, e pero le queſtioni, che s'indura ſaranno generali a tutte le dette quattro ſpecie, e per tanto cominciaremo dalle attioni piu note, & cognite.





Casi particolari

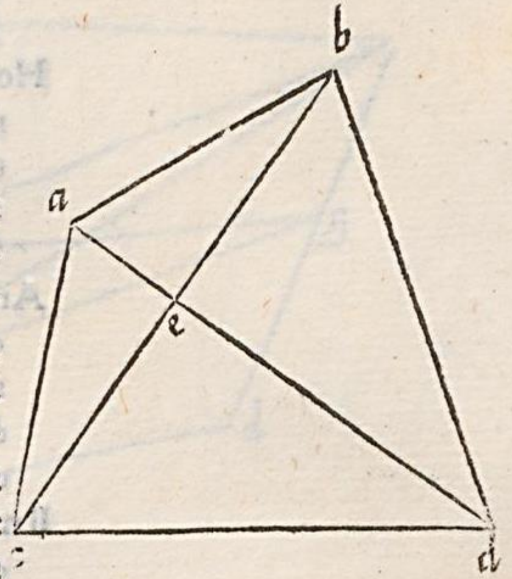
Caso generale



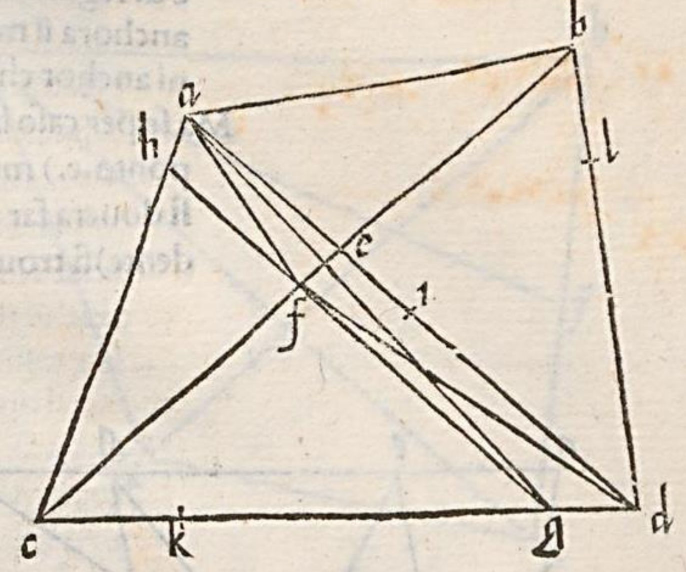
Il modo, ouer regola di diuidere in due parti eguali ogni quadrilatero delquale niun lato ſia equidiſtante ad alcun de gli altri. Cap. XVI.

OGni quadrilatero non hauente alcun lato equidiſtante ad alcuno de gli altri da vno di ſuoi angoli potemmo diuider quello in due parti eguali.

Sia eſſempi gratia il quadrilatero.a b c d.delquale niun di ſuoi quattro lati ſia equidiſtante all'altro, volendo dal angolo.a.diuider quello in due parti eguali, tiraremo li duoi diametri.a d.&.b c.i quali s'interſegano in ponto.e.hor ſe per caſo la.b e.fuſſe eguale alla.c e.(come nella prima figura accade)la linea, ouer diametro.a d. ne riſolueria tal problema, cioe diuideria il detto quadrilatero.a b c d.in due parti eguali, perche eſſendo la.b e. eguale alla e c.(per la prima del ſeſto di Euclide)il triangolo.a e b.ſaria eguale al triangolo . a e c. & ſimilmente il triangolo.c e d.ſaria anchora eguale al triangolo.b e d.onde(per communa ſcientia)la ſumma di duoi triangoli.a b e.&.b e d.ſara eguale alla ſumma de gli altri duoi, cioe.a c e. &.c e d.e pero tutto il triangolo.a b d.ſara eguale a tutto il triãgolo.a c d. per laqual coſa il detto quadrilatero vien a eſſer diuiſo in due parti eguali dalla linea.a d.che è il propoſito.



Ma ſe per caſo la.e b.fuſſe menore della.e c. (come nella ſeconda figura ſi vede) in tal caſo diuideremo la.c b.in due parti eguali in ponto.f. & dal ponto.f. tiraremo la.f g.equidiſtante alla.e d.& dal angolo.a.tiraremo la.a g. laqual dico, che diuide il detto quadrilatero.a b c d . in due parti eguali, & per dimoſtrar tal effetto dal ponto.f.tiraremo le due linee.f a.&.f d. onde li duoi triangoli.a f b.&.a f c.(per la prima del ſeſto di Euclide)ſono fra loro eguali,& ſimilmente gli altri duoi triangoli.d f c.&.d f b. (per le medeſime ragioni) ſono fra loro eguali, e per tanto (per communa ſcientia) il quadrilatero.a f d c. è eguale al quadrilatero.a f d b.Et perche li duoi triangoli.a f d.&.a g d. (per la trenteſimaſettima del primo di Euclide) ſono fra loro eguali, dando a ciaſcheduno di loro il triangolo.a b d.(per communa ſcientia) li duoi reſultanti ſaranno eguali, delliquali duoi reſultanti, l'uno è il quadrilatero.a f d b.& l'altro il quadrilatero.a g d b.& perche il quadrilatero . a f d b. è la mita del noſtro quadrilatero.a b c d. (come di ſopra fu dimoſtrato) e pero anchora il quadrilatero.a g d b.vien a eſſer la mita del detto noſtro quadrilatero.a b c d.che è il propoſito.



Secante che passa per un vertice

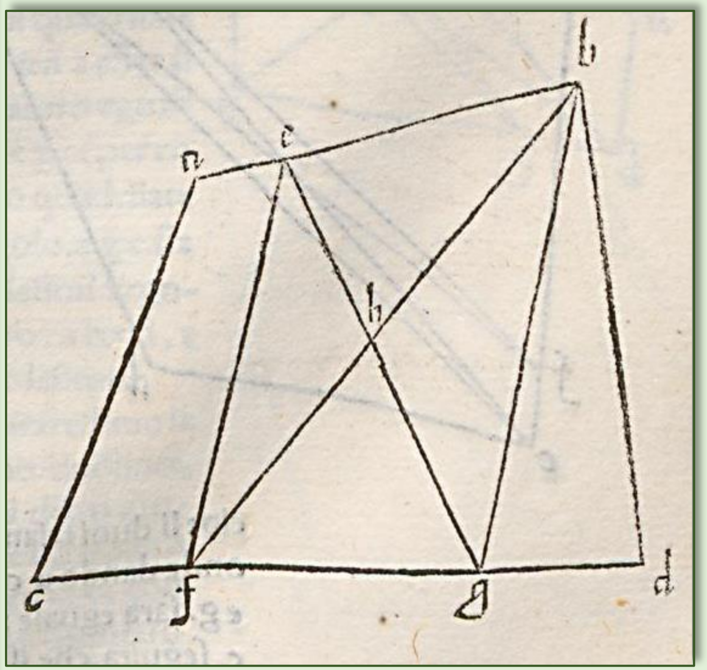
quadrilatero.a g d b.vien a eſſer la mita del detto noſtro quadrilatero.a b c d.che e il propoſito.

Ma volendo far tal diuiſione dal angolo.d.dal medeſimo ponto.f.tiraremo la.f h. equidiſtante al la.a e.& dal angolo.d. tirareſſimo vna linea al ponto.h. laqual linea diuideria medeſimamente il detto noſtro quadrilatero.a b c d.in due parti eguali,laqual diuiſſione ſi dimoſtrara con li medeſimi argomenti,con i quali fu dimoſtrato l'altra,laqual linea.d h.non mi è parſo di tirare per non offuſcar la figura dell'altra concluſione.

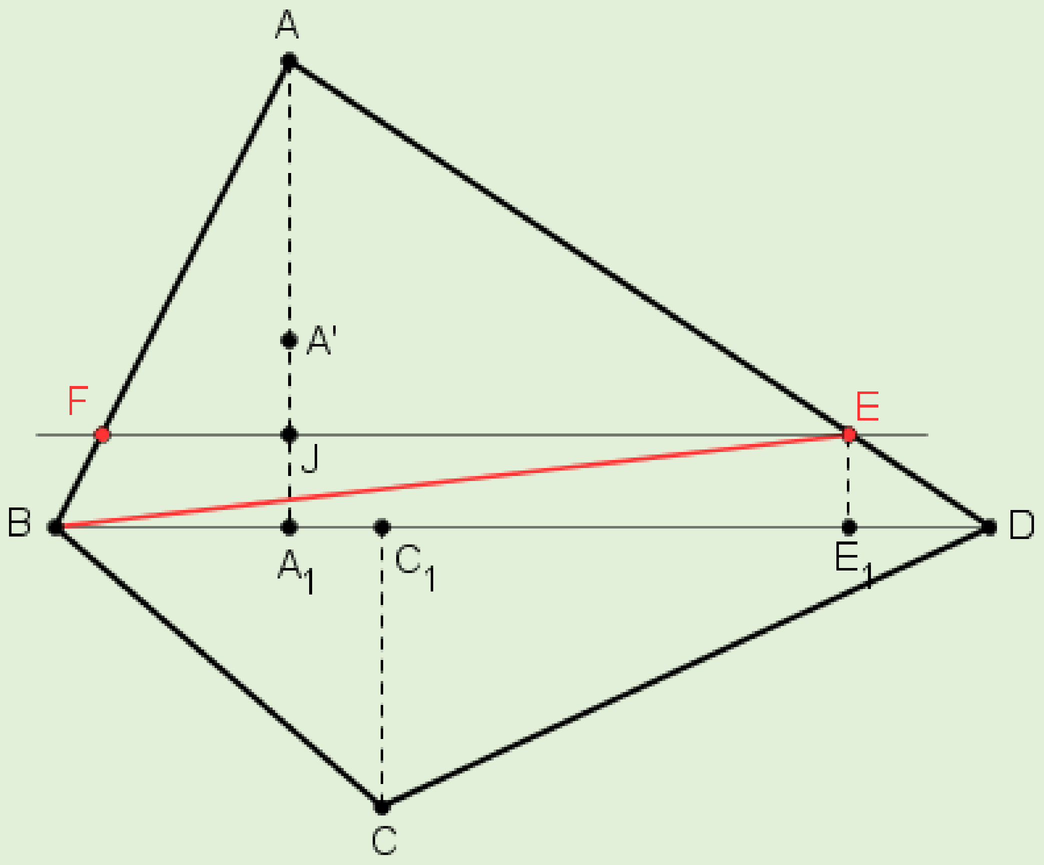
Et coſi per abreuiar parole,& ſcrittura,volendo far la ſopradetta diuiſione da vn de gli altri duoi angoli,cioe dal angolo.b. ouero dal angolo.c. ſi doueria diuidere l'altro diametro.a d. in due parti eguali in ponto.i.& dapoi dal ponto.i.produre vna linea equidiſtante al diametro.b c.laqual linea non l'ho voluta tirare(per la ragione di ſopra detta)ma che la tiraſſe , & prolongaſſe da l'una,& l'altra banda,quella andaria a terminar da vna bãda nel põto.k.& dall'altra nel ponto.l.onde tirãdo poi vna linea dal angolo.b.al ponto.K.quella diuideria il detto noſtro quadrilatero.a b c d.in due parti eguali.Il medeſimo ſi faria,che ne tiraſſe vna dal angolo.c.al ponto.l.& l'una , & l'altra di queſte due concluſioni ſi dimoſtrara ſecondo il medeſimo ordine,colqual fu dimoſtrato la prima riſſolutione.

secondo il medeſimo ordine,colqual fu dimoſtrato la prima

Ogni quadrilatero di lati non equidiſtanti potemmo diuidere in due parti eguali,da vn ponto dato in vn di ſuoi lati.Eſſempi gratia ſia il quadrilatero.a b c d.di lati non equidiſtanti, & nel lato. a b. ſia dato il ponto.e. hor volendo dal ponto.e. diuidere il detto quadrilatero in due parti eguali,la operatione di vn tal problema puo variar in piu modi ſecondo la poſitione del ponto.e.(come di ſotto intenderai)ma in queſta tal poſitione,prima lo diuideremo in due parti eguali dal angolo.b. onde procedendo ſecondo la regola data nella precedente, trouaremo che la linea.b f.fara tal effetto,fatto queſto tiraremo la.e f. & dal ponto.b. tiraremo la.b g.equidiſtante alla.e f.finalmente tiraremo la.e g.laqual dico,che ne diuide il detto noſtro quadrilatero in due parti eguali,perche li duoi triangoli.b e g.&.b f g.(per la trenteſimaſettima del primo di Euclide) ſono fra loro eguali,onde leuando communamente dall'uno, & dall'altro il triangolo . b h g. li duoi reſidui(per communa ſcientia) ſaranno eguali,dalliquali duoi reſidui l'uno è il triangolo b h e.& l'altro è il triangolo.g h f.



Hor ſe a ciaſcheduno di queſti duoi reſidui gli daremo quella figura di cinque lati.a e h f c.li duoi reſultanti(per communa ſcientia)ſaranno eguali,delliquali duoi reſultanti, l'uno è il quadrilatero.a b f c.& l'altro è il quadrilatero.a e g c.& perche il quadrilatero. a b f c.è la mita (ſe ben ti aricordi)del noſtro quadrilatero.a b c d.Seguita adunque che il quadrilatero.a e g c. ſia medeſimamente la mita di quello,che e il propoſito.



Caso in cui la secante passa per uno dei vertici

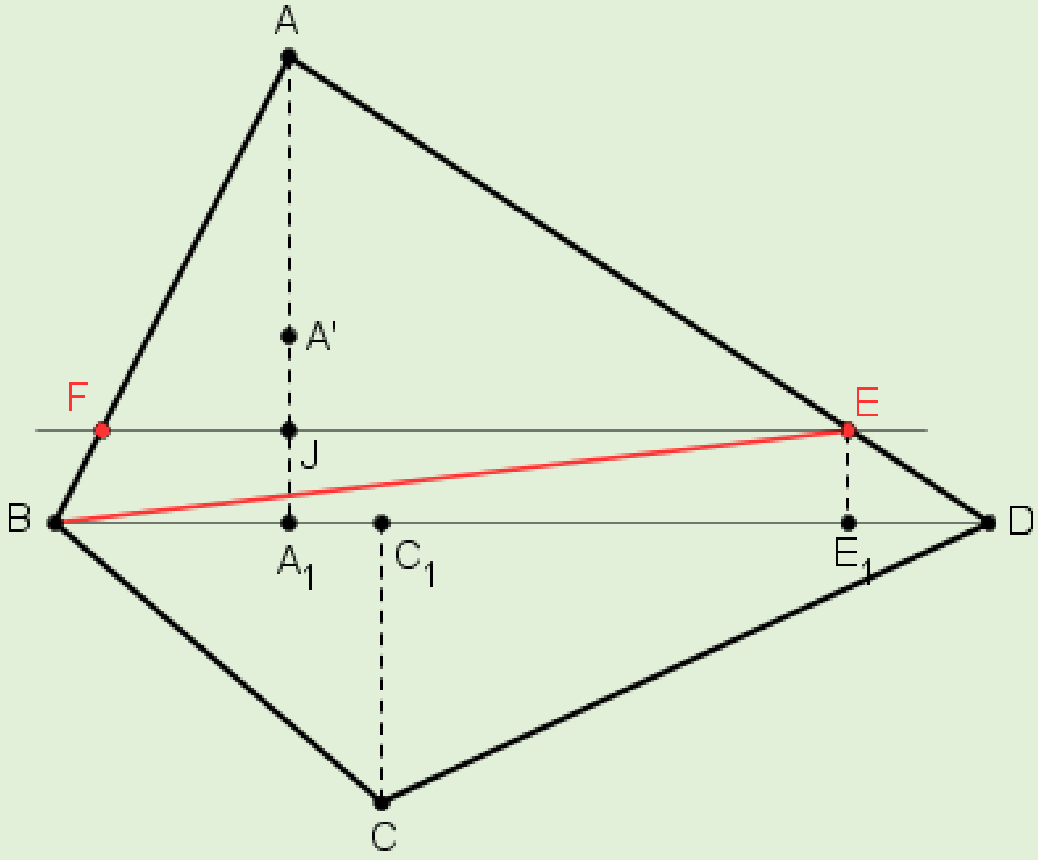
http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr#nb4

A_1 e C_1 sono le proiezioni ortogonali aul segmento BD dei punti A e C.
Supponiamo che $BD = l, AA_1 = h, CC_1 = k$

Se $h = k$, le aree dei triangoli ABD e BCD sono uguali. Quindi è la diagonale BD che divide il quadrilatero ABCD in due parti equiestese.

Sia invece $h \neq k$ e in particolare $h > k$.
Sia $AA' = k$ e J il punto medio del segmento $A'A_1$
Si tracci per il punto J la parallela a BD, che interseca i lati del quadrilatero in F e in E.

Il segmento BE divide il quadrilatero ABCD nel triangolo ABE e nel quadrilatero BCDE equiesteso (analogamente DF divide ABCD in due parti equiestese)



Area (ABE) =

=Area (ABD)-Area(BDE)=

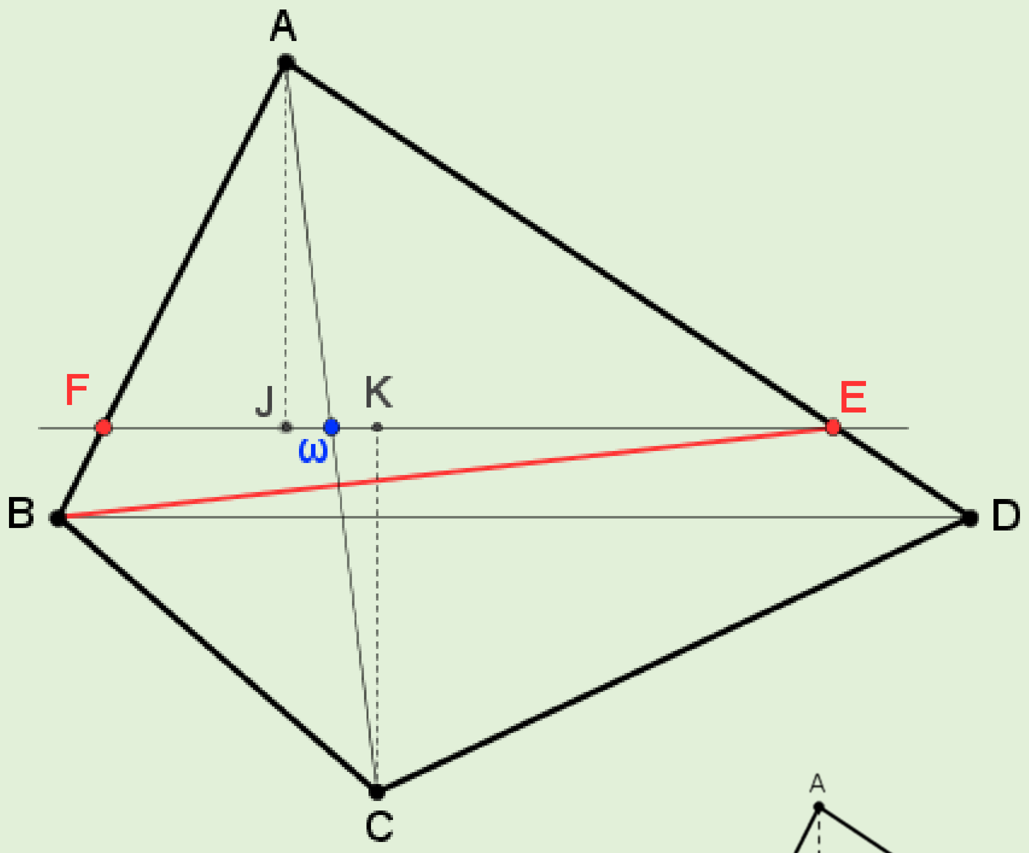
$$= \frac{1}{2}lh - \frac{1}{2}l\left(\frac{h-k}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}lk + \frac{1}{2}l\left(\frac{h-k}{2}\right) =$$

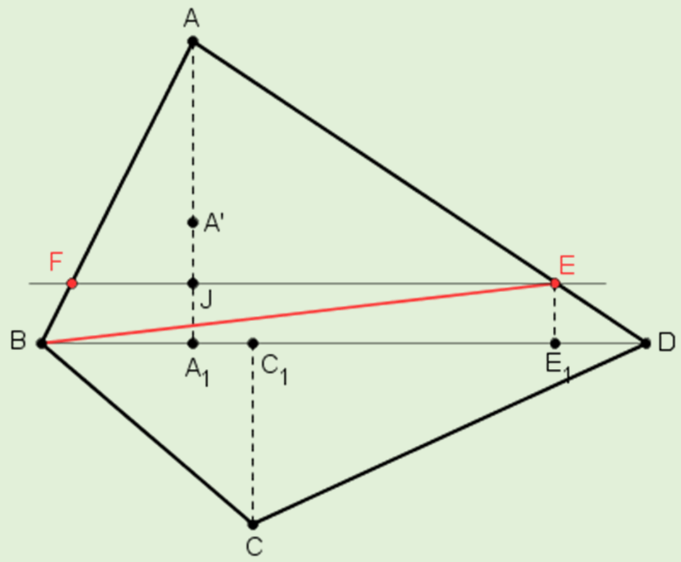
=Area (BCD)+Area (BDE)= **Area(BCDE)**

= metà area di ABCD

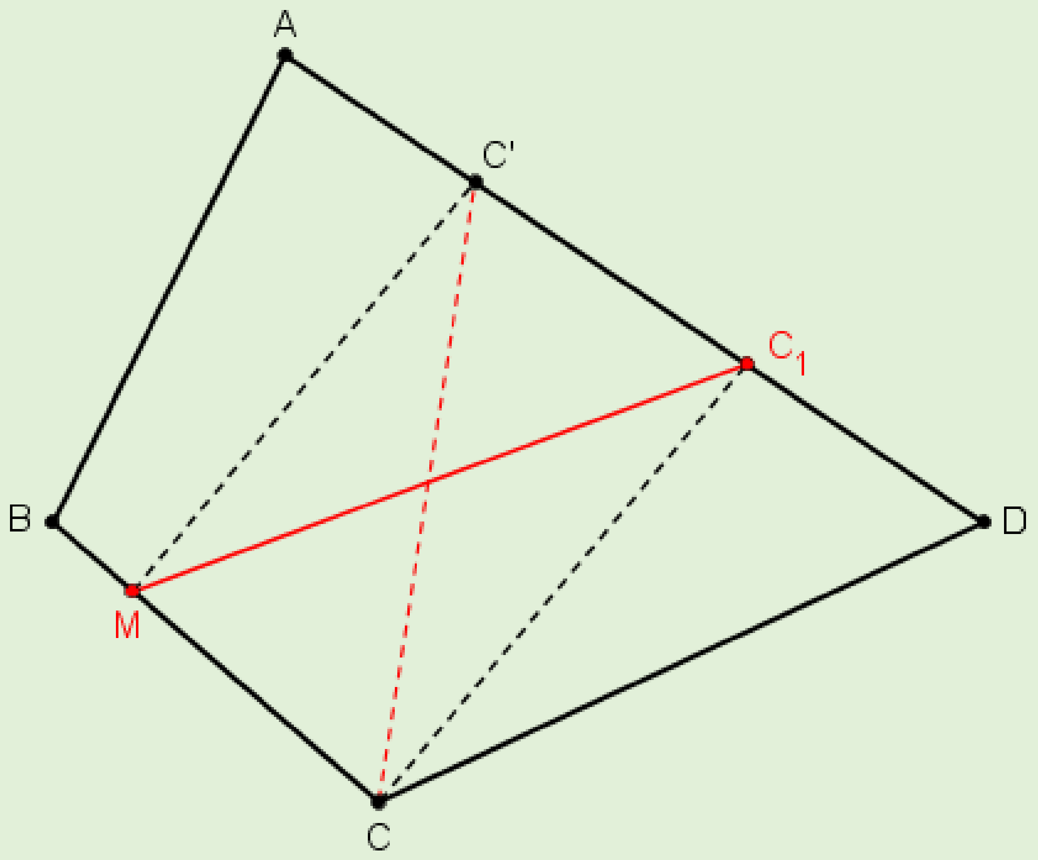
http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr#nb4



Una costruzione alternativa e più rapida consiste nel tracciare la diagonale AC e determinare il suo punto medio ω, dal quale tracciare poi la parallela all'altra diagonale BD che interseca i lati del quadrilatero nei punti F ed E.



http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr#nb4



Caso in cui la secante non passa per uno dei vertici

http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr#nb4

In questo caso, supponiamo che CC' sia stata costruita come nel caso precedente e quindi divida ABCD in due parti equiestese.

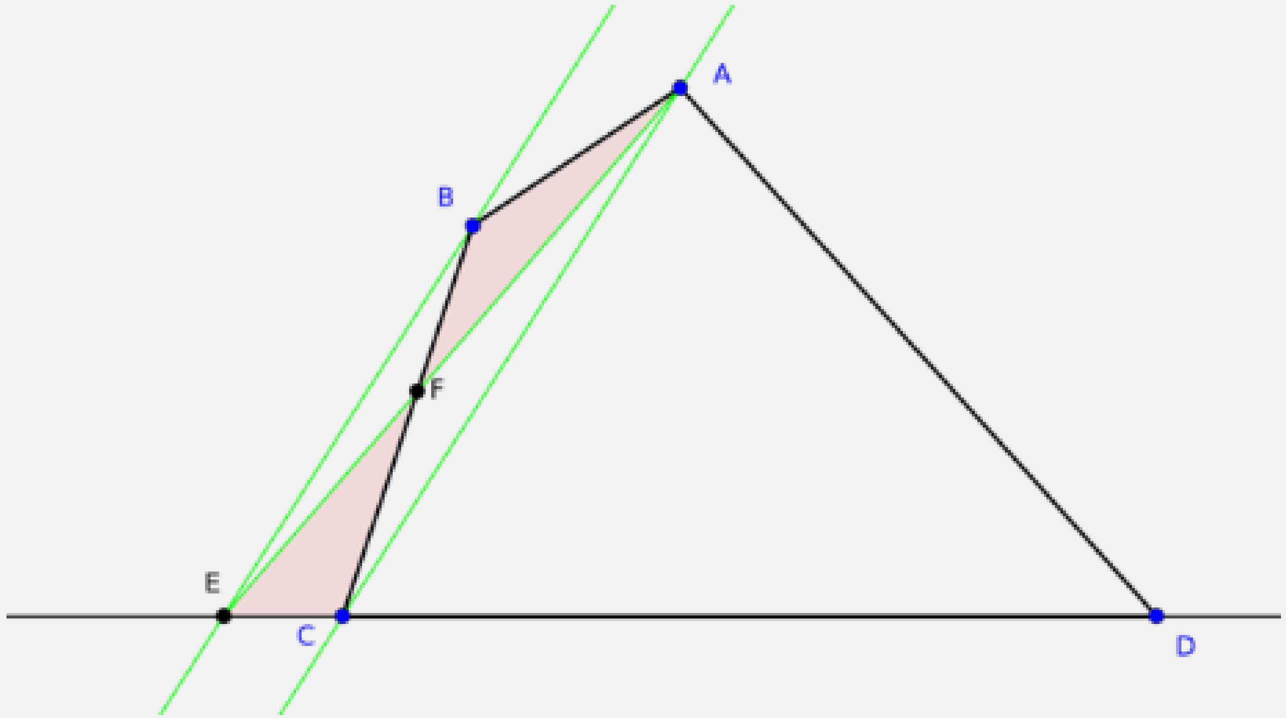
Si tracci MC' e la parallela passante per C, che interseca il lato AD nel punto C_1.

Il segmento MC_1 divide il quadrilatero in due parti equiestese.

Suggerimento per un percorso alternativo: trasformare un quadrilatero in un triangolo equiescomposto (o equiesteso) e poi tracciare una mediana.

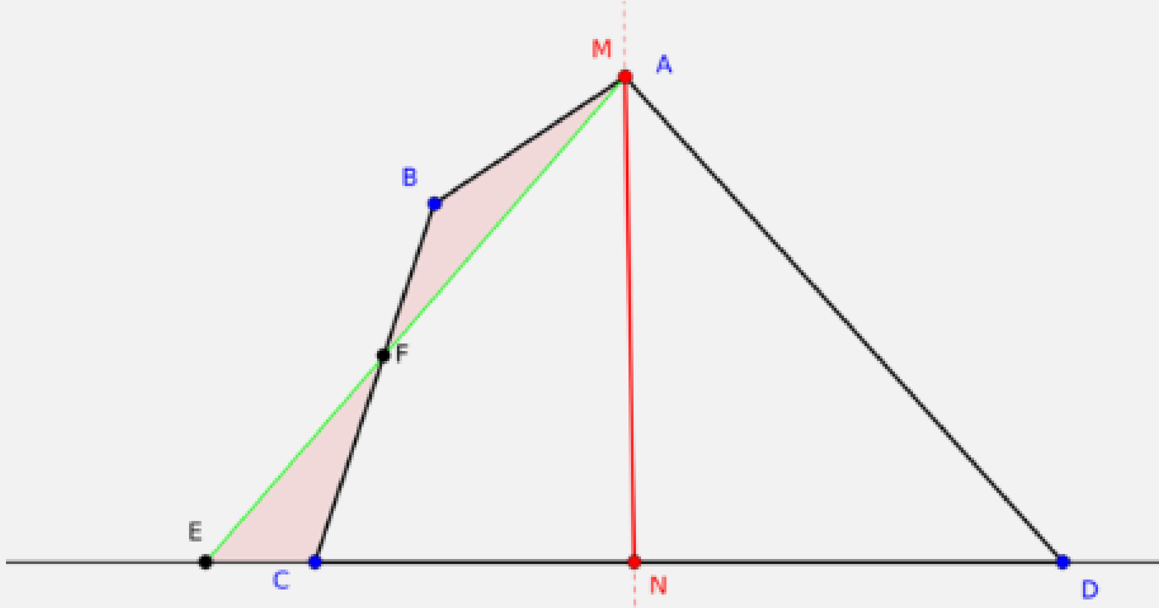
In questo caso il problema interessante si riduce a trovare un modo per trasformare un quadrilatero in un triangolo equiscomposto usando solo «riga e compasso». Il metodo poi si può generalizzare per risolvere il problema di trasformare un poligono di *n* lati in un poligono equiesteso di *n-1* lati.

Strategia alternativa

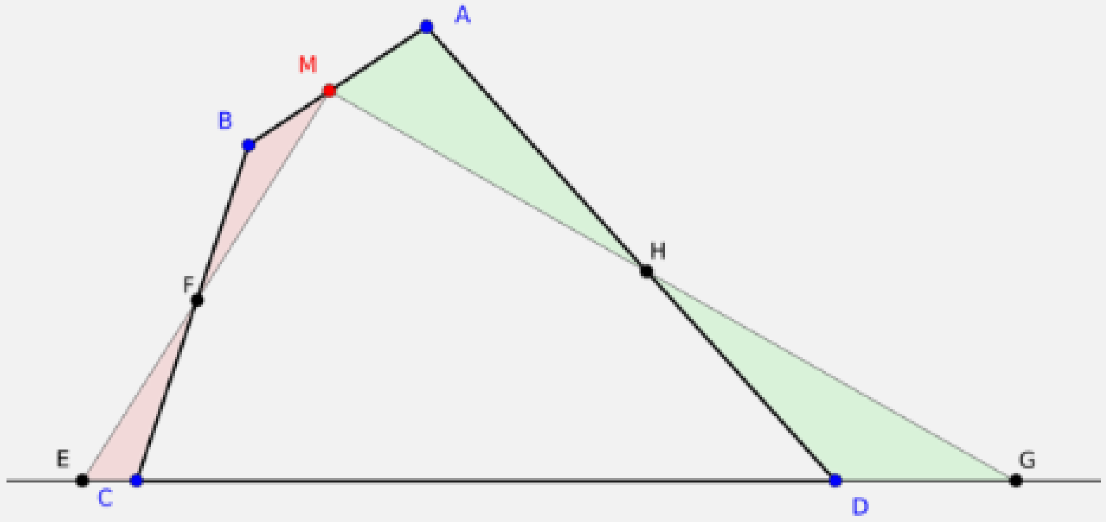


Trasformazione del quadrilatero ABCD nel triangolo equiesteso AED

A questo punto la mediana MN divide il quadrilatero in due parti equiestese

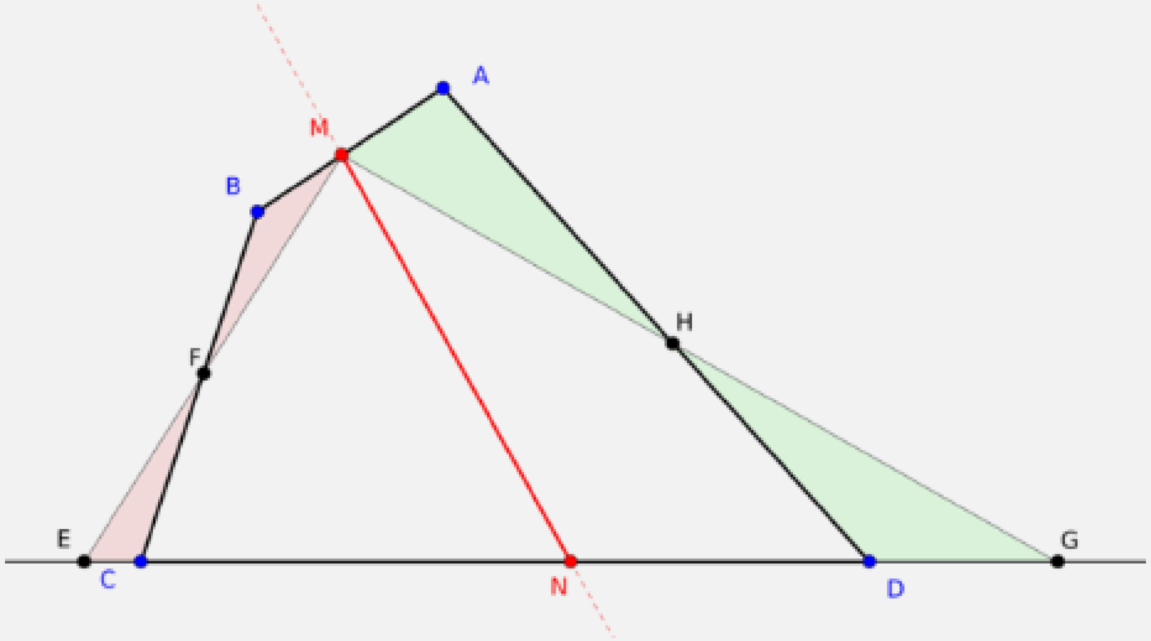


http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr#nb4



Trasformazione del quadrilatero ABCD nel triangolo MEG (nessuno dei vertici del triangolo coincide con un vertice del quadrilatero)

A questo punto la mediana MN divide il quadrilatero in due parti equiestese



Bibliografia e sitografia (molto essenziali)

F.Acerbi, *Sulle divisioni <delle figure>*, in *Euclide. Tutte le opere*, Milano, Bompiani 2007, pp. 2383-2454.

P. Crozet, *La civiltà islamica: antiche e nuove tradizioni in matematica. Geometria: la tradizione euclidea rivisitata*, (Treccani, Storia della Scienza https://www.treccani.it/enciclopedia/la-civilta-islamica-antiche-e-nuove-tradizioni-in-matematica-geometria-la-tradizione-euclidea-rivisitata_%28Storia-della-Scienza%29/)

A.Djebbar, *La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (X^e^-XIII^e^ s.)*, in P.Radelet-de Grave (ed.), Liber amicorum *Jean Dhombres*, Louvain, Brepols 2008, pp.113-151.

A. El Kacimi, F.Recher, V.Vassallo, *Partage d'un polygone*, 2014 (Image des mathématiques, http://images.math.cnrs.fr/Partage-d-un-polygone.html?lang=fr)

M.Moyon, *Dividing a Triangle in the Middle Ages: An Example from Latin Works on Practical Geometry*, in in É.Barbin, J. Guichard, M.Moyon, P.Guyot, C.Morice-Singh, F.Métin, M.Bühler, D.Tournès, R.Chorlay, G.Hamon (eds.), *Let History into the Mathematics Classroom*, Springer, 2017, p. 17-28. (qui: https://webtv.univ-lille.fr/video/3050/le-decoupage-des-figures-de-la-mesopotamie-au-moyen-age-latin il video della conferenza di M.Moyon *Le découpage des figures de la Mésopotamie au moyen-âge latin*, 2009)

D. Perrin, *Aires et volumes: découpage et recollement (I)*, 2010 (Image des mathématiques, http://images.math.cnrs.fr/Aires-et-volumes-decoupage-et-recollement-I-847.html?lang=fr)

N.Tartaglia, *Euclide…*, Venezia 1543 (si può trovare in molti siti, in questo https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/3840164 ha un'ottima risoluzione)

N.Tartaglia, *General Trattato de Numeri et misure. Parte Quinta*, Venezia 1556-1560
(si può trovare in molti siti, in questo https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/6032234 ha un'ottima risoluzione)