Università degli Studi di Ferrara

La serie di Fibonacci e la sezione aurea

Alessandra Fiocca

Il *Liber abaci* di Leonardo Pisano

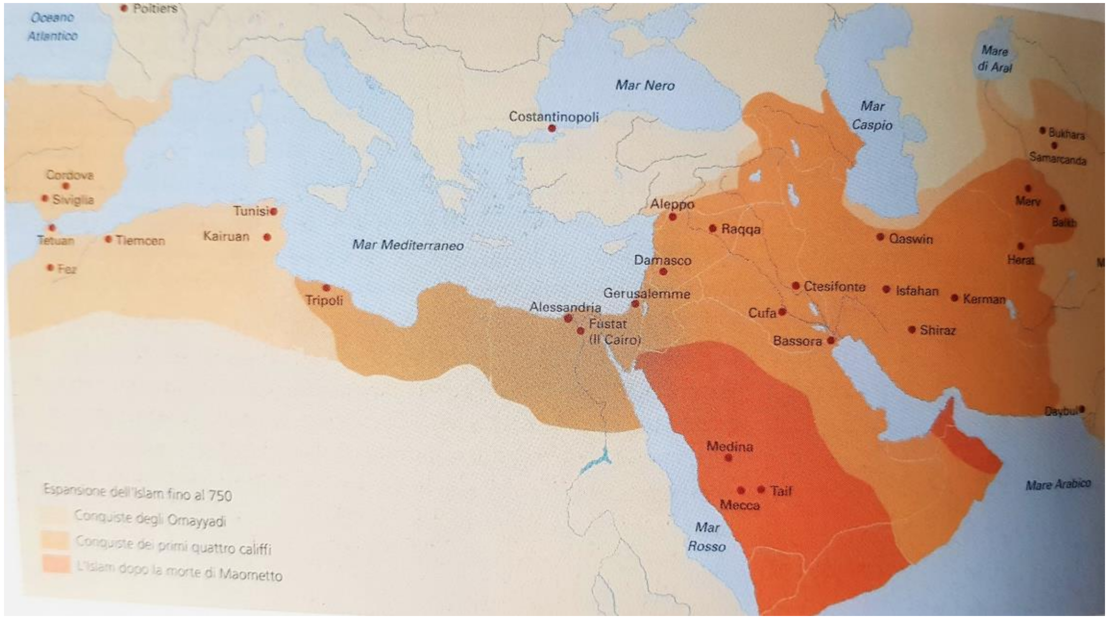
Per chi si accinge a parlare di un'opera capitale nella storia del pensiero umano, e il *Liber abaci* di Leonardo Pisano è tra queste, la strada maestra consiste nel confrontarla con le conoscenze dell'epoca e con le opere che la precedono, per coglierne i caratteri di novità e il suo contributo al progresso della disciplina.

Questa strada è preclusa nel nostro caso. Quando il *Liber abaci* vide la luce, ottocento anni or sono, la matematica nell'Occidente cristiano era praticamente inesistente.

Con queste parole Enrico Giusti introduce l'opera di Fibonacci, un'opera che non ha antecedenti in Europa e che sfida le sue stesse fonti arabe, dalle quali Leonardo attinse come lui stesso scrive. L'opera si presenta come una summa del sapere aritmetico e algebrico del mondo arabo.

Il Liber abaci 1202

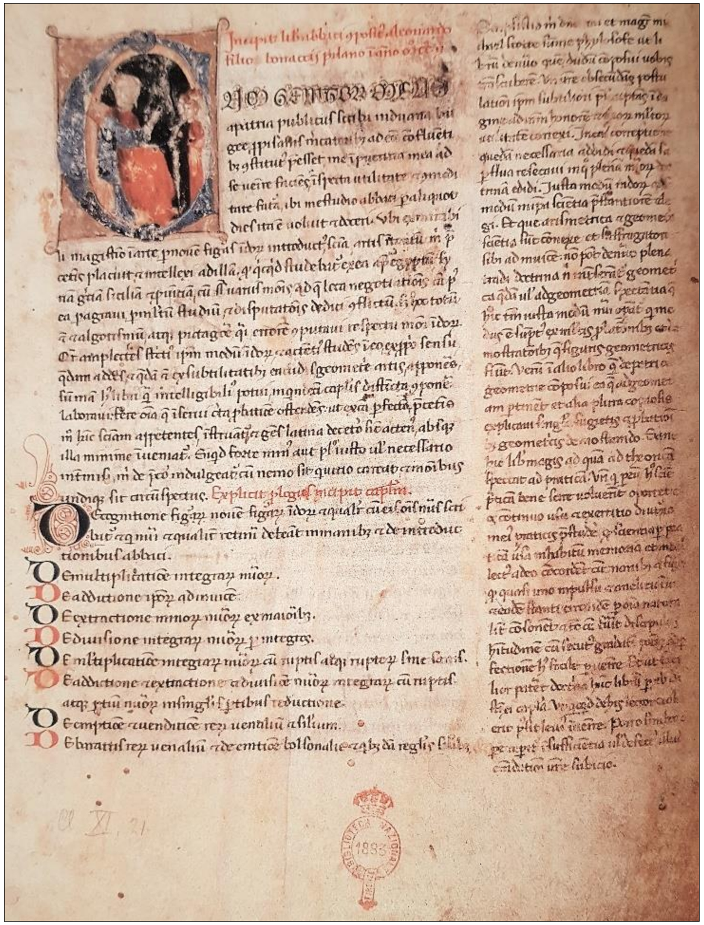
non deriva da un autore o da una scuola, ma dalla matematica araba nel suo complesso; in essa Fibonacci integra le conoscenze matematiche acquisite durante il suo apprendistato a Bugia (Béjaïa nel Maghreb) e durante i suoi viaggi in tutto il bacino del mediterraneo.
A Bugia Leonardo aveva seguito il padre Guglielmo «publicus scriba pro Pisanis mercatoribus».



Struttura e forma del Liber abaci

Un'opera a carattere enciclopedico, composta di un Prologo e di 15 capitoli :

- Le cifre indo-arabe, il sistema di numerazione posizionale e le relative operazioni aritmetiche con gli interi e le frazioni,
- il calcolo delle radici quadrate e cubiche,
- il calcolo delle radici di binomi e recisi,
- le regole della falsa posizione e della doppia falsa posizione,
- matematica mercantile e finanziaria: acquisto e vendita di merci, baratti, società, capitali e interessi, monete
- matematica ricreativa problemi privi di utilità pratica (vengono trovate borse di monete, acquistati cavalli, osservati conigli che si riproducono, ecc.)
- le regole dell'algebra (equazioni algebriche di primo e di secondo grado).



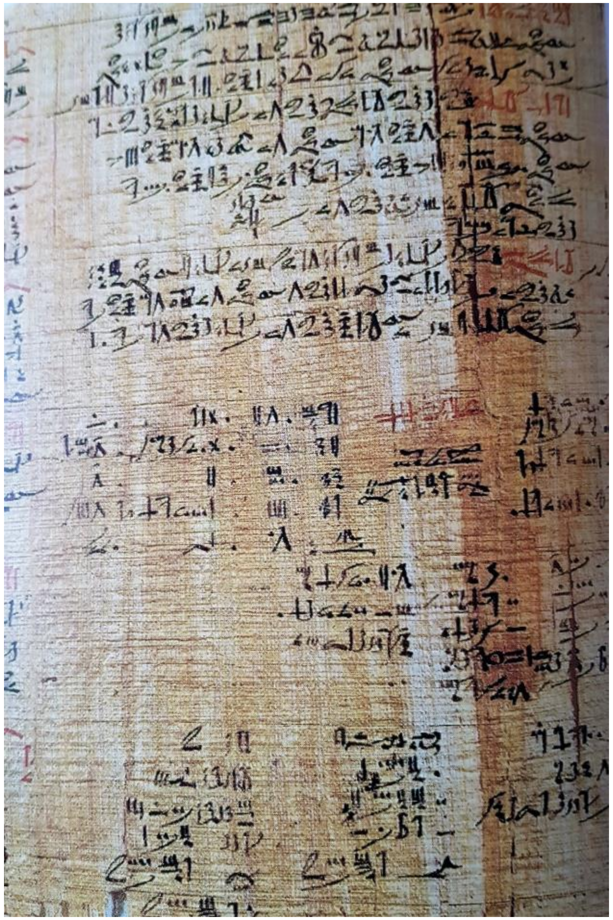
Una pagina del *Liber abaci*

Un problema millenario

- *Papiro di Rhind*: Sette case, in ognuna sette gatti, ogni gatto uccide sette topi, ogni topo aveva mangiato sette grani, ogni grano produce sette hekat. Qual è il totale di tutti?

- *Liber abaci*: Sette vecchie vanno a Roma, ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti.

- *Oggi*: Per una strada che andava a Camogli incontrai un uomo con sette mogli, ciascuna moglie aveva sette sacchi, in ciascun sacco c'eran sette gatti, ciascun gatto con sette gattini. Tra sacchi, gatti, gattini e mogli in quanti andavano dunque a Camogli?



Il Papiro di Rhind (1650 circa a.C.)

Conigli, api, conchiglie e numeri di Fibonacci

Il problema più famoso del *Liber abaci* relativo alla crescita del numero di conigli che conduce alla famosa successione di numeri

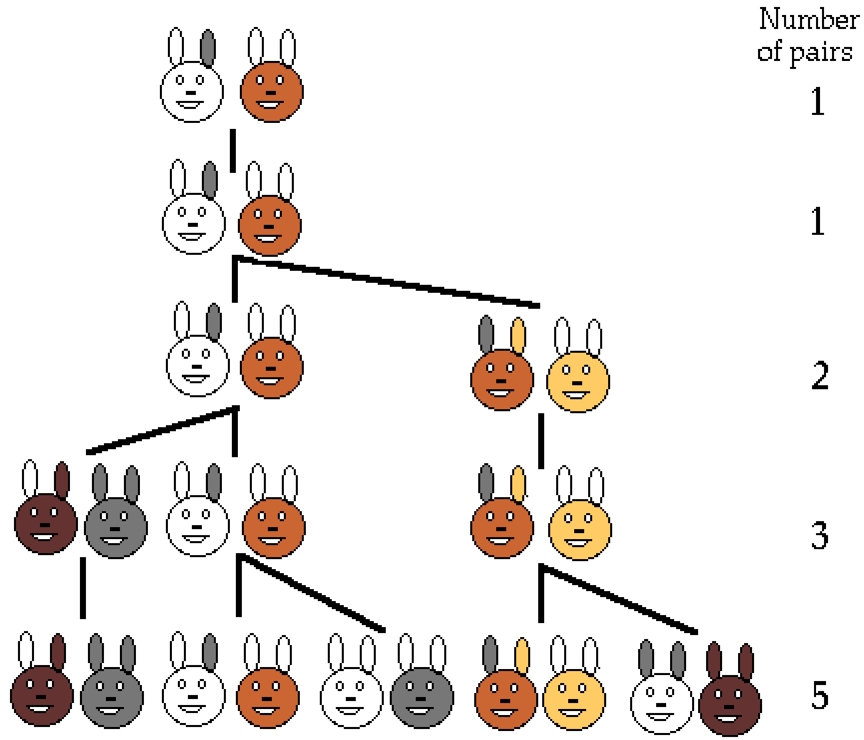
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

nota come serie di Fibonacci

Leonardo lo enuncia lo risolve e lo abbandona. Nessun cenno su possibili sviluppi che furono scoperti solo vari secoli dopo.

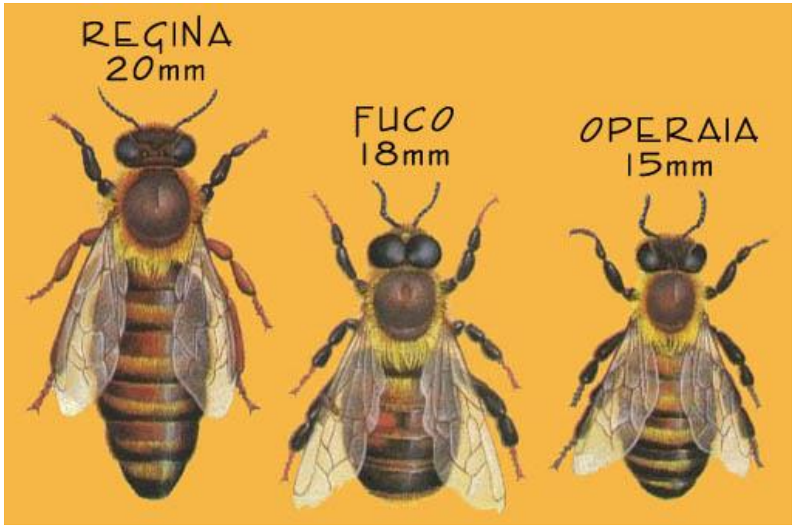
Gran quantità di collegamenti con altri problemi sia interni alla matematica, sia inerenti alle scienze naturali. I suoi numeri si trovano frequentemente in natura, dai petali dei fiori alle pigne, dalle conchiglie alla distribuzione delle foglie sullo stelo di una pianta.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato dapareti, per scoprire quante coppie di conigli discendano da questa in un anno. Per natura ogni coppia genera in un mese un’altra coppia che comincia a procreare a partire dal secondo mese di vita.



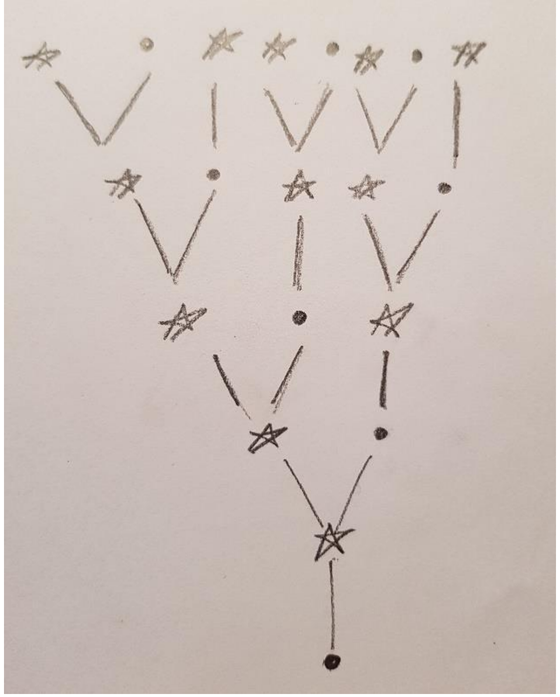
Leonardo spiega che per ottenere il numero dei conigli presenti in un dato mese, si devono sommare i due numeri precedenti della successione,….. e si può continuare ordinatamente per infiniti mesi successivi.

Le api



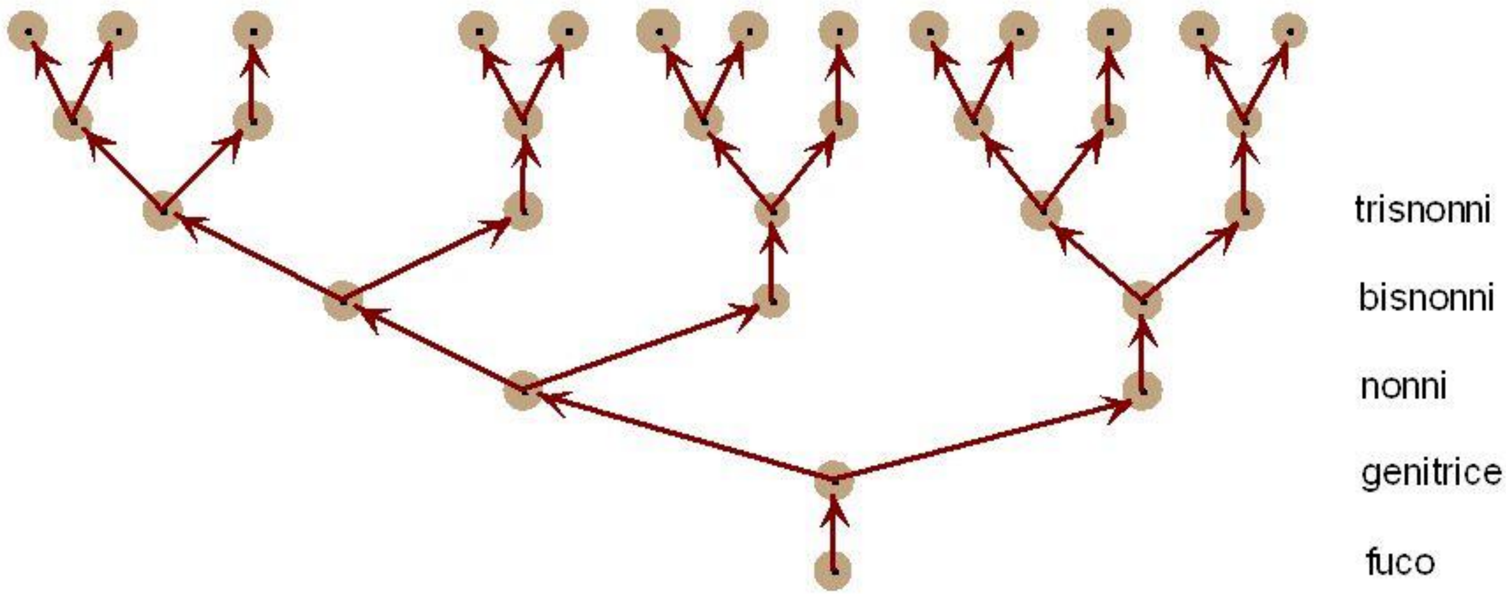
In un alveare: maschi (fuchi), femmine (operaie), la regina che procrea sia da uova fecondate che non.

Dalle uova fecondate hanno origine le operaie o la nuova regina
Dalle uova non fecondate hanno origine i fuchi. Dunque l'ape femmina ha due progenitori, il maschio uno solo.



Partendo da un fuco, ci si chiede quanti siano i suoi antenati di prima, seconda, terza generazione e così via.

Un fuco ha un solo genitore che è una femmina,
una femmina ha due genitori, un maschio e una femmina.
Così gli antenati del fuco di terzo grado sono 3, due femmine e un maschio…….



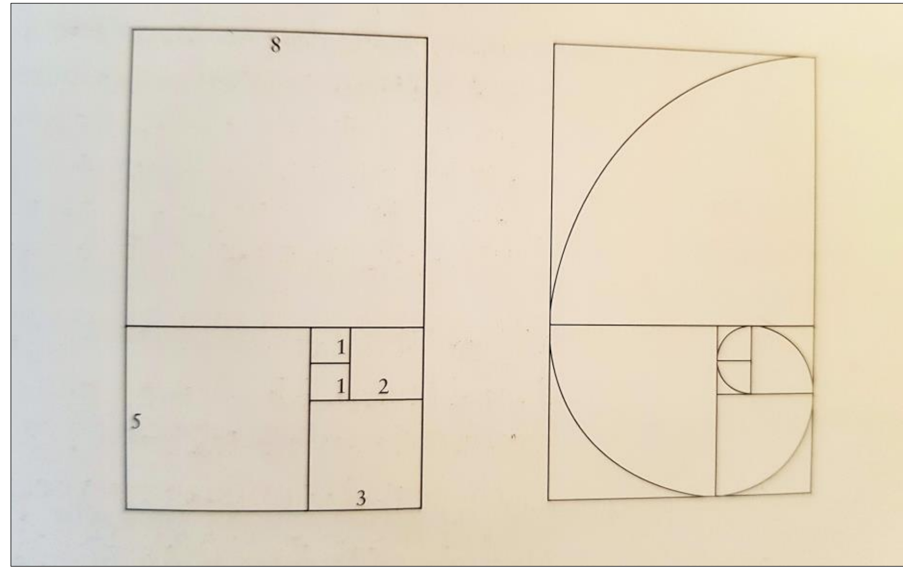
Albero genealogico del fuco

La costruzione di quadrati adiacenti

Si parte da un quadrato di lato 1 e sul suo lato si costruisce un altro quadrato di lato 1. I due quadrati formano un rettangolo 2×1.

Il prossimo quadrato avrà lato 2, e insieme ai precedenti forma un rettangolo 3×2, sul quale poggiamo un quadrato di lato 3 che insieme coi precedenti forma un rettangolo 5×3. Proseguendo si ottiene una sequenza di quadrati i cui lati sono i numeri di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ecc.

Tracciando in ogni quadrato un quarto di cerchio, si ottiene la spirale di Fibonacci, una forma che si ritrova in certe conchiglie.



I semi di girasole e le scaglie delle pigne

si dispongono in due serie di spirali che girano una in un senso e una nell'altro, nelle pigne ci sono 8 spirali in un verso e 13 nell'altro, nei girasoli ce ne sono di più ma sono sempre due numeri di Fibonacci consecutivi

La sezione aurea ovvero il numero Φ

Il numero **Φ** (o meglio il rapporto che rappresenta) compare per la prima volta negli *Elementi* di Euclide (III sec. a.C.).
Si tratta di dividere un segmento AB «**in media ed estrema ragione**», ovvero in due parti tali che tutto il segmento AB sta alla parte maggiore AC come la parte maggiore sta alla minore CB.

In formula $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$

La sezione aurea Φ

Preso un segmento di AB lunghezza 1 e detta x la parte maggiore AC, sarà $1-x$ la parte minore CB.

|___________________________|_____|

A C B

La divisione produce la sezione aurea quando x verifica la seguente proporzione

$$1 : x = x : (1-x) \qquad (^*)$$

ovvero quando x è soluzione dell'equazione $x^2 = 1 - x$

La cui soluzione positiva è

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}61803398875 \ldots \ldots$$

In tal caso, il rapporto tra il segmento maggiore e il minore $\frac{x}{1-x}$ che per (*) risulta uguale a $\frac{1}{x}$, viene indicato con **Φ**

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}}$$

e si chiama variamente **sezione aurea, rapporto aureo, divina proporzione, divisione in estrema e media ragione.**

Quanto vale Φ ?

Essendo

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

risulta

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \times \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2\times(-1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

dunque

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \mathbf{1{,}61803398875 \ldots \ldots}$$

(si noti che la differenza tra x e 1/x è 1)

Si noti infine che **Φ** è la soluzione positiva dell'equazione

$$y^2 - y - 1 = 0$$

La capacità di autoriproduzione del rettangolo aureo

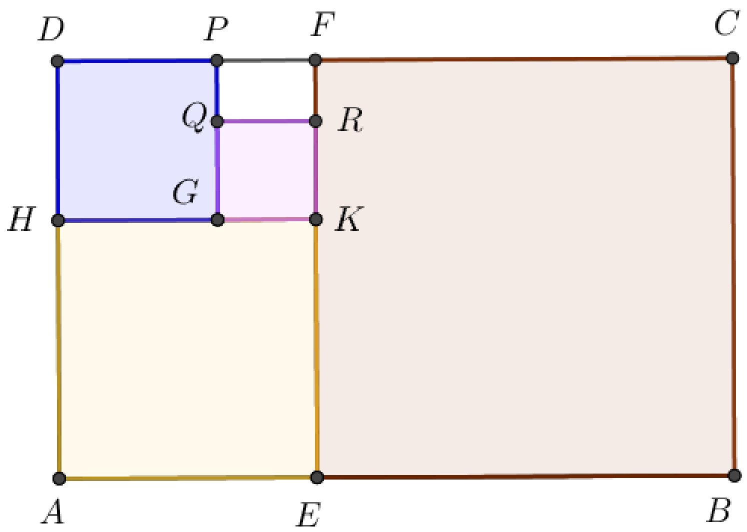
R è un rettangolo aureo se le sue dimensioni, *a*, *b* sono tali che risulta

$$\frac{a}{b} = \Phi$$

Se b> $\frac{a}{2}$, rimuovendo dal rettangolo aureo *ABCD* il quadrato di lato *CB*=*b*, si ottiene un altro rettangolo *AEFD* aureo di dimensioni *b*, $a - b$, infatti

$$\frac{b}{a-b} = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi$$

Il ragionamento si può reiterare all'infinito



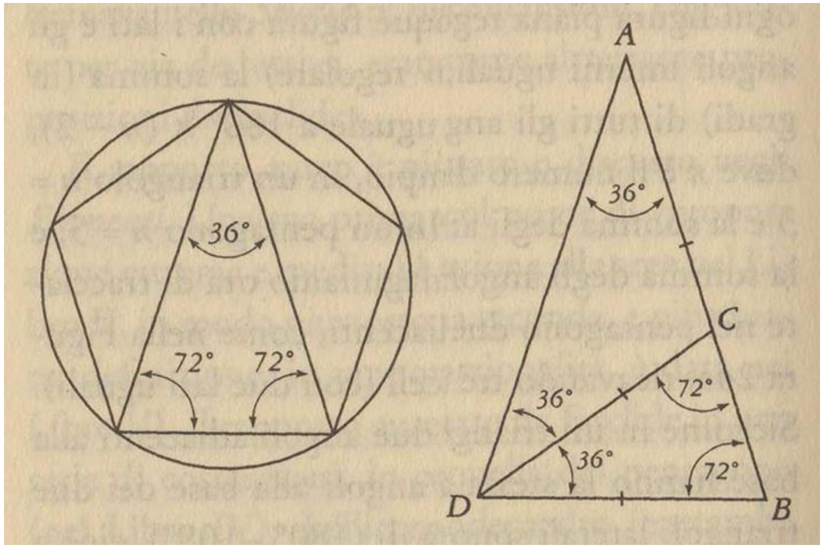
La sezione aurea si trova in molte costruzioni geometriche

Il rapporto tra il lato *AD* e la base *DB* di un triangolo isoscele avente gli angoli di 72°, 72°, 36° è pari a Φ

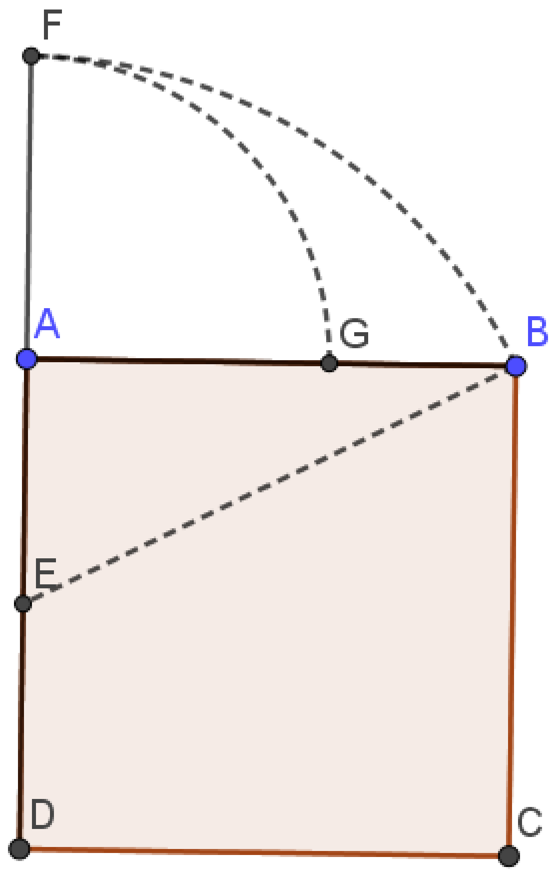
Posto *AD*=*AB*=1, *DB*=*x*, dalla similitudine dei triangoli *ADB, DCB*, risulta

$$1 : x = x : (1 - x)$$
$$x^2 = 1 - x$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1}{x} = \Phi$$



La costruzione geometrica della sezione aurea



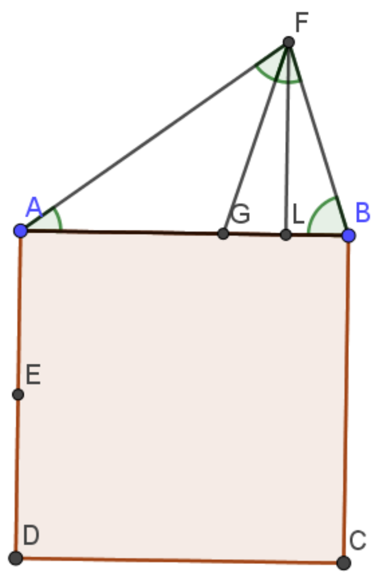
$$AG^2 = AB \times GB$$

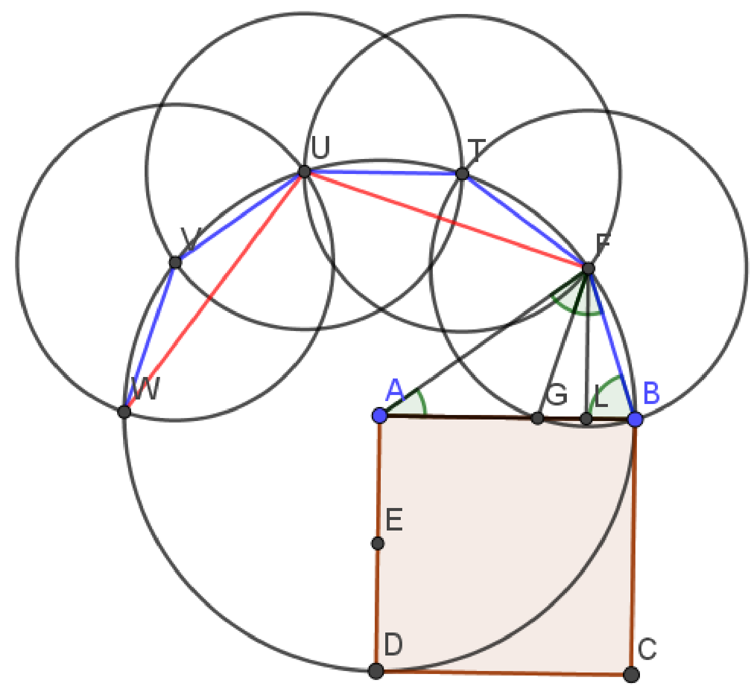
- Si costruisce il quadrato di lato AB
- Sia E il punto medio di AD
- Con centro E e raggio EB si traccia l'arco di cerchio BF essendo F il punto sul prolungamento di AD
- Con centro A e raggio AF si traccia l'arco di cerchio FG essendo G il punto su AB

La costruzione del pentagono e del decagono regolare

ovvero la costruzione della quinta parte di un angolo piatto usando la sezione aurea.

Costruita la sezione aurea del segmento AB, ovvero il punto G, si costruisce il triangolo isoscele GBF in cui GF=FB=AG. Congiunto A con F, l'angolo BAF è la quinta parte di un angolo piatto (36°).





La sezione aurea e la serie di Fibonacci

Ogni numero di Fibonacci è la somma dei due numeri che lo precedono. Se indichiamo i numeri successivi coi simboli:

$F_1, F_2, F_3, \dots . F_n, \dots$ avremo $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Se ora dividiamo ambo i membri per F_n e poniamo $a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ otteniamo

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

Se ora facciamo crescere il numero *n*, i valori a_n e a_{n+1}si avvicinano sempre più a uno stesso valore soluzione dell'equazione:

$$\mathrm{x} = 1 + \frac{1}{\mathrm{x}}$$

Moltiplicando per x ambo i membri si ottiene l'equazione

$$x^2 = x + 1$$

La cui soluzione positiva è $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Dunque la sezione aurea **Φ =** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ è il limite a cui tende la successione $a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ al tendere di *n* all'infinito.

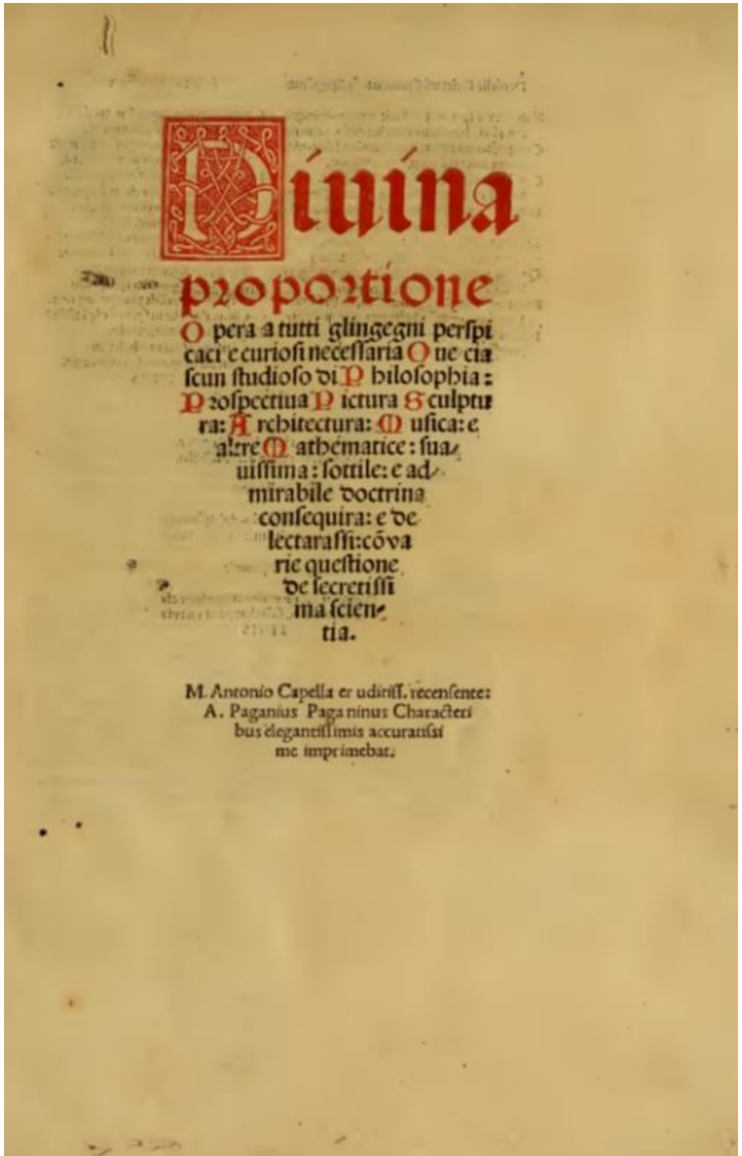
Luca Pacioli (1447-1517)
1494 *Summa de aritmetica, geometria, proportioni et proportionalità*

Ritratto di Luca Pacioli attribuito a Jacopo de' Barbari, Museo Nazionale di Capodimonte

Luca Pacioli invitato a Milano nel 1496, scrisse e dedicò a Ludovico il Moro l'opera *De Divina Proportione*.

Le sessanta tavole di Leonardo da Vinci coi disegni dei solidi geometrici sono oggi perduti

Luca Pacioli, Divina Proportione, 1509

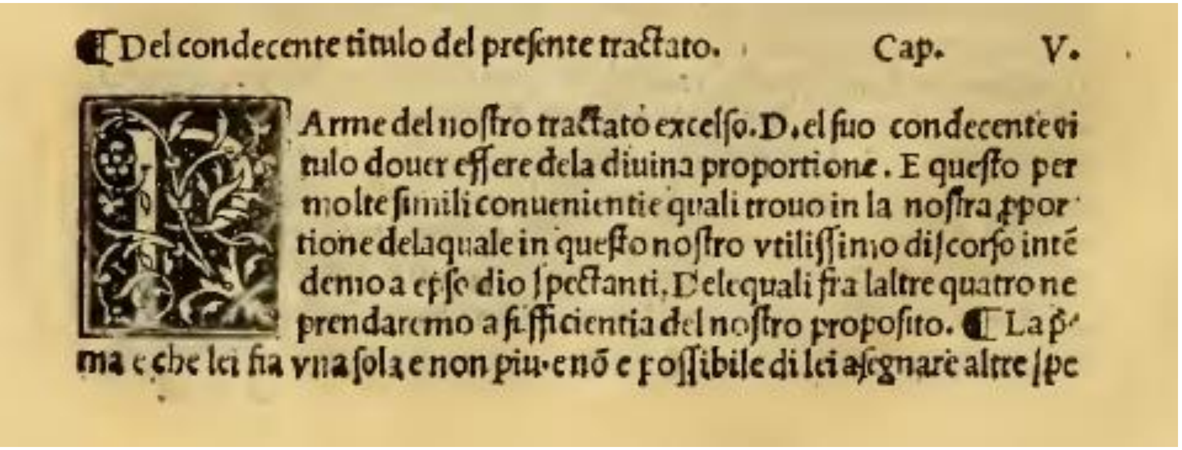

Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspi
caci e curiosi necessaria Oue cia
scun studioso di Philosophia:
Prospectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Musica: e
altre Mathematice: sua
uissima: sottile: e ad
mirabile doctrina
consequira: e de
lectarassi: cõ va
rie questione
de secretissi
ma scien
tia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantissimis accuratissi
me imprimebat.

Divina proportione
Opera a tutti gli ingegni perspicaci e curiosi necessaria Ove ciascuno studioso di Philosophia Prospective Pictura Sculptura Architectura Musica e altre Mathematice suavissima sottile ed admirabile doctrina consequira e delectarassi con varie questione de secretissima scientia

La divina proporzione è la sezione aurea. L’opera contiene anche un trattato sulle proporzioni in architettura ricavate dal corpo umano e la traduzione di un’opera di Piero della Francesca, *De quinque corporibus regularibus*

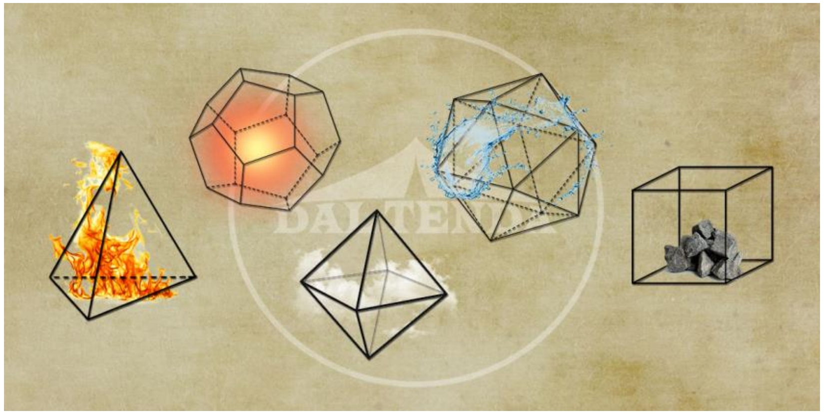
Luca Pacioli, Divina proportione


Del condecente titulo del presente tractato. Cap. V.

PArme del nostro tractato excelso. D. el suo condecente ti
tulo douer essere dela diuina proportione. E questo per
molte simili conuenientie quali trouo in la nostra ꝓpor
tione delaquale in questo nostro vtilissimo discorso intẽ
demo a esso dio spectanti. Delequali fra laltre quatro ne
prendaremo a sufficientia del nostro proposito. La p̄
ma e che lei sia vna sola e non piu. e nõ e possibile di lei asegnare altre spe

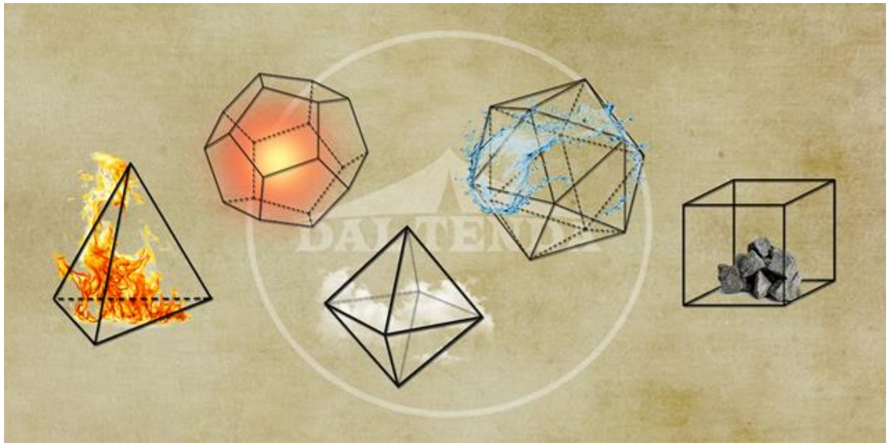
Pacioli giustifica l’aggettivo «divina», infatti questa sorte di proporzione ha diversi caratteri che appartengono alla divinità: è unica nel suo genere, è trina perché abbraccia tre termini, è indefinibile in quanto irrazionale, è invariabile

La prima convenientia è che lei sia una sola e non più, e non è possibile di lei asegnare altre spetie nè differentie: la quale unita sia el supremo epiteto de epso Idio, secondo tutta la scola theologica e anche philosophica.
La seconda convenientia è de la Sancta Trinita:cioè, sì commo in divinis una medesima substantia sia fra tre persone Padre Figlio e Spirito Sancto, così una medesima proportione de questa sorte sempre conven se trovi fra tre termini. E mai nè in più nè in manco se po retrovare commo se dirà.
La terza convenientia è che si commo Idio propriamente non se po diffinire né per parolle a noi intenere, così questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare, nè per quantità alcuna rationale exprimere, ma sempre sia occulta e secreta e da li Mathematici chiamata irrationale
La quarta convenientia è che si commo Idio mai non se po mutare e sia tutto in tutto e tutto in ogni parte, così la presente nostra proportione sempre in ogni quantità continua e discreta, o sienno grandi o sienno picole, sia una medesima e sempre invariabile; e per verun modo se po mutare né anco per intellecto altramente aprender, commo el nostro processo demonstrerà.



La quinta convenientia se po non immeritamente a le predicte arogere: cioè, sì commo Idio l'essere conferisci a la Virtu Celeste per altro nome detta Quinta Essentia, e mediante quella a li altri quatro corpi semplici cioè a li quatro elementi Terra, Aqua, Aire e fuoco e per questi l'essere a cadauna altra cosa in natura, così questa nostra sancta proportione l'esser formale dà (secondo l'antico Platone in suo Timeo) a epso cielo atribuendoli la figura del corpo detto **Duodecedron,** altramente corpo de 12 pentagoni**, el quale commo de sotto se mostrarà, senza la nostra proportione non è possibile poterse formare.**

«Le figure cosmiche»



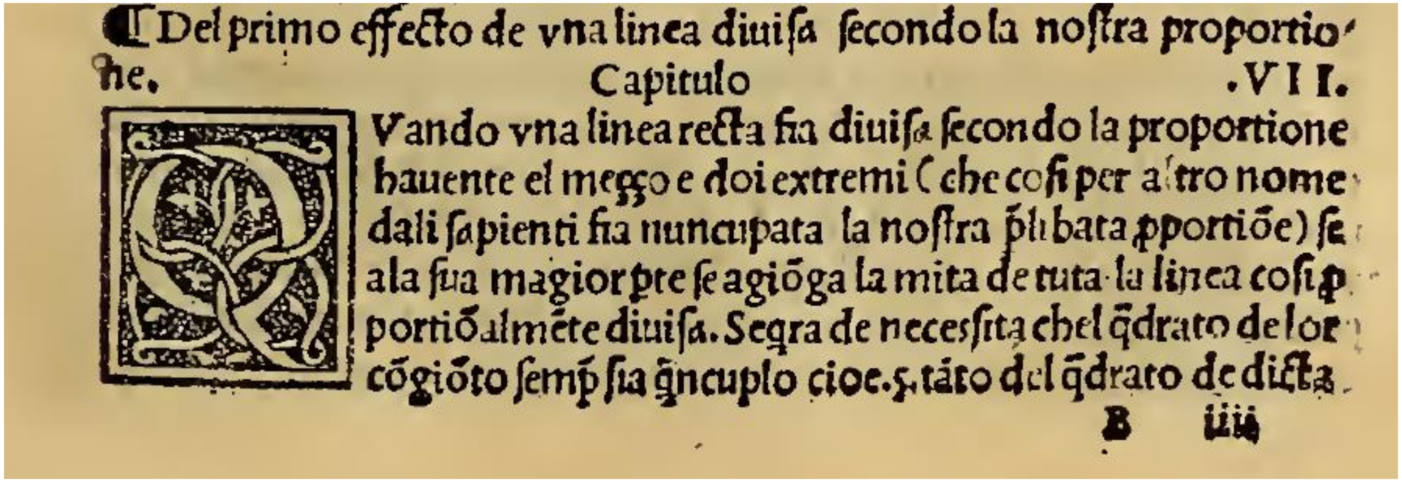
➢ *Pitagora di Samo* VI secolo a.C.

A Pitagora è attribuita la scoperta dei 5 poliedri regolari convessi («figure cosmiche»).

➢ Nel *Timeo di Platone* ai quattro elementi naturali (terra, fuoco, aria, acqua), vengono fatti corrispondere i quattro solidi regolari, **cubo, tetraedro, ottaedro, icosaedro**, rispettivamente.

Al quinto solido regolare, **il dodecaedro** che come è noto coinvolge la sezione aurea (rapporto tra diagonale e lato del pentagono regolare), probabilmente Platone si riferisce quando afferma che «Della quinta combinazione che ancora rimaneva, il dio si è servito per abbellire il disegno dell'universo».

Luca Pacioli, Divina Proportione



Del primo effecto de vna linea diuisa secondo la nostra proportio-
ne. Capitulo .VII.
QVando vna linea recta sia diuisa secondo la proportione
hauente el meggo e doi extremi (che cosi per altro nome
dali sapienti sia nuncupata la nostra p̄libata ꝓportiõe) se
ala sua magior ꝑte se agiõga la mita de tuta la linea cosi ꝓ
portiõalmẽte diuisa. Seqra de necessita chel q̄drato de lor
cõgiõto semꝑ sia q̄ncuplo cioe.5.tãto del q̄drato de dicta
B iiii

Del primo effecto de una linea divisa secondo la nostra proportione. Capitulo VII

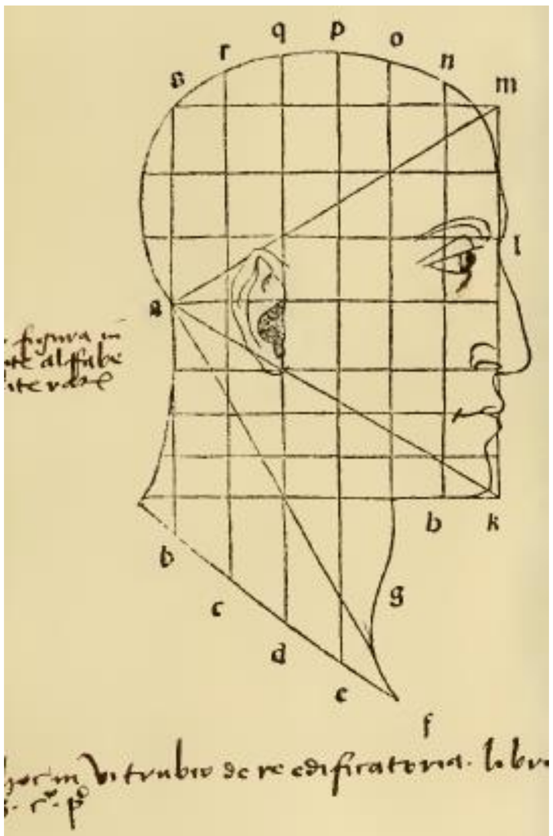
Quando una linea recta sia divisa secondo la proportione havente el mezzo e doi extremi (che cosi per altro nome da li sapienti sia nuncupata la nostra prelibata proportione) se a la sua magior parte se agionga la mità de tuta la linea così proportionalmente divisa, sequira de necessità che'l quadrto de lor congionto sempre sia quincuplo, cioe 5 tanto, del quadrato de dicta mità integrale.

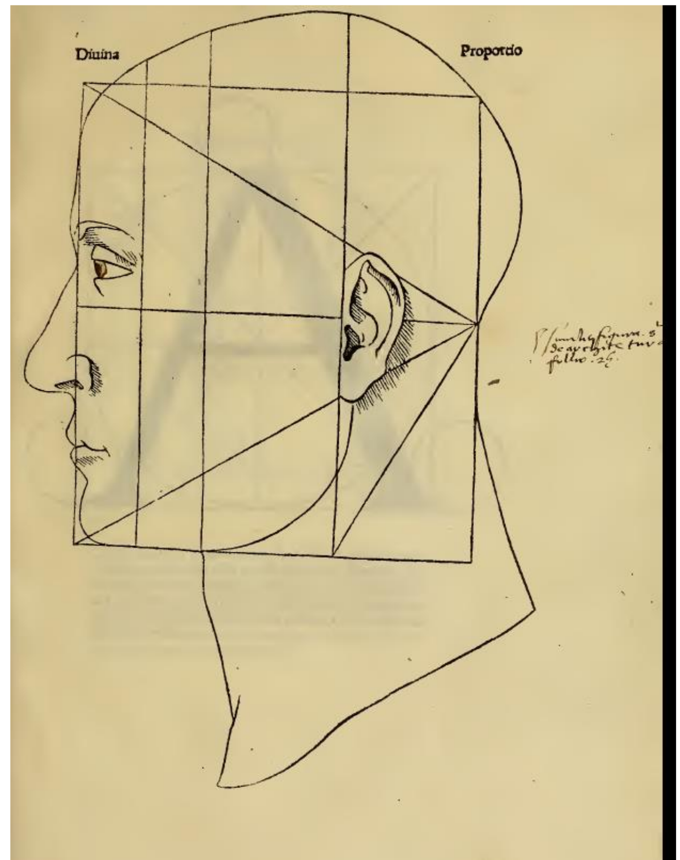
Si tratta di un'algebra retorica quella di Pacioli che noi possiamo trascrivere così:

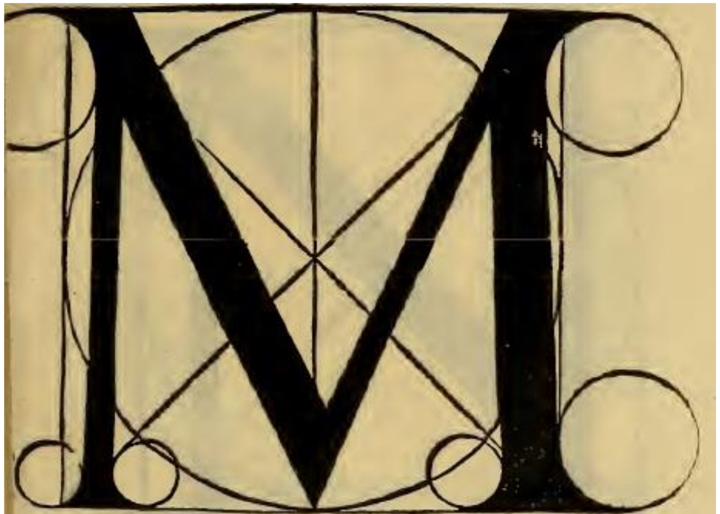
$$a : x = x : (a - x)$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

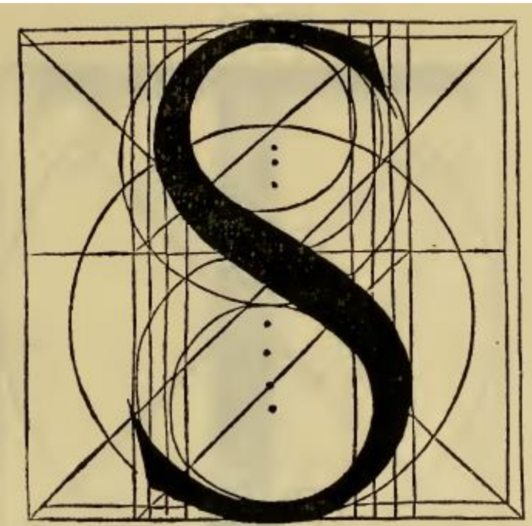
Segue un trattato sulle proporzioni in architettura ricavate dalle proporzioni del corpo umano e la traduzione del libro di Piero della Francesca *De quinque corporibus regularibus*



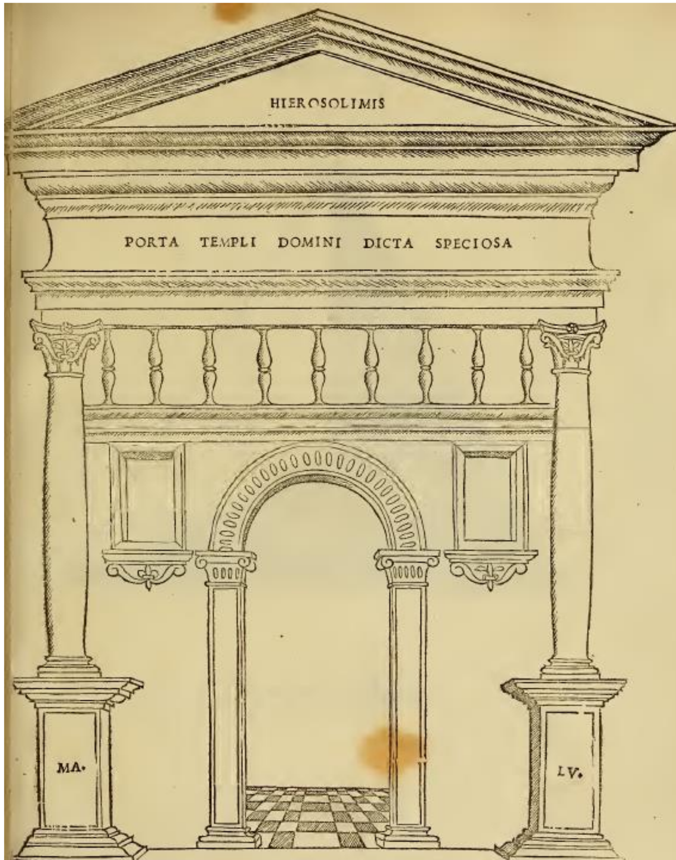


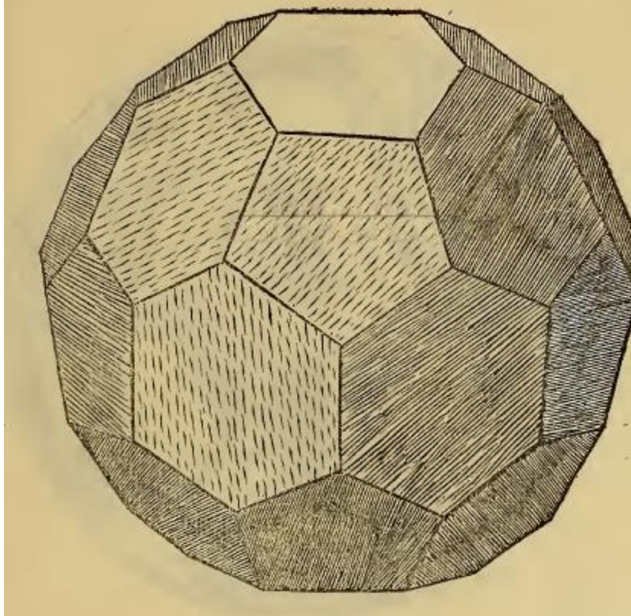


Questa lettera .M. se caua del tondo e del suo quadro le gambe suttili uogliáo esser per mezo de le grosse comme la senistra del. A. le extreme gambe uogliano esser al quanto dentro al quadro le medie fra quelle e le intersecationi de li diametri lor grosseze . grosse e sutili sereferescano a quelle del. A. cóme di sopra in figura aperto poi comprendere.



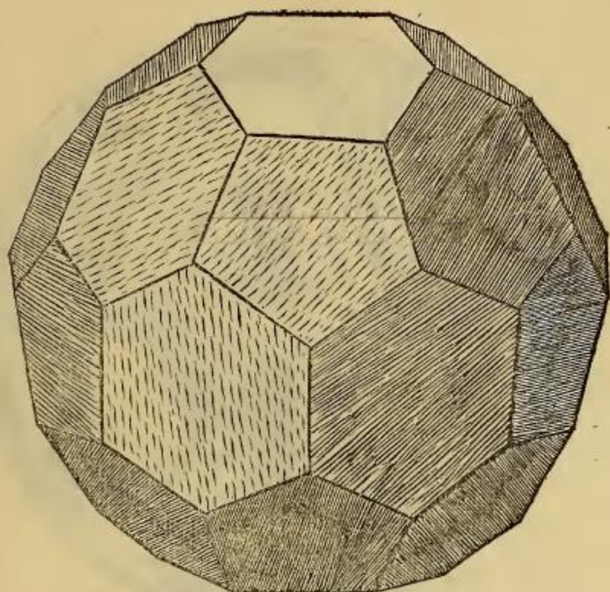
Questa lettera. S. se caua de octo tondi & questa sie la sua Ragione ut hic in exemplo apparet li quali per le sue paralelle trouádo lor centri trouerai quelli de sotto esser magiori de li de sopra un terzo del nono del suo quadro La pancia de mezzo uol esser grossa el nono aponto de la alteza. Le sutili un terzo de la grosseza terminando le teste cō sua gratia.





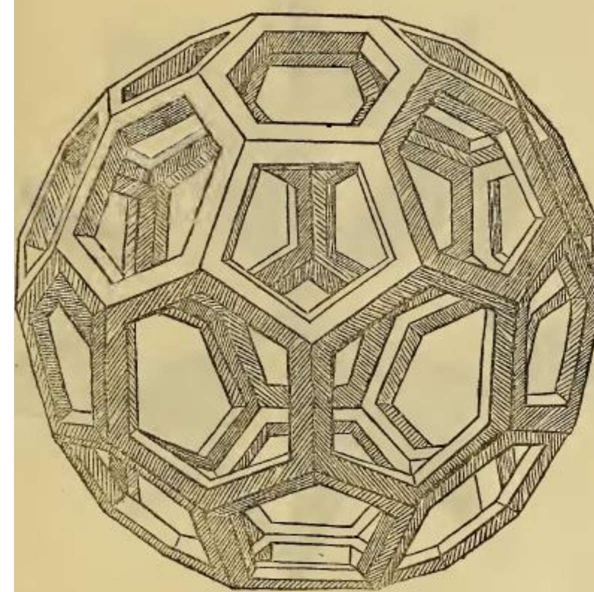
Icoſaedron Apotetmimenon Stereon

Icoſaedron abſciſum Solidum



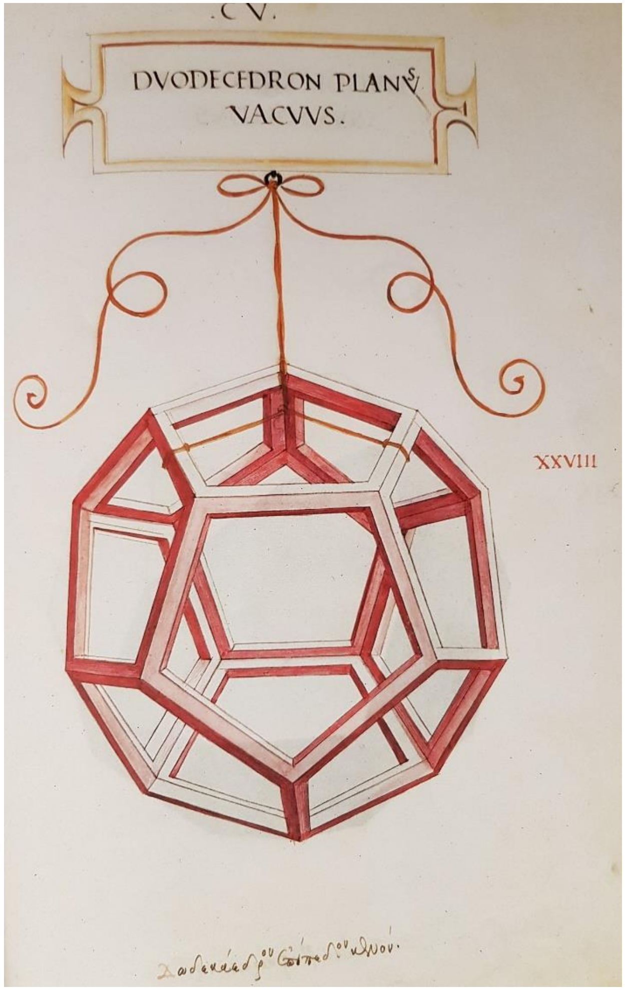
Icosaedron Apotetmimenon Stereon

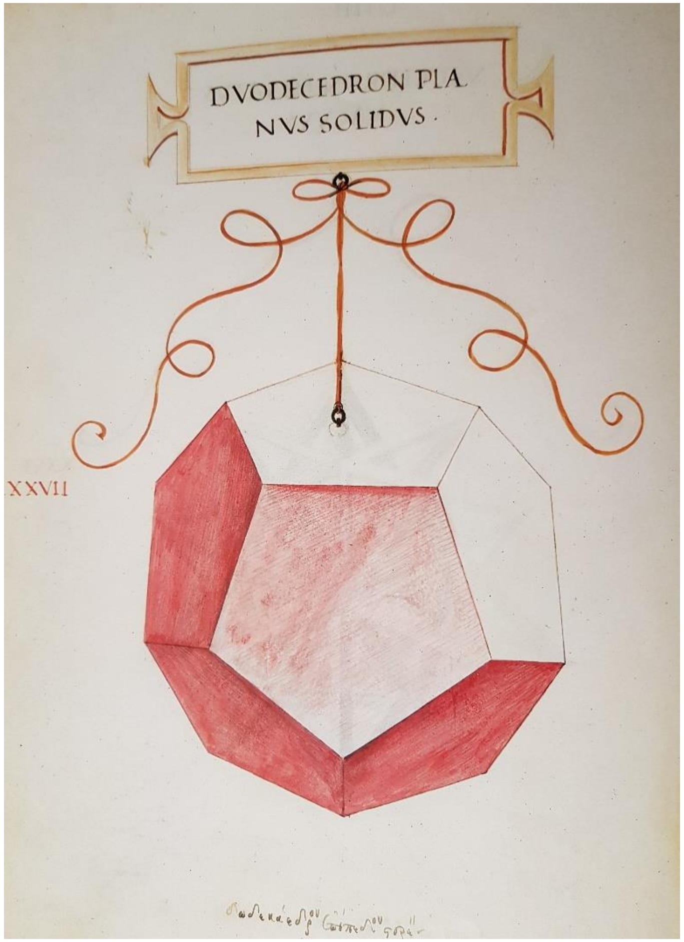
Icosaedron abscisum Solidum



Icosaedron Apotetmimenon Cenon

Icosaedron abscisum Vacuum



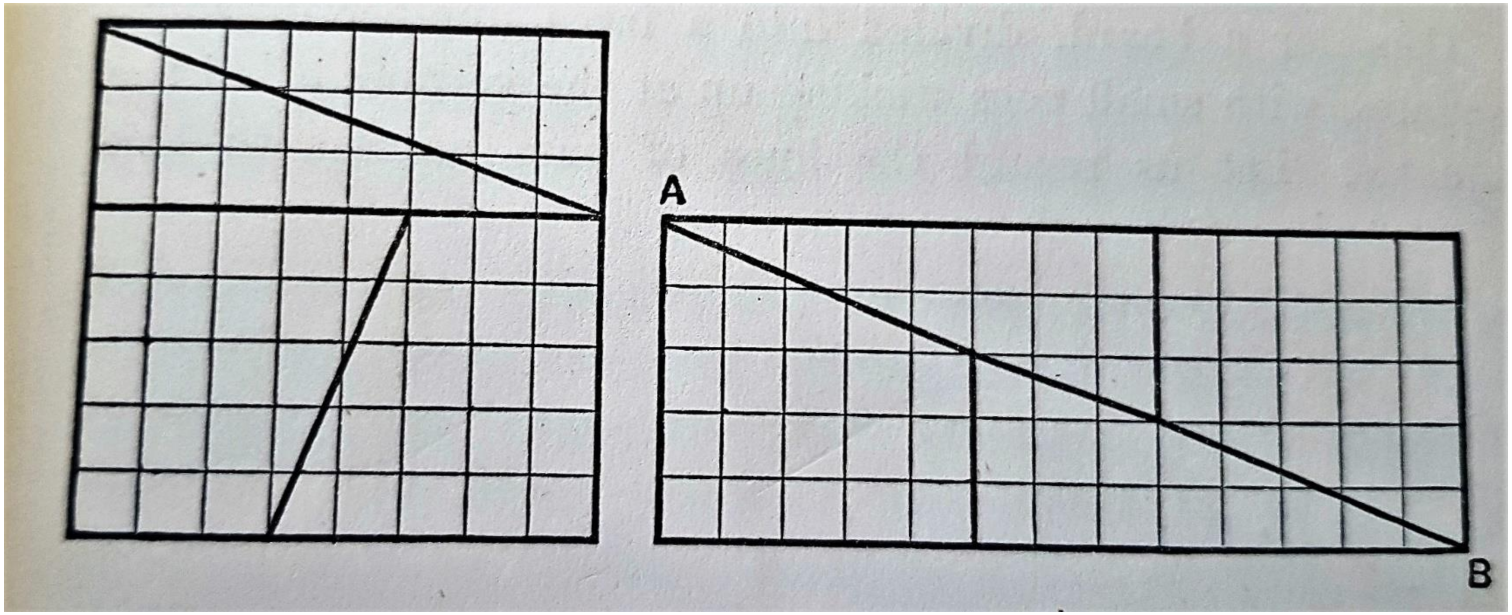


De Divina Proportione, manoscritto Ms. & 170 sup., Milano Biblioteca Ambrosiana,

Un paradosso geometrico

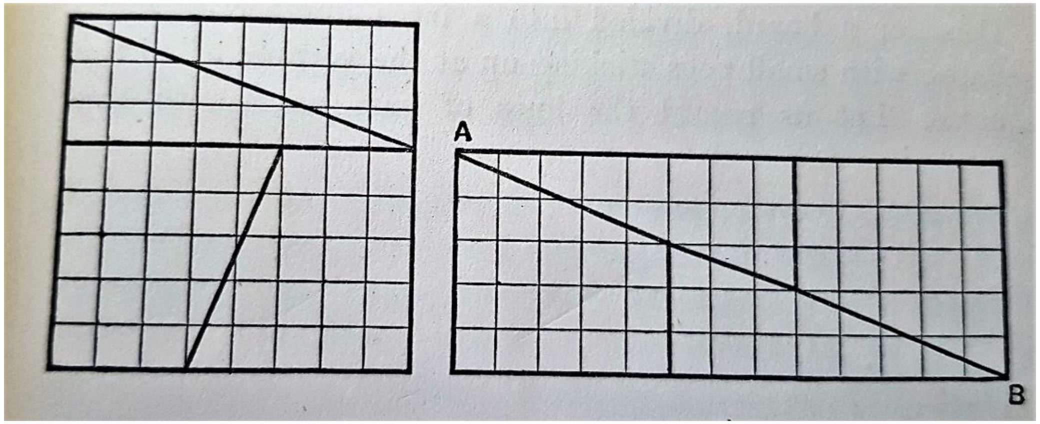
L'esempio ci mostra quanto facilmente la vista può essere ingannevole nelle dimostrazioni ottenute dividendo una figura e assemblando poi diversamente le parti.

un quadrato di carta formato da 8X8= 64 quadratini viene tagliato in 4 parti come in figura. Le parti vengono poi assemblate nel modo indicato nella seconda figura che risulta formata, almeno all'apparenza da 5X13=65 quadratini.



Un paradosso geometrico

In realtà, i lati dei quattro pezzi che nella seconda figura giacciono sulla diagonale AB non hanno la stessa direzione. Non appare perché impercettibile materialmente, ma è inclusa una piccola losanga la cui area è pari a quella del quadratino in più nella seconda disposizione. Che non abbiano la stessa direzione si può facilmente dimostrare usando la nota formula trigonometrica
$arctg\, x_1 + arctg x_2 = arctg \frac{x_1+x_2}{1-x_1x_2}$ con $x_1 = \frac{3}{8}, x_2 = \frac{5}{2}$



Il paradosso dipende dalla relazione $5 \times 13 - 8^2 = 1$
Analogamente
$$13 \times 34 - 21^2 = 1$$
Si tratta in entrambi i casi di tre numeri consecutivi della serie di Fibonacci.
La formula generale è:
$$F_{n-2} \times F_n - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

Quanto vale la somma?

Prendiamo una sequenza di dieci numeri costruita a partire da due numeri qualsiasi seguendo la regola della serie di Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Quanto vale la loro somma?
Si prenda il quarto numero dal basso e si moltiplichi per 11
La somma dei dieci numeri è 80X11=880.

8
5
13
18
31
49
80
129
209
338

In generale sussistono le seguenti identità:

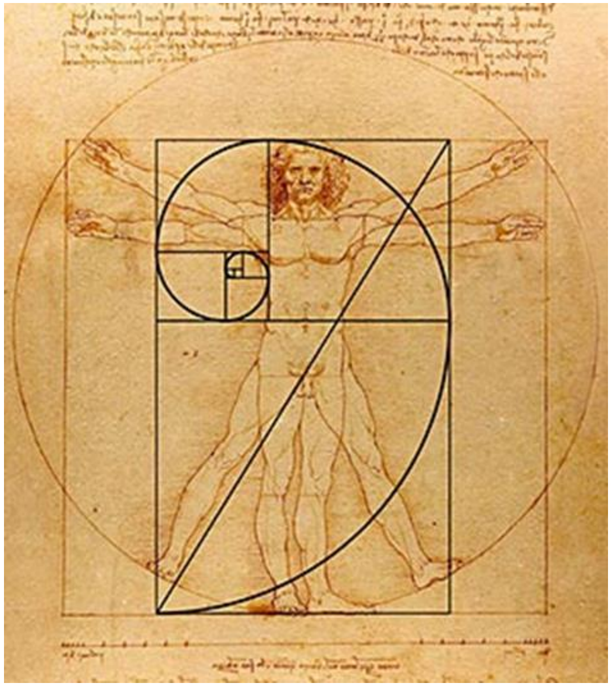
$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - F_2$$

$$F_7 = 8F_2 + 5F_1$$
$$F_{12} = 89F_2 + 55F_1$$

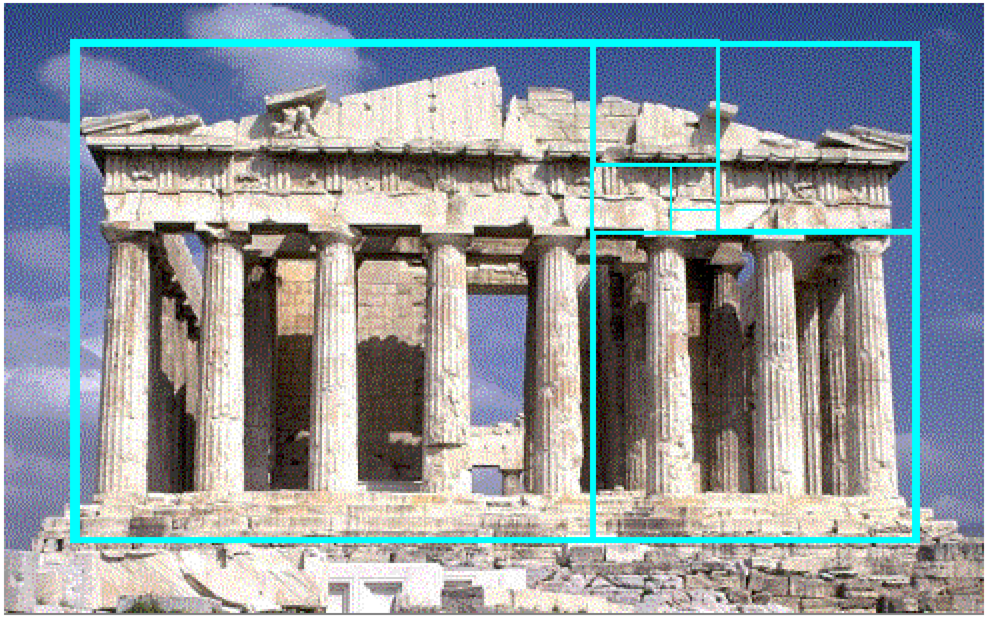
Da cui

$$F_{12} - F_2 = 88F_2 + 55F_1 = F_7 \times 11 = 80 \times 11 = 880$$

Un esercizio dilettevole: alla ricerca della sezione aurea



L'asse della torre divide la larghezza di Palazzo Vecchio in media ed estrema ragione



George Markowsky *Misconceptions about the Golden Ratio* , The College American Journal vol. 23, 1992

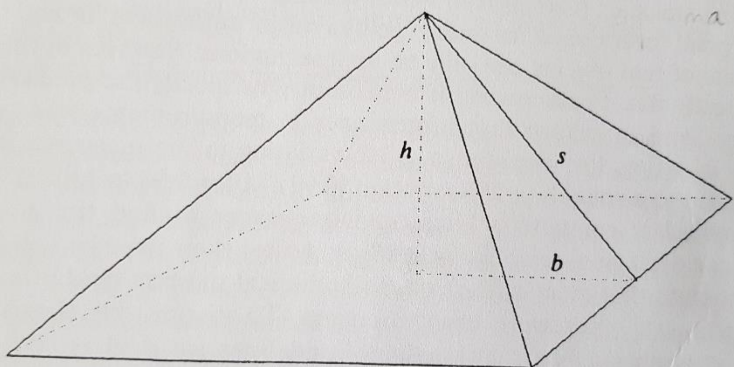


Figure 4
A square pyramid

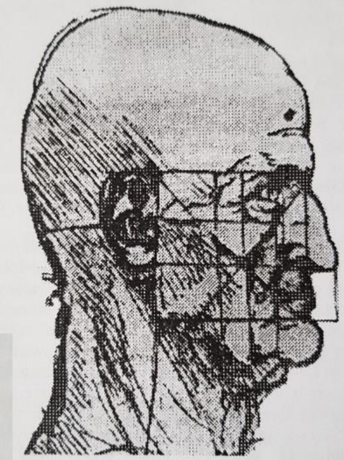


Figure 7
A drawing attributed to Leonardo da Vinci

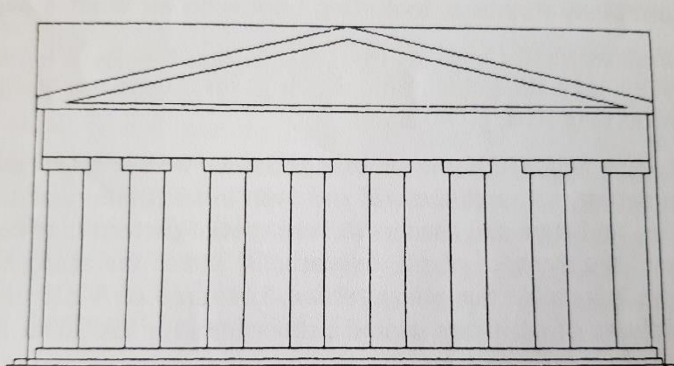


Figure 6
The Parthenon supposedly fitting into a golden rectangle

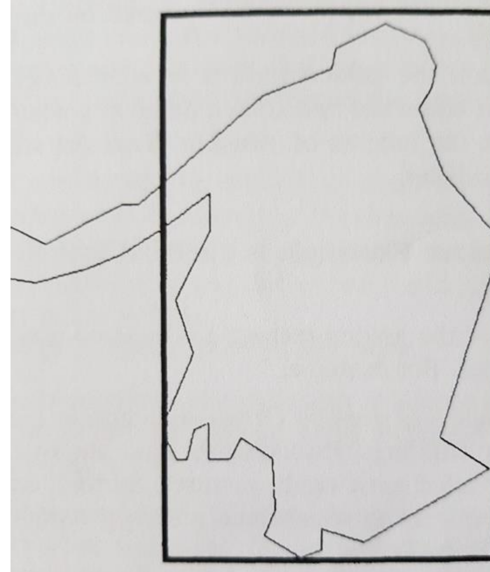


Figure 8
St. Jerome by Leonardo da Vinci

George Markowsky

- La sezione aurea ha catturato l'immaginazione popolare ed è stata discussa in molti articoli e libri. Generalmente le sue proprietà matematiche sono correttamente formulate, ma molto di ciò che è presentato nel campo dell'arte, architettura, letteratura estetica, è falso o seriamente fuori posto.
- Sfortunatamente queste affermazioni hanno acquistato lo status di conoscenza comune e sono ampiamente ripetute.

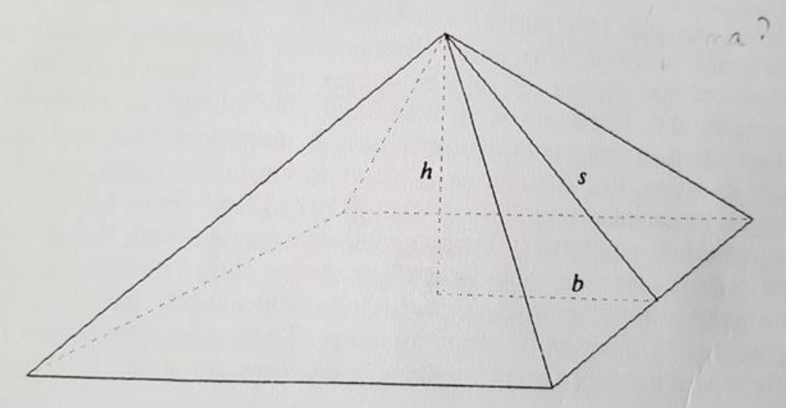


Figure 4
A square pyramid

La grande piramide di Cheope a base quadrata sarebbe stata disegnata in modo che il rapporto tra l'altezza di una faccia triangolare e la metà del lato del quadrato di base sia *Φ* .
La fonte sarebbe Erodoto , ma a un controllo puntuale risulta che il testo di Erodoto non supporta la storia riferita.

George Markowsky

- Le dimensioni del Partenone variano da fonte a fonte probabilmente perché i differenti autori hanno misurato tra punti differenti.
- Con così tanti numeri a disposizione un entusiasta della sezione aurea può scegliere i numeri che gli danno il risultato migliore.

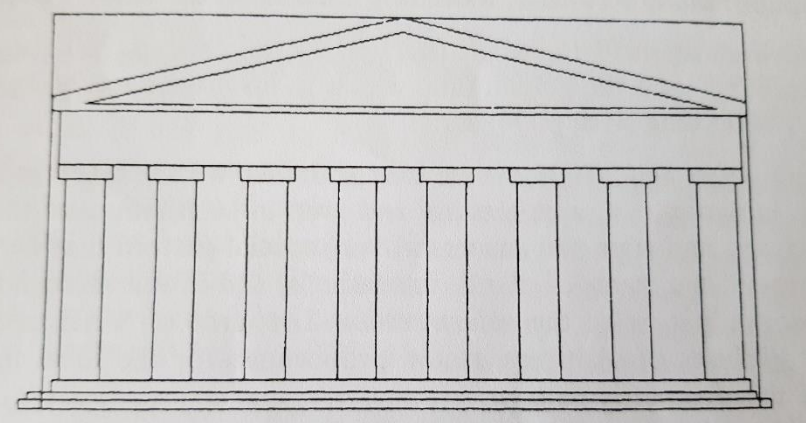


Figure 6
The Parthenon supposedly fitting into a golden rectangle

George Markowsky

Molti pittori, incluso Leonardo, usarono Φ ?

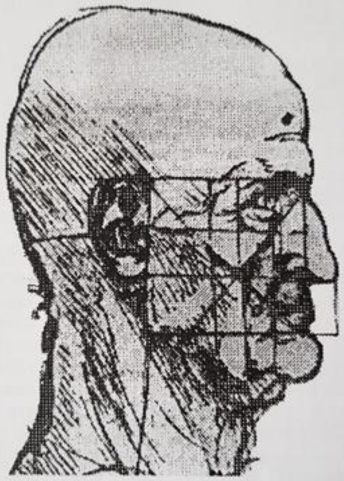


Figure 7
A drawing attributed to Leonardo da Vinci

Sul volto dell'uomo attribuito a Leonardo, l'artista ha tracciato dei rettangoli, molti dei quali, secondo alcuni scrittori, sarebbero rettangoli aurei.
In realtà tali rettangoli sono tracciati grossolanamente e non hanno angoli definiti così è difficile dare significato all'affermazione che tali rettangoli «approssimano» rettangoli aurei.

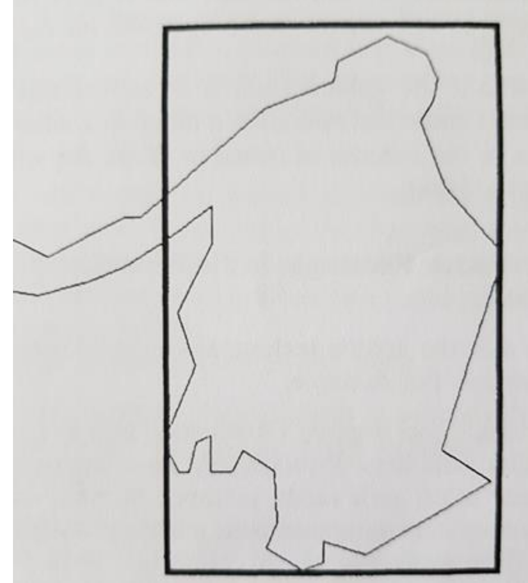


Figure 8
St. Jerome by Leonardo da Vinci

Un rettangolo aureo viene adattato attorno a San Gerolamo e da questo fatto «sorprendente» alcuni esperti ritengono che Leonardo volutamente abbia dipinto la figura conformemente a queste dimensioni. Ma la posizione del rettangolo è arbitraria e non tocca la testa, né il corpo del santo sul lato sinistro, il braccio è esterno ecc…

Dal 1963
The Fibonacci Quarterly:
The Official Journal of the Fibonacci Association
Università di Santa Clara, California

The Fibonacci Quarterly
Official Publication of The Fibonacci Association

Purpose and Editorial Policy

As the primary publication of the Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly* provides the focus for worldwide interest in the Fibonacci number sequence and related mathematics. New results, research proposals, challenging problems and new proofs of known relationships are encouraged.

https://www.mathstat.dal.ca/fibonacci/