



# Le proprietà delle potenze: tanta fatica e pochi risultati



FREIE UNIVERSITÄT BOZEN

LIBERA UNIVERSITÀ DI BOLZANO

FREE UNIVERSITY OF BOZEN · BOLZANO

**Federica Ferretti**  
Libera Università di Bolzano  
*[federica.ferretti@unibz.it](mailto:federica.ferretti@unibz.it)*

**Ferrara, 26/11/2019**



- Le potenze nelle pratiche didattiche della scuola secondaria



- Evidenze di difficoltà diffuse per quanto riguarda l'apprendimento delle potenze



- Analisi di interviste a studenti della scuola secondaria di secondo grado





- Le potenze nelle pratiche didattiche della scuola secondaria



## Le ricerche in Didattica della Matematica



- Evidenze di difficoltà diffuse per quanto riguarda l'apprendimento delle potenze



- Analisi di interviste a studenti della scuola secondaria di secondo grado

# Esercizi sulle potenze

Semplifica le seguenti espressioni.

- 1  $(3^3)^3 : (3^3)^2 \cdot [(3^6)^2 : (3^3)^4]$
- 2  $\{[(2^3)^4 \cdot (2^2)^3] : (2^3)^3\} : (2^3 \cdot 2)^2$
- 3  $\{[(3^4)^5 : (3^5)^4] \cdot (3^4)^2\} : [3 \cdot (3^2)^3]$
- 4  $6^6 \cdot 4^6 : (3^2 \cdot 8^2) : 8^4$
- 5  $[2^6 \cdot 6^6 : (3^2 \cdot 4^2)] : 6^4$
- 6  $[(6^3 \cdot 2^3 : 4^3)] \cdot [(2^3)^3 : (2^2)^3] : 3^3$
- 7  $[(5^8 : 5^4)^2 \cdot (5^7 : 5^2)] : 5^{12} + 1^5$
- 8  $(4^4 - 4^3)^0 \cdot 4 + 4^3 : 4^2 - (5^3 : 5^2)$
- 9  $[(3^5 : 3^4) \cdot 3^2]^2 \cdot [(4^6 : 4^4) \cdot 4]^2 : (3^2 \cdot 4^2)^3$
- 10  $(2^5 : 4^2)^3 : 2^3 \cdot [(6^3 : 3^2) \cdot 2^5] : (2^2)^3 \cdot 2^0$

**270**  $a^4 : b^4 = (a : b)^4$ ;  
 $a^4 : b^4 = (a^4 d) : (b^4 d)$ ;  
 $a = 20, b = 5$ ;  
 $a = 6, b = 2, d = 3$ .

**271**  $c^3 \cdot c^2 \cdot c^2 = c^{12}$ ;  
 $(a^2)^b = a^{2b}$ ;  
 $c = 2$ ;  
 $a = 2, b = 3$ .

**272**  $(1 + a^4)b = b + a^4b$ ;  
 $2a(b^2 - c) = 2ab^2 - 2ac$ ;  
 $a = 2, b = 7$ ;  
 $a = 9, b = 3, c = 6$ .

**273**  $a^2b^2c^2 = (abc)^2$ ;  
 $8a^3b^3 = (2ab)^3$ ;  
 $a = 2, b = 3, c = 2$ ;  
 $a = 3, b = 1$ .

**274**  $10 - 3a = 4 - (3a - 6)$ ;  
 $x(1 + x) = x + x^2$ ;  
 $a = 3$ ;  
 $x = 1$ .

**275**  $(3a + 2b) : c = 3a : c + 2b : c$ ;  
 $(2a)^b \cdot (2a)^c = (2a)^{b+c}$ ;  
 $a = 4, b = 7, c = 2$ ;  
 $a = 3, b = 2, c = 3$ ;  
 $n = 2$ ;  
 $x = 3, y = 2$ .

**276**  $20^a : 4^a = 5^a$ ;  
 $5^a \cdot 5^a = 5^{a+a}$ ;  
 $a = 2, b = 3$ .

**277**  $2(a^2 - 1) = 2a^2 - 2$ ;  
 $3a : 3b = (3a : 3) : (3b : 3)$ ;  
 $a = 21, b = 7$ .

**278**  $a - 10 = (a + 2) - 12$ ;  
 $x : y = 6x : 6y$ ;  
 $a = 15$ ;  
 $x = 30, y = 5$ .

**279**  $(2x)^3 : (2x)^2 = 2x$ ;  
 $(a + x)x^2 = ax^2 + x^3$ ;  
 $x = 3$ ;  
 $a = 5, x = 2$ .

---

**Espressioni e proprietà delle potenze**

Applicando le proprietà delle potenze, calcola il valore delle seguenti espressioni.

**280**  $2^5 : 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2^0$  [36]

**281**  $(3^4 : 3^3)^4 \cdot 3^5 : (3^2)^4$  [16]

**282**  $4^2 \cdot 4^0 - 3^5 : 3^3 + 5^0$  [9]

**283**  $5^5 : 5^1 \cdot 2^2 : 5^2$  [4]

**284**  $2^6 \cdot 3^6 : (18^4 : 3^4)$  [27]

**285**  $(2^2 \cdot 3^4)^4 : 6^4 \cdot 3^4$  [4]

**286**  $(3^2)^3 : (3^2)^2 \cdot [(3^4)^3 : (3^2)^4]$  [9]

**287**  $(2^3)^3 \cdot (2^2 \cdot 2^3)^3 : [(2^4)^3] \cdot (2^2)^3$  [4]

**288**  $3^5 : (3^2)^2 \cdot [(3^2)^3] : [(3^3)^2] \cdot (3^2)$  [27]

**289**  $(4^2 : 2^2)^3 \cdot 2^2 : (6^6 : 3^6)$  [4]

**290**  $(6^3 \cdot 6^2)^2 : 3^6 - (2^3)^2$  [0]

**291**  $[(3^2 \cdot 3^3)^2] : (3^2)^2 + [(2^3)^2 : (2^2)^2] : (2^2)^2$  [28]

**292**  $[6^6 \cdot 4^6 : (3^2 \cdot 8^2)] : 8^6$  [81]

**293**  $(4^2 \cdot 2^2) : 2^2 - 5^2 : 5^1 + (2^2 \cdot 3^2)^3 : 6^3$  [17]

**294**  $(3^4 \cdot 2^4 \cdot 7^4) : (3^3 \cdot 2^3 \cdot 7^3) - 2^5 - [(3^2)^2]^2 : 3^4$  [11]

**295**  $7 \cdot 4 + (2^5 : 2^4)^0 - 25^2 : 5^2 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \cdot (5^4 : 5^2)$  [9]

**296**  $15 \cdot [(12^2 : 3^2) : 2^2] - [(2^2)^2]^2 + 7 \cdot 3 - (20^4 : 5^4)^0 - 15^3 : 5^3$  [37]

**297**  $[(2^2)^3 : (2^2)^2] + [(3^4 \cdot 3^2)^3] : [(3^2)^3]^2 : (3^2 \cdot 3^4) - 6$  [11]

**298**  $\{[(2^3 + 2^2) : 2^2 - 3^0]^2 - 1\}^3 - [(8^2 : 4^2 - 1) \cdot [(3^3)^4 : (3^4)^3]]^2$  [18]

**299**  $[(6^3 \cdot 6^4) : (6 \cdot 6^2)]^2 : (6^2)^2 - [(2^2 \cdot 8^2) : 16] \cdot 2$  [4]

# Esercizi sulle potenze

Espressioni con le quattro operazioni e le potenze. Livello intermedio.  
 Completi di soluzione guidata.  
 Evaluating Expressions Involving Fractions – With solutions

1.  $(1 - \frac{1}{2})^4 : \left[ \left( \frac{3}{7} + \frac{1}{6} - \frac{5}{14} \right) \cdot \left( 5 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)^3 : \left( \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]^3 - \frac{1}{2} =$

[0]  
soluzione

2.  $(3 - \frac{1}{4}) : \left[ \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right)^2 \cdot \left( \frac{7}{5} + \frac{1}{10} + \frac{7}{2} \right)^2 \right] : \frac{9}{2}$

[11]  
soluzione

3.  $\left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \right) : \frac{10}{8} \right) \right] : \left( \frac{3}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^4 : \left( \frac{1}{2} \right)^3$

[13]  
soluzione

4.  $\left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right)^3 \cdot \left( \frac{8}{9} \right)^2 + \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)^2 \cdot \frac{3}{16} \right] \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^2$

[3]  
soluzione

5.  $\left[ \left( \frac{15}{9} - \frac{1}{3} \right)^2 - \left( 1 - \frac{1}{3} \right)^2 : \frac{3}{9} \right] : \left[ \frac{16}{81} : \frac{16}{27} + \left( \frac{1}{9} \right)^2 : \frac{2}{30} + \frac{4}{27} \right]$

[2]  
soluzione

6.  $\left[ \left( \frac{3}{4} \right)^3 : \left( \frac{3}{4} \right)^2 : \left( \frac{3}{4} \right) - \left( 2 - \frac{2}{3} \right)^2 : \left( \frac{13}{6} + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{21} \right) \right] : \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{13}{84} \right)$

[10]

7.  $\left\{ \left[ \left( \frac{2}{5} \right)^{10} : \left( \frac{2}{5} \right)^{6 \cdot 7^2} \right] \cdot \left[ \left( \frac{2}{5} \right)^8 : \left( \frac{2}{5} \right)^3 \right] \right\} : \left[ \left( \frac{2}{5} \right)^{10} \cdot \frac{2}{5} \right]$

8.  $\left( \frac{2}{3} \right)^2 : \left( \frac{4}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^3 : \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^4 : \left( \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \frac{2}{3} \right)^5 : \left( \frac{2}{3} \right)^4 + \left( \frac{4}{3} \right)^3 : \left( \frac{4}{3} \right)^3 -$

9.  $\frac{1}{2} + \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{4}{3} \right)^4 \cdot \left( 1 - \frac{2}{7} \right)^4 \right]^6 : \left[ \left( 3 + \frac{2}{3} \right)^8 : \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{10} \right)^8 \right]^3 \right\}$

10.  $\left\{ \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]^3 : \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right]^3 : \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^4 \right]^3 \right\} : \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right]^2$

11.  $\left( 1 + \frac{1}{2} \right)^2 : \frac{5}{4} + \frac{9}{5} \cdot \left( 2 - \frac{4}{3} \right)^2 - \left( 2 - \frac{3}{5} \right) : \frac{1}{7} - \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^3 : \frac{5}{8}$

Semplifica le seguenti espressioni.

84.  $(-3a^2b^2)^2 + \frac{1}{2}ab(-3ab)^3$

$\left[ -\frac{9}{2}a^4b^4 \right]$

85.  $a^2b^2 + \frac{3}{5}a^2b \left( -\frac{2}{3}b + b - \frac{7}{6}b \right)$

$\left[ \frac{1}{2}a^2b^2 \right]$

86.  $\left( 3ab + \frac{5}{6}ab + \frac{1}{3}ab \right) : (25a) - \frac{1}{2}b$

$\left[ -\frac{1}{3}b \right]$

87.  $(-2a^2b^2 + 5a^2b^2 - 6a^2b^2) : \left( -\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{6}a^2b \right)$

[9b]

88.  $(-2b)^4 : b^2 - \frac{7}{4}a^2b^4 : \left( -\frac{1}{2}ab \right)^2$

[9b^2]

89.  $4ab : (-4ab) + (-2a^2b)^3 : (-2ab)^2 + 1$

[-2a^4b]

90.  $\left( -\frac{2}{3}a^2 \right)^2 : \left( -\frac{2}{3}a \right)^3 + \frac{4}{3}a^3b^2 : \left( -\frac{1}{3}ab \right)^2$

$\left[ \frac{21}{2}a \right]$

91.  $\frac{3}{4}ax^2 \left( \frac{5}{2}a - \frac{7}{6}a \right) - \left( a^2x - \frac{2}{5}a^2x \right) \left( -\frac{2}{3}x + x - \frac{7}{6}x \right)$

$\left[ \frac{3}{2}a^2x^2 \right]$

92.  $\left( -\frac{4}{3}a^4y^4 + \frac{1}{2}a^4y^4 \right) : \left( \frac{4}{3}ay - \frac{1}{4}ay \right) : \left( a^2y + \frac{1}{3}a^2y \right)$

$\left[ -\frac{15}{26}ay^2 \right]$

Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

28.  $[(-12)^6 : (4)^6]^4 : (-3)^{21}$

[-27]

34.  $\{[2^3 \cdot (10-8)^2] : (6-4)^3\} : (-2)$

[-2]

29.  $[(-16)^4 : 8^4]^6 : (-2)^{22}$

[4]

35.  $\{[(-4)^3]^2 : [(-4)^2]^3\}^0 - \{[(-6)^3 : (-3)^3]\}$

[-7]

30.  $[21^4 : (-7)^4]^3 : (-3)^9$

[-27]

36.  $[(-4)^2]^3 \cdot [(-4)^2]^2 : (-4)^2$

[16]

31.  $\{[(6^4)^3 : (6)^4]^2 \cdot 6^4\}^0$

[1]

37.  $[(-2)^3 \cdot (-2)^2 : (-2)^4]^3 - (3^2 - 3 - 1)$

[-13]

32.  $(4^3 : 4^2)^2 - (-3)^3 : (-1-2)^2$

[19]

38.  $(6+2)^3 : 4^3 - (-2-1)^3 : (-3)$

[-1]

33.  $(-3^2)^4 : [(-12 : 4)^2 \cdot (-3)^4] - 3^0$

[8]

39.  $(4-5)^3 - [(-3)^2 \cdot (-2)^2 : 18]^4 : (4-2)^3$

[-3]

40.  $[(18-7 \cdot 2)^3 : 4^2]^3 : (-3-1)^2 - 1$

[3]

42.  $[(-4)^4 \cdot (-4)^3 : (-4)^6]^2 - (2^3 - 2^2 - 9) \cdot (4^4 : 4^2 - 20)$

[-4]

Copyright 1997-2014 owned by Ubaldo Pernigo, please see  
 Tutti i contenuti, ove non diversamente indicato, sono coperti da licenza Creative Commons Attribuzione-Non commerciale-Non opere  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0> (Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 3.0) La riproduzione di tutto o parte dei c

[-7]



# Esercizi sulle potenze

**261** s. Dalle potenze ai numeri binari

198  $5^4 \cdot 5 + 3 \cdot (2^4 \cdot 5) - 5 \cdot 13^2 : [2 + 3 \cdot (7 \cdot 2^4 - 2)^2]$   
 199  $4^4 \cdot (4)^4 \cdot (4)^4 + [(3)^4]^4 \cdot (3)^4 \cdot (3)^4 - (5^4)^4 \cdot (5^4)^4$   
 200  $3 \cdot (5^4 \cdot 5 - 3) - [5 \cdot [10 - (2^4 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 - 14)]] + 2^4 \cdot 3$   
 201  $7^2 \cdot (2^4 \cdot 3 - 5) + [3 + 2 \cdot [(3^4 \cdot 3^4)^2 + 2 \cdot (19 - 3 \cdot 6)]]$   
 202  $2^4 \cdot 3^4 \cdot [(5 \cdot 2^4 + 2^4) - (8 + 3 \cdot 2^4) \cdot (2^4 \cdot 2^4 - 2) - 1] \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$   
 203  $2^4 \cdot 2^4 + [(3 \cdot 2^4 + 2) \cdot 2 - 6 \cdot 2 + (2 \cdot 6 + 1^4 \cdot 7) \cdot (5 + 7) \cdot 14 + 4$   
 204  $2 + 0^4 \cdot (2^4 + 2 \cdot 3 + 7) + (5 \cdot 2^4 + (2^4 \cdot 7^4 \cdot 0) - 2 \cdot 9$   
 205  $(7 + 2 \cdot 5^4) + 3 \cdot [71 - [(2^4 \cdot 3^4 \cdot 6 \cdot 2 - 4) - 3^4] + 5^4 \cdot 5] \cdot 9$   
 206  $[(2 \cdot 3^4 + 4 - 12)^2 \cdot (5 \cdot 4 - 2 \cdot 8 + 2^4 + 2) : (20 : 2 - 3^4 + 1)]^3 \cdot 11$   
**260** s. Dalle potenze ai numeri binari  
 163  $\{[(9^4 \cdot 9^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4) + 2^4 \cdot 7]^2$   
 164  $(6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^4 \cdot 6^4) \cdot (3 \cdot 2^4 + 1^4 \cdot 1^4)$   
 165  $(50 - 7^4 \cdot 7) \cdot (9^4 - 80)^2 \cdot 2^4 \cdot 2^4$   
 166  $[(12 + 3^4 \cdot 5 - (5^4 \cdot 2 - 7^4) - 10 + 5^4 \cdot 5$   
 167  $[2 + 3^4 \cdot 3^4 - (5^4 \cdot 2 - 7^4) - 10 + 5^4 \cdot 5$   
 168  $[(3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 - 2^4) + (10^4 \cdot 10 \cdot 10^4) - (6^4 + 4) - 15] \cdot 10$   
 169  $5 \cdot 6 + [(2^4 \cdot 2^4 - 1^4) + (5^4 \cdot 5^4 \cdot 5) + 2 \cdot 4 - 2^4] \cdot 2 \cdot 3$   
 170  $\{[(2^4 \cdot 2^4 + 5^4 \cdot 5^4) \cdot (3^4 \cdot 3^4 \cdot 6) - 2 \cdot 3] - 10$   
 171  $(5 + 3 + [2^4 \cdot 2^4 - 6 + (5^4 \cdot 5^4 - 15) + 3^4 - 4] + 2) \cdot 3 \cdot 2$   
 172  $6^4 : \{[(5^4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 7 - 2^4 \cdot 2) \cdot 5 + 2^4 \cdot 2] \cdot 2^4$   
 173  $2 \cdot 18 - [5 \cdot 2 + [(3^4 \cdot 5^4 - 2^4 \cdot 3^4) \cdot (3 \cdot 7 - 5 - 7)]] \cdot 5$   
 174  $\{[(8^4)^2 \cdot (8^4)^2 \cdot (8^4)^2] \cdot 9^4 \cdot 6^4\} \cdot [3^4 \cdot (5 \cdot 3 - 48 - 2^4 - 7^4)]$   
 175  $3 \cdot (2 \cdot 2^4 - 3 \cdot [2^4 \cdot 6 - 3 \cdot 2^4 - (3 \cdot 2 \cdot 2 + 1)]) : (3^4 \cdot 3^4 - 6)$   
 176  $\{[(0 \cdot 5) \cdot (13^4 \cdot 13) \cdot (2 \cdot (2 + 5) \cdot 3 - 5^4 \cdot 1) + 2 \cdot 2$   
 177  $2^4 \cdot 7 : [5 \cdot 6 \cdot 5 - (3^4 \cdot 3^4 \cdot 5 - 3^4 \cdot 3 - 2^4) \cdot 7$   
 178  $5^4 - [7 \cdot 5 + 4^4 \cdot 3 - (3^4 \cdot 2^4 + 12^4)] \cdot 7 + 2^4$   
 179  $\{[(3 \cdot 2^4 - 4^4 - 2 + 12) \cdot (6^4 - 3^4 - 2^4)] \cdot 3^4\} \cdot 2^4$   
 180  $\{[(132^4 \cdot 22^4 \cdot 2^4) : (10^4 \cdot 5^4)] \cdot 2^4 - (5^4 \cdot 5) \cdot 5^4$   
 181  $5^4 \cdot 2 \cdot (3^4 - 7 \cdot 5 - 6^4) : [2 + 7^4 \cdot (5^4 \cdot 3^4) \cdot 4]$   
 182  $\{3^4 + 2^4 \cdot 5 \cdot 4^4 : (7 \cdot 8 + 5 \cdot 4)^4 - [3^4 \cdot (3^4)^2] \cdot 17$   
 183  $[2^4 \cdot 2^4 + 3^4 - 4^4 \cdot 4^4 + (2^4 - 3^4 - 2^4 \cdot 3) + 9 + 5^4] \cdot 3^4 + 4$   
 184  $(2^4 - 2^4) : (3 \cdot 7 - 13) - [85 \cdot 5^4 - (3^4 \cdot 2^4 + 2^4) - 0] \cdot 8$   
 185  $\{[(1 + 9^4) \cdot 2 \cdot 6^4] \cdot 5^4 \cdot (5^4)^2 \cdot (2^4)^2$   
 186  $(6 + 2^4 \cdot 3) : [2^4 \cdot 3 - (4 \cdot 7 - 10 - 3^4) - (9^4 \cdot 4^4 \cdot 12^4 \cdot 3^4)$   
 187  $\{[(3^4 + 4^4 - (5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4))^4 \cdot (3^4)^4] + 7^4 \cdot [(2^4)^4] \cdot 4^4$   
 188  $\{[(9 + 5^4 - 3^4) \cdot (3^4 - 2^4)]^4 : (8^4 - 7^4 - 2^4 - 9^4) + 3^4\} \cdot (3^4 + 1)$   
 189  $\{(8^4)^4 : [(8^4)^4] \cdot [(8^4)^4] + [(2^4)^4] \cdot [(2^4)^4] \cdot [(2^4)^4] \cdot [(2^4)^4]\} \cdot (4^4)^4$   
 190  $(2^4 \cdot 2^4 - 2) + 4 : [6 \cdot 4 : [(5 \cdot 3^4 \cdot 3) : 2]] + 2^4 \cdot 5^4 \cdot 10$   
 191  $\{[(5^4 + 4 \cdot 2^4) \cdot 2^4 \cdot 2^4 - 3] - (3 + 2^4 - 3^4) + 2^4 \cdot 3^4 \cdot 6^4$   
 192  $[2 + 3^4 \cdot 3^4 - (5^4 \cdot 2 - 7^4)] \cdot 10 + [(3 \cdot 3 - 1 - 2^4) + (2^4 - 1^4)]$   
 193  $\{[(4^4 + 2^4 \cdot 2^4) \cdot (2 \cdot 10 - 8) - (2^4 \cdot 2^4 - 2^4 \cdot 15) + 3]^2 \cdot 5 \cdot 2^4$   
 194  $\{[(5^4 - 2^4 \cdot 2^4) \cdot (3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4) - (2^4)^4 + 3] \cdot (25^4 \cdot 5)$   
 195  $\{[(4 \cdot 2^4 \cdot (15 \cdot 5^4) + (12^4 \cdot 6^4)) - (4^4)^4] : [2^4 \cdot (2^4 \cdot (3^4 \cdot 2))$   
 196  $(16^4 \cdot 4^4) \cdot (8^4 \cdot 4)^4 + \{[(6^4 \cdot 6^4) \cdot (3^4)^4 - 9^4] \cdot (4^4 \cdot 4^4)$   
 197  $(5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 - [42 - (3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 3^4) - (2^4 \cdot 5^4)] \cdot (2^4)^2$

**254** s. Dalle potenze ai numeri binari

51  $2^4 \cdot 3 \cdot 3^2 - (5 \cdot 2^4 - 2^4 \cdot 3^2) + 3 \cdot (2 \cdot 3^2 - 2^4)$   
 52  $(2^4 + 3^4 - 5^4) + (3^2 + 6^2 \cdot 2^4 - 3^2) : (9^2 + 3 - 2^4 \cdot 3^2)$   
 53  $(3^2 + 1) : 5 + [2 \cdot 3^2 - (2 \cdot 5 - 2^4)] : 2^2 + 2^2$   
 54  $\{[(3 \cdot 4^4 + 1 - 9 \cdot 5^4) + 2 \cdot 3^2] - 2 - 10\} + 20$   
 55  $\{[(1 + 3 \cdot 2 - 5) + (3^2 + 3^3 - 1) + 2^4 + 3] - 17\} : 13$   
 56  $[226 - 15 \cdot (2^4 \cdot 5 - 3^4 + 2)] \cdot 3 - 2 \cdot (5 - 15 : 3)$   
 57  $(5 \cdot 2^4 + 2^4 \cdot 5 - 3^4 \cdot 2) + [39 - (2^4 \cdot 3 - 2^4 - 3) - 10]$   
 58  $2^4 \cdot 3 \cdot [2 \cdot 7 - (3^2 \cdot 2 - 2^4)] + (5 + 2^4 \cdot 5 + 7 - 2)$   
 59  $2^4 \cdot 5^2 - [2^4 \cdot 3 + 5 \cdot [21 - (5^2 - 5 \cdot 2^4) : 5] - 3^4] - 1$   
 60  $\{[(3 \cdot 3 - 2 \cdot 5^2) : 5 + 3^4] : 7 + 9 : 3^4\} + 5 + 1$   
 61  $2 + 0 : (2^4 + 3 \cdot 5 - 3^4) - [2^4 \cdot 5 + (2^4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 0) - 2 \cdot 3^4]$   
 62  $(2^4 \cdot 5 + 2) + 3^4 \cdot 2 : \{6^2 : [2^4 \cdot 6 : (4 + 10^2 : 5^2) + 3] - 5 \cdot 1\}$   
 63  $(2^4 \cdot 5^2 + 10^2 - 6 \cdot 7) - [7 \cdot 2^4 - (4^4 \cdot 8 - 1) \cdot 2^4 - 3 \cdot 4] \cdot 3^2 - 5$   
 64  $2 + 3 : \{5 + 1 - 2^4 : [12 - 7 - 6 : (3^4 - 8 + 1)] - 2 + 1\} + (3^4 - 2^4 + 1)^2$   
 65  $(3^4 \cdot 2^4 : 4 + 7^2) : [(2^4 \cdot 5^4 - 2^4 + 2) : 12]^2 - \{5 + [(56 : 2^4 + 1) + 3]^2\} \cdot 2^4$   
 66  $\{[4 \cdot 3^4 + (5^4 \cdot 2^4 - 25 \cdot 2^4)] : [(2^4 \cdot 3 + 5^4 \cdot 3 \cdot 2^4) : 3^4] - \{[(6 + 2^4) - (20 : 5)] + [(2^4 + 3 + 5) - 5]\}$   
 67  $\{(3^4 - 21) : 6 + 2 \cdot [5 + 2 \cdot (2^4 \cdot 3 - 2 \cdot 6) + 2^4] + 2\} : \{[(6 \cdot 2^4) - (20 : 5)] + 5 + 3^4\} : 7 + 3$   
 68  $\{[(2^4 - 5 \cdot 2) + 3] : 3 + 2 \cdot (2^4 \cdot 5 - 3^4) - 5^4\} + \{2 \cdot [(6 \cdot 5 - 3^4) : (2^4 : 4 + 3)] - (12^4 : 6 : 12)^2\}$   
 69  $\{[(5^4 - 3 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 7 - 3^4 \cdot 2^4) + 5 \cdot (3^4 \cdot 2^4 - 17 \cdot 2^4)] : \{[(2^4 \cdot 3 \cdot 7 + 12 \cdot 9) : 2^4 + 3 \cdot 5 \cdot 2^4] : 12 + 10\}^2$

**3 Le proprietà delle potenze** teoria pag. 64

- ✗ Il **prodotto di due o più potenze aventi la stessa base** è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti;
- ✗ il **quoziente di due o più potenze aventi la stessa base** è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti;
- ✗ la **potenza di una potenza** è uguale ad una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti;
- ✗ il **prodotto di due o più potenze aventi lo stesso esponente** è uguale ad una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente;
- ✗ il **quoziente di due potenze aventi lo stesso esponente** è uguale ad una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

**Comprensione della teoria**

70 Quanto vale il prodotto  $3^4 \cdot 3^{2^4}$ ?  
 a.  $3^6$ ;      b.  $3^8$ ;      c.  $3^7$ ;      d.  $3^2$ .

71 Quanto vale il quoziente  $5^3 : 5^{1^4}$ ?  
 a.  $5^8$ ;      b.  $5^{13}$ ;      c. 5;       d.  $5^2$ .

72 Quanto vale la potenza  $(4^3)^2$ ?  
 a.  $4^5$ ;      b.  $4^6$ ;      c.  $4^8$ ;      d.  $4^9$ .



# La presenza di *esercizi* nei libri di testo

Il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado, in tutti i suoi indirizzi, ha per la matematica una protagonista indiscussa: l'algebra. Anche se le Indicazioni Nazionali per i Licei e le Linee Guida per l'istruzione Tecnica e Professionale hanno messo in evidenza la ricchezza di contenuti e di relazioni tra i diversi ambiti previsti dal curriculum di matematica di questi due anni, non c'è dubbio che nella pratica, nei libri di testo, nelle verifiche interne l'esercizio di algebra sia una delle attività che impegnano più tempo del docente e degli allievi. **Solo per fare un esempio, uno dei libri di testo più diffusi in Italia propone, nel solo modulo sul calcolo letterale, oltre 2000 esercizi.**



D24. L'espressione  $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$  si può scrivere come:

A.   $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$  ■ Risposta A 34.3%

B.   $\frac{a^4 + 1}{a^2}$  ■ Risposta B 8.9%

C.   $a^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2$  ■ Risposta C 32%

D.   $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2}$  ■ Risposta D 22.3%

■ Risposte corrette 34.3%   ■ Risposte errate 63.2%  
■ Risposte Mancate 2.6%

D10. Qual è la metà del numero  $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$  ?

- A.  $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$
- B.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$  **59,2%**
- C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$
- D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

**Risultati in Italia**

Item	Mancata risposta	OPZIONI			
		A	B	C	D
D10	1,0	19,8	59,2	12,1	8,0

E11. La decima parte di  $10^{20}$  è

- A.   $10^{10}$  ■ Risposta A 30.9%
- B.   $1^{20}$  ■ Risposta B 25%
- C.  100 ■ Risposta C 15%
- D.   $10^{19}$  ■ Risposta D 26.2%

■ Risposte corrette 26.2% ■ Risposte errate 70.9%

■ Risposte Mancate 2.8% ■ Altre non valide. 0.1%

E11. La decima parte di  $10^{20}$  è

- A.   $10^{10}$
- B.   $1^{20}$
- C.  100
- D.   $10^{19}$

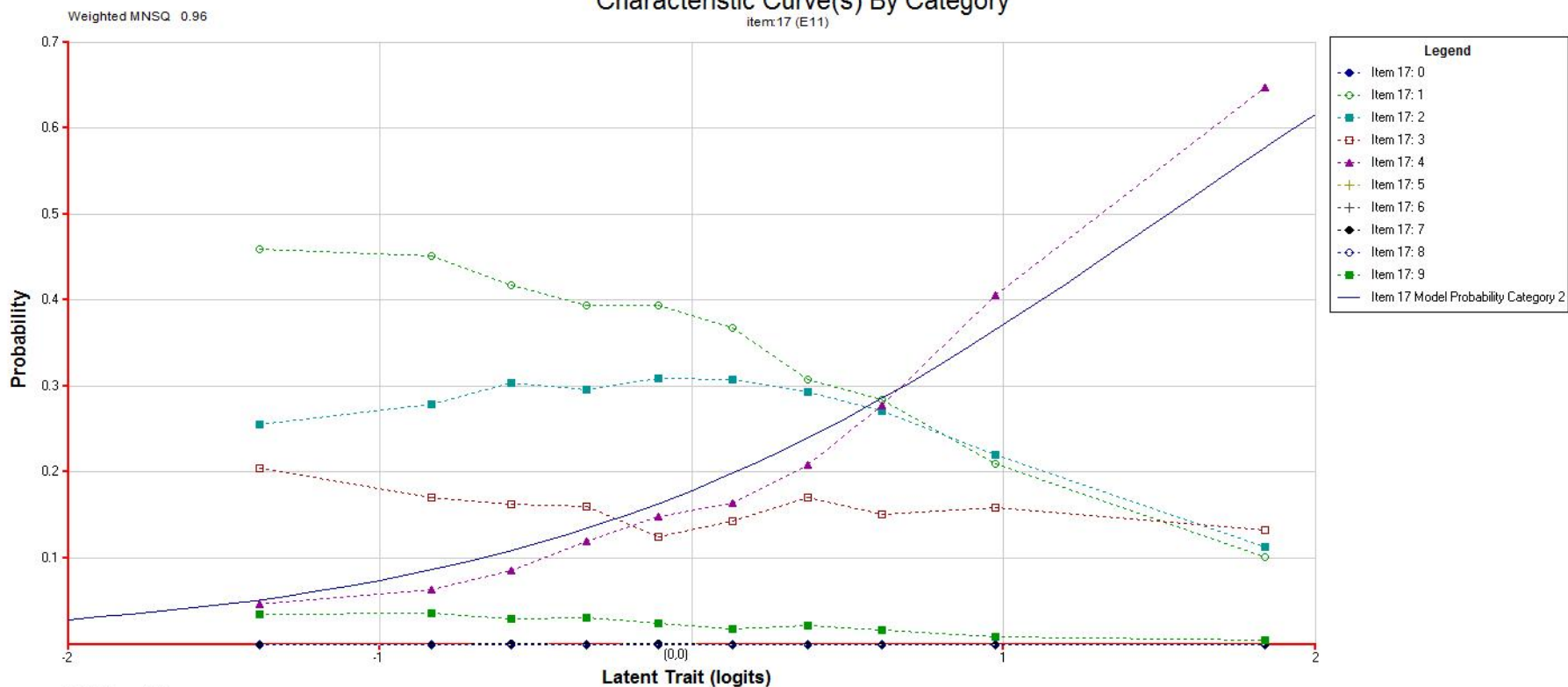


SERVIZIO NAZIONALE DI VALUTAZIONE 2012

SNV  
2012

Grado 8  
2012

Characteristic Curve(s) By Category





**Q.3** Qual è la terza parte del numero  $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$  ?

A.  $\left(\frac{1}{9}\right)^{10}$

B.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{31}$

C.  $\left(\frac{1}{9}\right)^{30}$

D.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$  **48,1%**

Solo  $\frac{1}{4}$  degli studenti (al termine della scuola secondaria di secondo grado o al primo anno di università) fornisce la risposta corretta.

Answer A	Answer B	Answer C	Answer D
13.7%	25.9%	12.3 %	48.1%

Ferretti, F., & Gambini, A. (2017). A vertical analysis of difficulties in mathematics by secondary school to level; some evidences stems from standardized assessment. Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education, Dublin (Ireland).



D24. La radice quadrata di  $64^{2016}$  è

- A.   $8^{2014}$  ■ Risposta A 13.3%
- B.   $8^{1008}$  ■ Risposta B 49.6%
- C.   $64^{2014}$  ■ Risposta C 6.2%
- D.   $64^{1008}$  ■ Risposta D 26.4%

■ Risposte corrette 26.4%   ■ Risposte errate 69.1%  
■ Risposte Mancate 4.5%

#### Descrizione e commento

**Risposta corretta: D**

La domanda richiede di padroneggiare l'uso delle proprietà delle potenze.

Gli studenti possono rispondere osservando che

$64^{2016} = (64^{1008})^2$ , quindi  $\sqrt{(64^{1008})^2} = 64^{1008}$ .

Oppure, se la conoscono, possono utilizzare la rappresentazione delle radici come potenze a esponenti razionali.

## La gestione delle rappresentazioni semiotiche

# APPRENDIMENTO O GESTIONE DELLE TRASFORMAZIONI SEMIOTICHE

riguarda le *rappresentazioni e coinvolge direttamente la capacità di passare da una forma all'altra, da un registro all'altro di rappresentazione dello stesso concetto*

Es:

Saper passare da un grafico a una tabella, o da una espressione algebrica ad una geometrica ...





Mentre per un insegnante l'oggetto è unico e le rappresentazioni diverse ma tutte equivalenti, le cose non stanno così per gli studenti.



# Esempio

Per esempio, rappresentiamo in diversi registri il concetto che formalizza l'idea di dividere a metà un intero, cioè l'oggetto matematico "metà":

- *la lingua comune: un mezzo, la metà, ...*
- *la lingua aritmetica:*  $1/2$ ,  $2/4$ ,  $7/14$ ... (scrittura frazionaria);  $0,5$  (scrittura decimale);  $5 \times 10^{-1}$  (scrittura esponenziale);  $50\%$  (scrittura percentuale); ...
- *la lingua algebrica:* (scrittura insiemistica)  $\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid 2x - 1 = 0\}$   
 $y=f(x): x \rightarrow x/2$  (scrittura funzionale), ...
- *il linguaggio figurale:*   $0,4\bar{9}$
- *schemi pittografici:* 

Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra nello stesso registro semiotico si chiama "trasformazione di trattamento":



Il passaggio da una rappresentazione semiotica ad un'altra in un altro registro semiotico si chiama "trasformazione di conversione":



Numerosi studi di Raymond Duval

# Esempio: la retta

- *Rappresentazione simbolica*
- *Rappresentazione cartesiana*
- *Rappresentazione algebrica*
- *Rappresentazione tabulare*
- *Rappresentazione parametrica*
- *Rappresentazione come luogo geometrico*
- *Rappresentazione come funzione lineare*

Ogni rappresentazione è più o meno adatta all'età dello studente.

La costruzione di un oggetto matematico può avvenire lungo l'intero iter scolastico, nessun oggetto matematico si considera definitivamente costruito nella scuola primaria, verrà comunque ripreso e ampliato.



Per esempio il segno = il più delle volte NON rappresenta l'oggetto matematico relazionale "uguaglianza" (relazione binaria di equivalenza, riflessiva simmetrica transitiva), ma invece assume le caratteristiche di un **simbolo procedurale** (fa, viene, dà); l'uguaglianza è riflessiva, simmetrica e transitiva, ma = a scuola non lo è.

### Esempio:

Un cartolaio acquista 6 scatole di colori, ciascuna delle quali contiene 12 colori; un colore costa 1,2 €. Quanto spende in tutto?

Risposta  
attesa:

$$6 \times 12 = 72$$

$$72 \times 1,2 = 86,4$$

Risposta ottenuta:

$$6 \times 12 = 72 \times 1,2 = 86,4$$

poiché = è transitivo, avremmo che  $6 \times 12 = 86,4$

= è interpretato in senso procedurale

Di fronte all'equazione lineare:  $3=x-2$ , lo studente trasforma (trattamento) in:  $-x=-2-3$ ; ma se  $=$  è simmetrico, non occorre cambiare segno; anzi, se è simmetrico, non occorre neppure portare la  $x$  al I membro. Si avrebbe:  $3+2=x$ , cioè  $5=x$ .

Ma nessuno studente accetterebbe la scrittura finale  $5=x$  come soluzione di una equazione ...  
E un insegnante?

$11-6=\dots-11$

Molti studenti inseriscono 5 o 6 giustificando che  $11-6$  fa 5.

A volte gli alunni accettano facilmente  $4+6=10$ , ma sono molto perplessi di fronte a scritture come  $10=4+6$ .

$8+2=7+3$  per lo studente non è sempre vero...  $8+2=7$

Camici C., Cini A., Cottino L., Dal Corso E., D'Amore B., Ferrini A., Francini M., Maraldi A.M., Michelini C., Nobis G., Ponti A., Ricci M., Stella C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 25, 3, 255-270.

D11. Osserva il riquadro:

$$17 + 46 = 60 + 3$$

Perché quello che è scritto nel riquadro è corretto?

- A. Perché ci sono due numeri a destra e due a sinistra del segno di uguale ■ Risposta A 17.6%
- B. Perché il risultato della prima addizione è uguale al risultato della seconda addizione ■ Risposta B 26.8%
- C. Perché 60 è il risultato di  $17 + 46$  ■ Risposta C 50.1%

# Altri fenomeni inerenti a difficoltà diffuse di apprendimento delle potenze



- Somministrata in modo censuario sul territorio nazionale (600 mila studenti)
- Campione rappresentativo di 43'458 studenti



Età della Terra  
La domanda  
della Terra

## La domanda "Età della Terra"

Servizio nazionale di valutazione 2010-11



**D5. L'età della Terra è valutata intorno ai  $4,5 \times 10^9$  anni. L'Homo Erectus è comparso circa  $10^6$  anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?**

- A.  $4,5 \times 10^9$  anni
- B.  $3,5 \times 10^9$  anni
- C.  $4,5 \times 10^6$  anni
- D.  $4,5 \times 10^3$  anni

**Percentuale di risposte  
corrette in Italia: 10.21%**

Ferretti, F., & Bolondi, G. (2019). This cannot be the result! The didactic phenomenon 'the age of the earth'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-14.





## La domanda Età della Terra

**D5.** L'età della Terra è valutata intorno ai  $4,5 \times 10^9$  anni. L'Homo Erectus è comparso circa  $10^6$  anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

- A.  $4,5 \times 10^9$  anni ■ Risposta A 10.2%
- B.  $3,5 \times 10^9$  anni ■ Risposta B 6.9%
- C.  $4,5 \times 10^6$  anni ■ Risposta C 23.2%
- D.  $4,5 \times 10^3$  anni ■ Risposta D 57%

**Più della metà degli studenti ha scelto il distrattore D.**

## Clausola di Contratto Didattico: Delega Formale



La domanda  
Età della Terra

Le prime interpretazioni del fenomeno evidenziato dalla domanda Età della Terra hanno collegato il comportamento degli allievi genericamente a effetti di contratto didattico nel senso di Brousseau

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai  $4,5 \times 10^9$  anni. L'Homo Erectus è comparso circa  $10^6$  anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

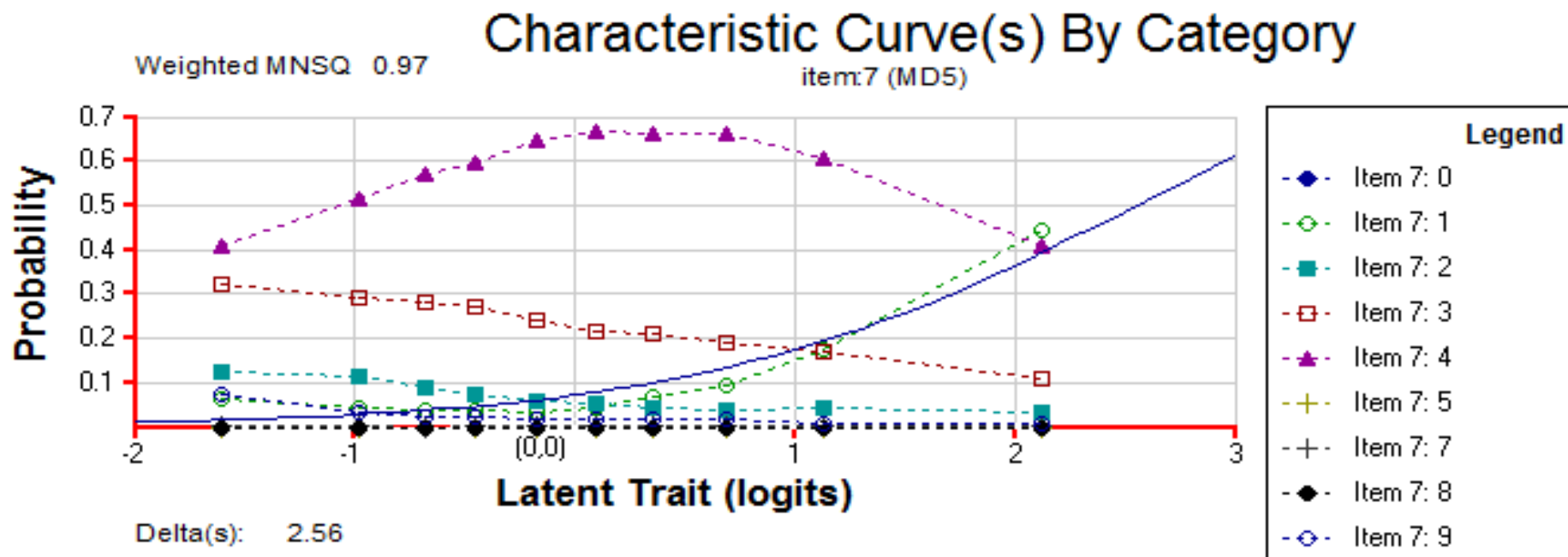
- A.  $4,5 \times 10^9$  anni
- B.  $3,5 \times 10^9$  anni
- C.  $4,5 \times 10^6$  anni
- D.  $4,5 \times 10^3$  anni

$$9 - 6 = 3$$



La domanda  
Età della Terra

Il distrattore D (**linea Item 7.4**) (in cui l'esponente della potenza è ottenuto per sottrazione degli esponenti delle potenze presenti nella consegna) è preferito a tutti i livelli di competenza e la scelta di tale distrattore è massima per gli allievi situati nella parte medio-alta della scala del *carattere latente*.



## Situazione analoga nelle Prove SNV- INVALSI 2013

**D6.** Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa  $m_p$  è all'incirca  $2 \cdot 10^{-27}$  kg, e un elettrone la cui massa  $m_e$  è all'incirca  $9 \cdot 10^{-31}$  kg.  
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè  $m_p + m_e$ )?

- |    |                                     |                        |  |
|----|-------------------------------------|------------------------|--|
| A. | <input checked="" type="checkbox"/> | $2 \cdot 10^{-27}$ kg  | <span style="color: green;">■</span> Risposta A 18%    |
| B. | <input type="checkbox"/>            | $11 \cdot 10^{-31}$ kg | <span style="color: pink;">■</span> Risposta B 9.4%    |
| C. | <input type="checkbox"/>            | $11 \cdot 10^{-58}$ kg | <span style="color: olive;">■</span> Risposta C 33.3%  |
| D. | <input type="checkbox"/>            | $18 \cdot 10^{-58}$ kg | <span style="color: purple;">■</span> Risposta D 33.3% |

**Percentuale di risposte  
corrette in Italia: 17.89%**

## Clausola di Contratto Didattico: Delega Formale

D6. Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa  $m_p$  è all'incirca  $2 \cdot 10^{-27}$  kg, e un elettrone la cui massa  $m_e$  è all'incirca  $9 \cdot 10^{-31}$  kg.  
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè  $m_p + m_e$ )?

A.   $2 \cdot 10^{-27}$  kg

B.   $11 \cdot 10^{-31}$  kg

C.   $11 \cdot 10^{-58}$  kg

D.   $18 \cdot 10^{-58}$  kg

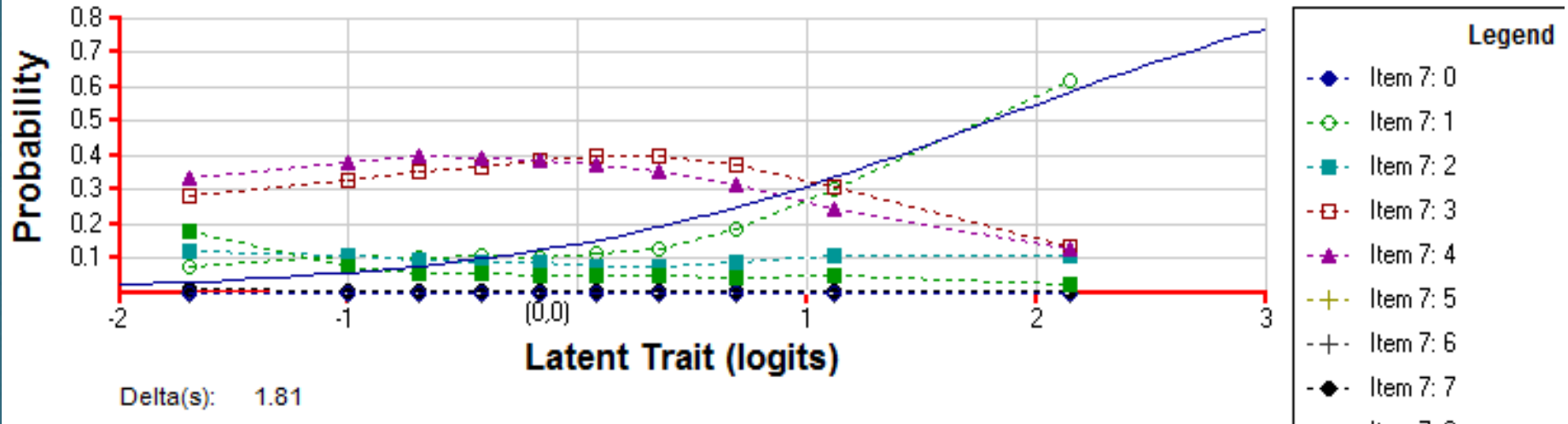
$-27 - 31 = -58$



## Characteristic Curve(s) By Category

Weighted MNSQ 1.00

item:7 (M6)



I distrattori C (**linea Item 7.3**) e D (**linea Item 7.4**) in cui l'esponente della potenza è ottenuto per somma degli esponenti delle potenze presenti nel testo, sono i più scelti a livello nazionale (più del 30% di scelte ciascuno) e sono i preferiti dagli allievi a quasi tutti i livelli di competenza.

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai  $4,5 \times 10^9$  anni. L'Homo Erectus è comparso circa  $10^6$  anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

- A.  $4,5 \times 10^9$  anni **10.21%**
- B.  $3,5 \times 10^9$  anni
- C.  $4,5 \times 10^6$  anni
- D.  $4,5 \times 10^3$  anni

D6. Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa  $m_p$  è all'incirca  $2 \cdot 10^{-27}$  kg, e un elettrone la cui massa  $m_e$  è all'incirca  $9 \cdot 10^{-31}$  kg. Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè  $m_p + m_e$ )?

- A.   $2 \cdot 10^{-27}$  kg **17.89%**
- B.   $11 \cdot 10^{-31}$  kg
- C.   $11 \cdot 10^{-58}$  kg
- D.   $18 \cdot 10^{-58}$  kg

Al di là di questi fenomeni, *delega formale, egf, mancanza di controllo semantico*, osserviamo un fatto:

in entrambi i casi la risposta corretta è uno dei dati esplicitamente presenti nel testo della domanda.

**Dall'analisi dei risultati a livello nazionale  
è emerso un NUOVO FENOMENO**



Ulteriori approfondimenti:

- l'effetto indagato si manifesta anche in altri gradi scolastici?
- quali caratteristiche?
- c'è bisogno di altre lenti teoriche?

**E21. Osserva questa moltiplicazione:**

$$17 \cdot 36 = 612$$

**Grado 8  
2012**

**Ora scrivi il risultato delle seguenti moltiplicazioni.**

<b>a.</b>	$17 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$
<b>b.</b>	$17 \cdot 0,36 = \dots\dots\dots$
<b>c.</b>	$1,7 \cdot 360 = \dots\dots\dots$
<b>d.</b>	$1,7 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$

L'item *c*, in cui il risultato è uguale al risultato dell'operazione contenuta nello stimolo, ottiene un risultato sensibilmente inferiore agli altri.

**Grado 8  
2012**

$$17 \cdot 36 = 612$$

a.	$17 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$
b.	$17 \cdot 0,36 = \dots\dots\dots$
c.	$1,7 \cdot 360 = \dots \mathbf{612} \dots\dots\dots$
d.	$1,7 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$

Domanda E21	Item <i>a</i>	Item <i>b</i>	Item <i>c</i>	Item <i>d</i>
Errata	13,5	23,1	29,2	18,4
<b>Corretta</b>	79,6	67,8	60	70,8
Non valida	0,1	0,1	0,1	0,1
Non raggiunta	0,4	0,4	0,4	0,4
Mancante	6,4	8,6	10,2	10,2



# Lenti teoriche?

**Effetto osservato: effetti "Età della Terra"**

In una situazione didattica, di fronte a una consegna gli allievi tendono a non accettare un output che non sia identificabile chiaramente con qualcosa di distinto dall'input di partenza.

**Principio regolativo da cui sembra dipendere**

Il risultato di una problema o di una operazione, in matematica, non può essere uguale al dato di partenza.

# Mixed-method research

## ➤ Prima Fase

- preparati, validati, somministrati e analizzati dei questionari

## ➤ Seconda Fase

- Analisi dei protocolli
- Interviste mirate a piccoli gruppi di allievi che avevano risposto al questionario
- Interviste individuali a studenti del livello 10

**ANALISI  
QUANTITATIVE  
E QUALITATIVE**

# I questionari

VERSIONE A. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa  $10^{54}$ . La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in  $10^{28}$ , che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

- a)  $10^{54}$
- b)  $10^{33}$
- c)  $10^{28}$
- d)  $10^{26}$

**Diverso controllo  
semantico**

VERSIONE B. La massa del pianeta Marte è stimata in circa  $6,4 \times 10^{26}$  g. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce con una massa di circa  $10^5$  g, che ha portato sulla terra. Quant'è, all'incirca, la massa di Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

- a)  $6,4 \times 10^{26}$  g
- b)  $5,4 \times 10^{26}$  g
- c)  $6,4 \times 10^5$  g
- d)  $6,4 \times 10^{21}$

# I questionari

TUTTI I  
QUESTIONARI

## La domanda 0-virgola

### Domanda Schermo

Esegui le seguenti moltiplicazioni:

$2,5 \times 32 = \dots\dots\dots$

$1,9 \times 4,1 = \dots\dots\dots$

$2,5 \times 320 = \dots\dots\dots$

$19 \times 0,41 = \dots\dots\dots$

$25 \times 0,32 = \dots\dots\dots$

$1,9 \times 41 = \dots\dots\dots$

$2,5 \times 3,2 = \dots\dots\dots$

$1,9 \times 410 = \dots\dots\dots$

Eliminare interferenze nei risultati, dovute a scarsa padronanza del meccanismo di moltiplicazione con numeri decimali e con 0 finali.

- "tipologia A" gli allievi che hanno risposto correttamente ad almeno 7 di questi 8 item
- "tipologia A+" gli allievi che hanno risposto correttamente a tutti e 8 gli item.

# I questionari

## *La domanda 0-virgola*

Sapendo che  $34 \times 33 = 1122$ , determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

a)  $34 \times 3,3 = \dots\dots\dots$

b)  $34 \times 0,33 = \dots\dots\dots$

c)  $3,4 \times 330 = \dots\dots\dots$

d)  $3,4 \times 33 = \dots\dots\dots$

e)  $0,34 \times 3300 = \dots\dots\dots$

**Gradi 8-10-11**

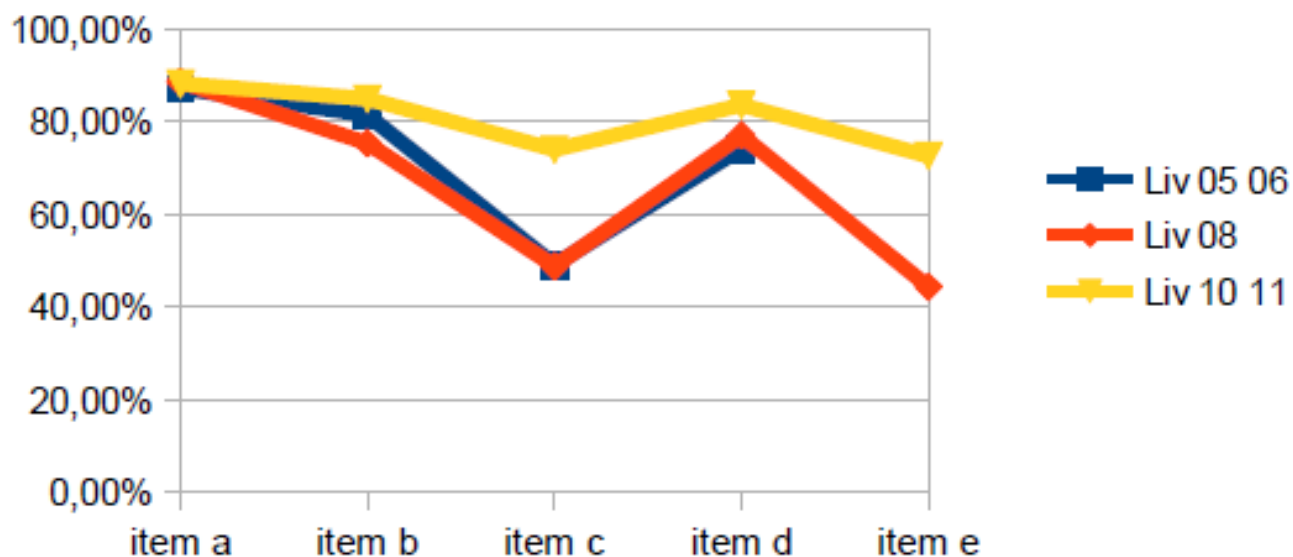


# I questionari

## *La domanda 0-virgola*

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	87,04%	81,38%	48,99%	74,09%	
Liv 08	88,50%	75,22%	48,67%	76,99%	44,25%
Liv 10 11	88,07%	84,86%	73,85%	83,49%	72,48%

% of correct answers for the whole population



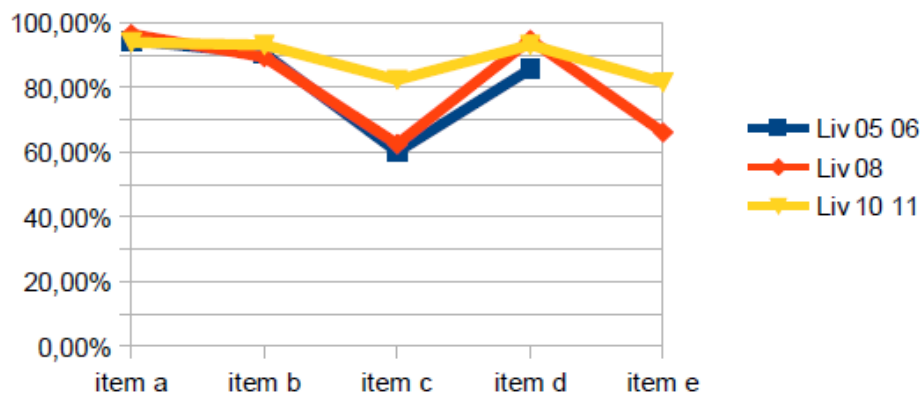
# I questionari

## La domanda 0-virgola

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	94,40%	90,40%	60,00%	85,60%	
Liv 08	96,43%	89,29%	62,50%	94,64%	66,07%
Liv 10 11	93,85%	93,08%	82,31%	93,08%	81,54%

- oltre il 30% sbaglia almeno uno degli item c ed e
- il 22% sbaglia solo uno di questi due.

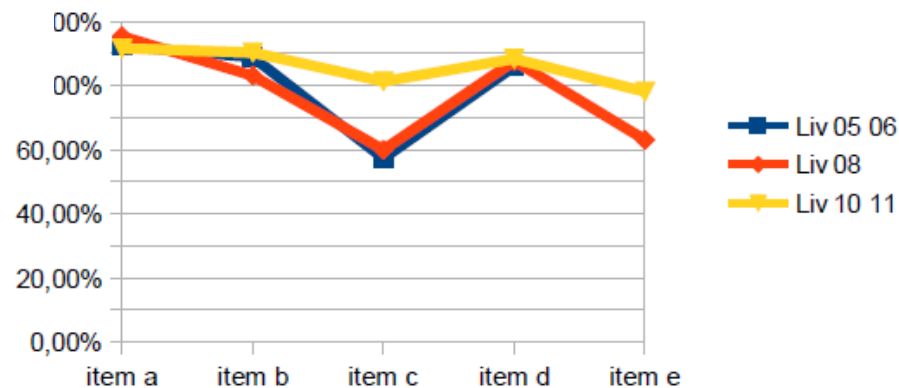
% of correct answers for Tipology A students



Tra gli allievi che sbagliano almeno un item di questa domanda, oltre il 90% sbaglia proprio uno degli item c o e o entrambi.

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	92,31%	88,81%	57,34%	86,01%	
Liv 08	95,38%	83,08%	60,00%	87,69%	63,08%
Liv 10 11	91,61%	90,32%	81,29%	88,39%	78,06%

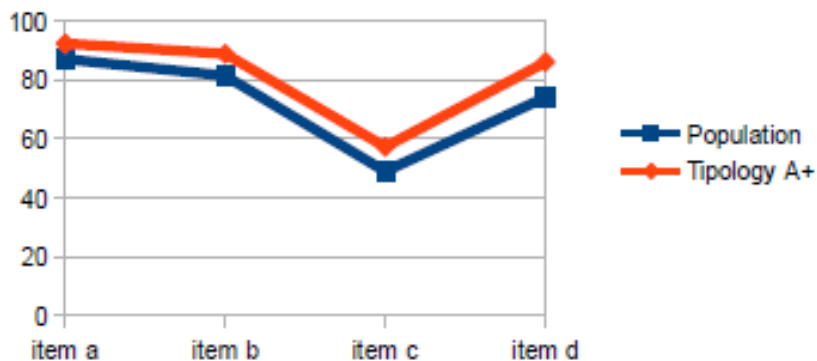
% of correct answers for Tipology A+ students



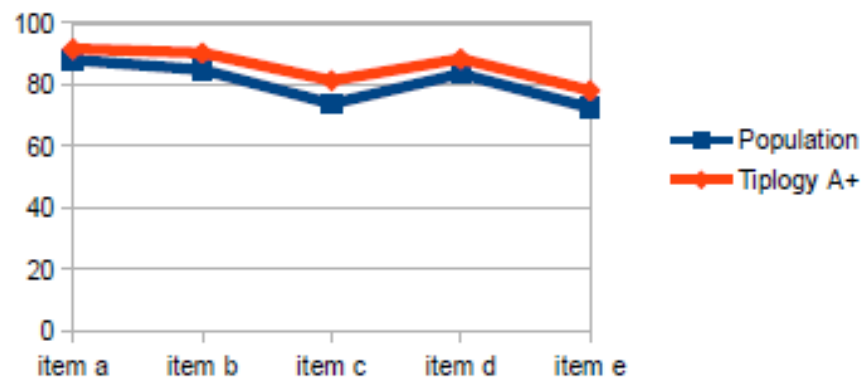
# I questionari

## *La domanda 0-virgola*

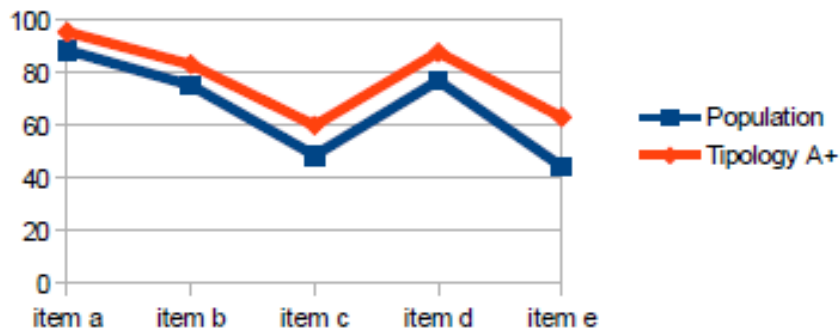
% of correct answers, level 05/06, Population vs Tipology A+



% of correct answers, level 10/11, Population vs Tipology A+



% of correct answers, lev 08, Population vs Tipology A+



# Analisi dei protocolli

## La domanda 0-virgola

8. Sapendo che  $34 \times 33 = 1122$ , determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

1 a)  $34 \times 3,3 = \dots 112,2 \dots$

1 b)  $34 \times 0,33 = \dots 11,22 \dots$

0 c)  $3,4 \times 330 = \dots 11220 \dots$

1 d)  $3,4 \times 33 = \dots 112,2 \dots$

0 e)  $0,34 \times 3300 = \dots 11220 \dots$

n° 1001



# Analisi dei protocolli

## La domanda 0-virgola

8. Sapendo che  $34 \times 33 = 1122$ , determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

1 a)  $34 \times 3,3 = \dots 112,2 \dots$

0 b)  $34 \times 0,33 = \dots 10,62 \dots$

9 c)  $3,4 \times 330 = \dots$

1 d)  $3,4 \times 33 = \dots 112,2 \dots$

9 e)  $0,34 \times 3300 = \dots$

n° 229



# Analisi dei protocolli

## La domanda 0-virgola

7. Sapendo che  $34 \times 33 = 1122$ , determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

↑ a)  $34 \times 3,3 = \dots\dots\dots 112,2 \dots\dots\dots$

↑ b)  $34 \times 0,33 = \dots\dots\dots 11,22 \dots\dots\dots$

↑ c)  $3,4 \times 330 = \dots\dots\dots 1122 \dots\dots\dots$

↑ d)  $3,4 \times 33 = \dots\dots\dots 112,2 \dots\dots\dots$

↑ e)  $0,34 \times 3300 = \dots\dots\dots 1122 \dots\dots\dots$

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 330 \\ \times 3,4 \\ \hline 1320 \\ 9900 \\ \hline 11220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3300 \\ \times 0,34 \\ \hline 13200 \\ 99000 \\ \hline 112200 \end{array}$$

n° 218



# Analisi dei protocolli

## La domanda 0-virgola

8. Sapendo che  $34 \times 33 = 1122$ , determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

1 a)  $34 \times 3,3 = \dots 112,2 \dots$

1 b)  $34 \times 0,33 = \dots 11,22 \dots$

1 c)  $3,4 \times 330 = \dots 1122,0 \dots$

1 d)  $3,4 \times 33 = \dots 112,2 \dots$

1 e)  $0,34 \times 3300 = \dots 1122 \dots$

~~330~~  
~~34~~  
~~=~~  
~~1122~~  
~~0~~  
~~=~~

330 -  
3,4 =  
-----  
1120 +  
9900 =  
-----  
11220

~~3300~~  
~~34~~  
~~=~~  
~~112200~~  
~~0~~  
~~=~~

3300 .  
9,34 =  
-----  
112000 +  
990000 +  
000000 =  
-----  
112200

n° 1061



# Analisi dei protocolli

## Domanda "Massa del pianeta Marte"

6. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa  $10^{54}$ . La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in  $10^{28}$ , che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a)  $10^{54}$

b)  $10^{33}$

c)  $10^{28}$

~~d)  $10^{26}$~~

54  
- 28  
---  
26

n° 184



# Analisi dei protocolli

## Domanda "Massa del pianeta Marte"

5. La massa del pianeta Marte è stimata in circa  $6,4 \times 10^{26}$  g. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce con una massa di circa  $10^5$  g, che ha portato sulla terra. Quant'è, all'incirca, la massa di Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a)  $6,4 \times 10^{26}$  g

b)  $5,4 \times 10^{26}$  g

c)  $6,4 \times 10^5$  g

d)  $6,4 \times 10^{21}$  g

$$m = 6,4 \cdot 10^{26} \text{ g}$$

$$m = 10^5 \text{ g}$$

↓

$$6,4 \cdot 10^{26} - 10^5 = 10^5 (6,4 \cdot 10^{21})$$

n° 153



# Analisi dei protocolli

## Domanda "Massa del pianeta Marte"

6. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa  $10^{54}$ . La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in  $10^{28}$ , che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a)  $10^{54}$

b)  $10^{33}$

c)  $10^{28}$

d)  $10^{26}$



$$\begin{array}{r} 54 - \\ 28 = \\ \hline 26 \end{array}$$

n° 1024



# Analisi dei protocolli

## Domanda "Massa del pianeta Marte"

5. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa  $10^{54}$ . La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in  $10^{28}$ , che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

No ~~a~~  $10^{54}$

b)  $10^{33}$

c)  $10^{28}$

~~d~~  $10^{26}$

$$10^3 - 10^2 = 900$$

$$2^4 - 2^3 - 2^2$$

n°219



# Analisi delle interviste

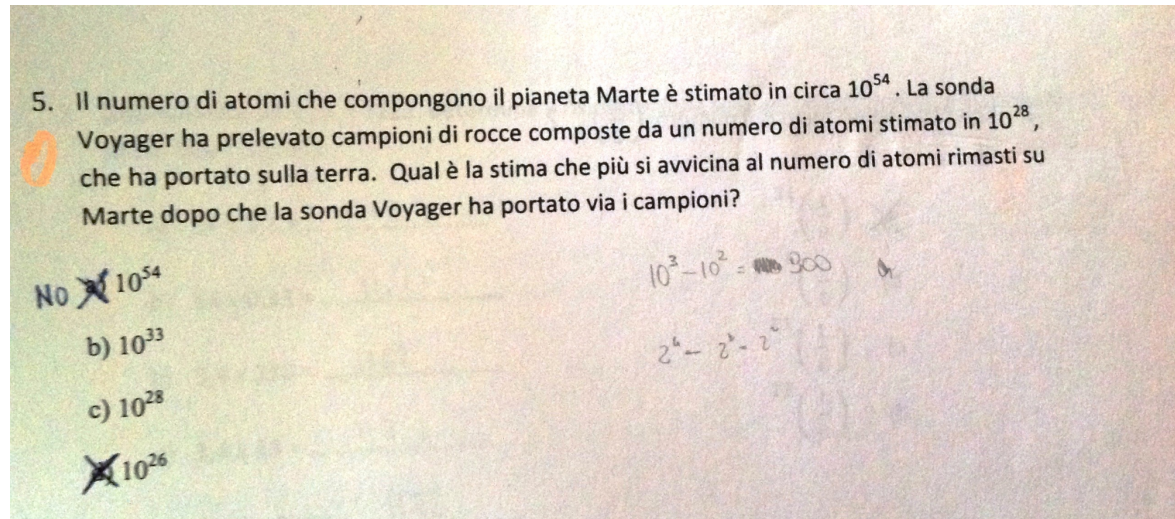
## ➤ Seconda Fase

- Interviste mirate a piccoli gruppi di allievi che avevano risposto al questionario
- Interviste individuali a studenti del grado 10

# Analisi delle interviste

## ➤ Seconda Fase

- Interviste mirate a piccoli gruppi di allievi che avevano risposto al questionario



Innanzitutto questa domanda qui è stata una domanda un po' particolare perché **non ho capito se era una domanda trabocchetto o no** perché quando ho letto che la sonda aveva prelevato una quantità di atomi pari a  $10^{28}$ , ho pensato che comunque ho messo inizialmente la risposta A perché **il numero generale di atomi del pianeta non cambiava poi invece ho capito che era una domanda mmm prettamente matematica perciò ho applicato le proprietà delle potenze perciò ho fatto  $10^{54}$  [...] all'inizio ne avevo fatto una questione fisica.**

St\_219

# Analisi delle interviste

ABITUDINI PRATICHE  
DIDATTICHE

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

19 S10\_07: Penso che sia perché siamo abituati ad avere più un'espressione in cui è difficile che il risultato venga come nel testo, è una cosa quasi impossibile, penso che il risultato di una espressione o un'uguaglianza non venga come nel testo. Quindi penso sia per quello

S10\_06: Perché quando si risolve un problema di solito il risultato che ti viene non è un dato che ti compare già nel testo, magari si può pensare di aver fatto un calcolo che è servito solo a trovare un dato che era già nel testo. Per quello può sembrare strano che, essendo già presente nel testo, sembra un po' impossibile che sia anche il risultato

# Analisi delle interviste

ABITUDINI PRATICHE  
DIDATTICHE

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

17 S10\_15: **In tutti questi anni di matematica che ho fatto, di problemi con il risultato già scritto nel testo non li ho quasi mai visti, forse 1 o 2. Quindi, non essendo abituato...**

# Analisi delle interviste

FATTORI  
METACOGNITIVI

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

S10\_04: Stavo pensando, dovrei fare una sottrazione. Se tolgo l'età della Terra ottengo l'età della Terra quando l'Homo Erectus è nato. Però non è facile. Non mi riesce. **Questo risultato è impossibile perché è uguale, quindi la risposta A non è.** La non è.

R: Vuoi la calcolatrice? Potrebbe aiutarti?

S10\_04: Se ci stanno tanti numeri, sì. Dovrebbe essere la risposta B

R: Quali risposte hai escluso?

S10\_04: **La A l'ho esclusa perché è identica e quindi non è assolutamente possibile.**



# Analisi delle interviste

FATTORI  
METACOGNITIVI

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

S10\_04: Credo che cambiare risposta sia innato, istintivo, ancora prima di pensarci appena vedi pensi che non possa essere quello, a meno che non ci siano altri dati. Quando vedi una sottrazione pensi subito questo

R: Se avessi un problema senza risposta multipla, dove un dato del testo corrisponde al tuo risultato finale, pensi di aver sbagliato?

S10\_04: No, dopo aver ottenuto il risultato ci penso, se i calcoli sono giusti, il risultato non mente. Se viene un numero leggermente più piccolo approssimo e ottengo il mio risultato

# Analisi delle interviste

FATTORI  
METACOGNITIVI

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

9 S10\_16: Sì, **viene da mettere una risposta diversa** rispetto a quella che c'è qua nel testo

13 S10\_16: No perché devo sottrarre e qualcosa cambia. **Viene di istinto pensare che se devi sottrarre qualcosa non può restare uguale**

# Analisi delle interviste

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

11 S10\_14: Perché vedi subito  $4,5 \times 10^9$  e poi vedi  $-10^6$  che ti sembra apparentemente un numero così grande e dici che non può dare lo stesso risultato. **E' una sottrazione come fa a dare lo stesso risultato?** Credo che i miei compagni pensino così

SOTTRAZIONE

# Analisi delle interviste

## ➤ Seconda Fase

- Interviste individuali a studenti del grado 10

5 S10\_16: **Se pensi che devi sottrarre, qualcosa deve andare via**

**SOTTRAZIONE**

# Analisi delle interviste

SOTTRAZIONE

## ➤ Seconda Fase

### - Interviste individuali a studenti del grado 10

9 S10\_15: Secondo me, leggendo la domanda, anche io avrei risposto la D, perché mi dice che l'Homo Erectus è comparso  $10^6$  anni fa, quale è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus? Quindi, visto che la Terra è valutata attorno ai  $4,5 \times 10^9$ ...secondo me leggendo la domanda **uno scarta subito la risposta A perché pensa subito a fare la differenza tra gli anni**, perché è come dire che Marco è nato 10 anni fa e gli hanno regalato la prima penna 6 anni fa e quindi...cioè non è proprio lo stesso paragone però io lo associo a questo

# Analisi delle interviste

## ➤ Seconda Fase

SOTTRAZIONE

- Interviste individuali a studenti del grado 10

11 S10\_15: Secondo me, perché c'è proprio scritto qua, cioè **se io leggo un dato in un problema di matematica e poi leggo che ce ne è un altro e poi non mi chiede la differenza, ma più o meno la stessa cosa, ovviamente penso subito che non può essere quello visto che c'è un altro dato che devo sottrarre**



# Analisi delle interviste

Dalla ricerca effettuata possiamo concludere che:

- ❑ l'effetto che abbiamo denominato "Età della terra" è rilevabile in **livelli scolastici molto differenti**;
- ❑ si manifesta sia quando sono coinvolte abilità matematiche di acquisizione recente sia con quelle di acquisizione più lontana;
- ❑ si presenta inoltre in **ambiti diversi**;
- ❑ non sembra dipendere direttamente dall'evidenza semantica della domanda;
- ❑ non dipende dall'abilità del soggetto sui contenuti della consegna.

# Ampliamento del quadro teorico

Nelle situazioni descritte in termini di *contratto didattico*, l'interazione tra docente e allievo genera, in maniera essenzialmente dinamica (secondo l'interpretazione più "ortodossa"), dei meccanismi che regolano e condizionano l'azione dell'allievo.

Il *costume didattico* di Balacheff descrive come questi principi regolativi possano emergere nell'**attività matematica della classe**.

Le *norme sociomatematiche* (Yarley & Cobb) sono usate per descrivere alcuni aspetti della prassi matematica, ad esempio per quanto riguarda la **validazione del discorso matematico**.

# Analisi di altre difficoltà diffuse



Grado 10  
2012

D21. L'espressione  $a^{37} + a^{38}$  è uguale a

- A.   $2a^{75}$  ■ Risposta A 19.1%
- B.   $a^{75}$  ■ Risposta B 26.3%
- C.   $a^{37}(a+1)$  ■ Risposta C 34.8%
- D.   $a^{37 \cdot 38}$  ■ Risposta D 16.1%

■ Risposte corrette 34.8% ■ Risposte errate 61.5%  
■ Risposte Mancate 2.8% ■ Altre non valide. 0.9%

■ Risposta A 16% ■ Risposta B 30.5%  
■ Risposta C 27.3% ■ Risposta D 23.8%  
■ Mancate e non valide 2.4%

D21. L'espressione  $a^{43} + a^{44}$  è uguale a

- A.   $a^{44 \cdot 43}$  ■ Risposta A 16%
- B.   $a^{43} \cdot (a+1)$  ■ Risposta B 30.5%
- C.   $a^{87}$  ■ Risposta C 27.3%
- D.   $2a^{87}$  ■ Risposta D 23.8%

Grado 10  
2015

■ Risposte corrette 30.5% ■ Risposte errate 67.1%  
■ Risposte Mancate 2.4%

D16. L'espressione  $10^{37} + 10^{38}$  è anche uguale a

- A.  $20^{75}$
- B.  $10^7$
- C.  $11 \cdot 10^{37}$
- D.  $10^{37-38}$

**Risultati in Italia**

Item	Mancata risposta	OPZIONI			
		A	B	C	D
D16	2,4	35,0	1,9	22,0	38,7

**LINGUAGGIO SIMBOLICO**

➤ Aumento di più del 10% della percentuale di risposte corrette!



GRAZIE PER  
L'ATTENZIONE

[federica.ferretti@unibz.it](mailto:federica.ferretti@unibz.it)