



# La storia della geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche

**Maria Teresa Borgato, Rudy Salmi**  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Ferrara

Ferrara, 13 marzo 2019

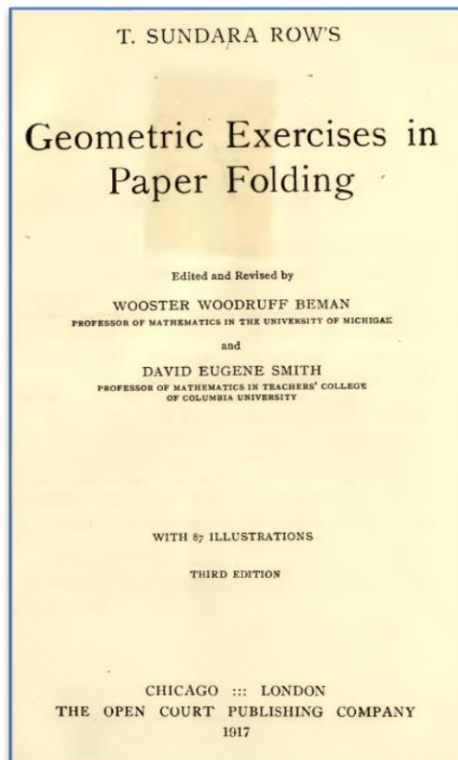
# Obiettivi dell'incontro

- Analizzare l'opera di **Sundara Row**, *Geometric Exercises in Paper Folding* (1893), che segna le origini della geometria origami.
- Evidenziare i contributi di originalità di **Margherita Beloch** sui metodi di ripiegamento della carta legati alla risoluzione di una cubica (1934).
- Mostrare gli sviluppi più recenti della geometria origami, come il sistema assiomatico di **Huzita-Justin-Hatori** (1989), la teoria degli allineamenti di **Alperin-Lang** (2006).

# L'opera di Sundara Row

Il libro di **Tandalam Sundara Row** (1853-?), *Geometric Exercises in Paper Folding* (Madras, 1893), segna la nascita della geometria origami.

L'opera, destinata all'insegnamento della geometria nelle scuole e nei college, trae ispirazione dai materiali per i *kindergarten*, come i giochi froebeliani.



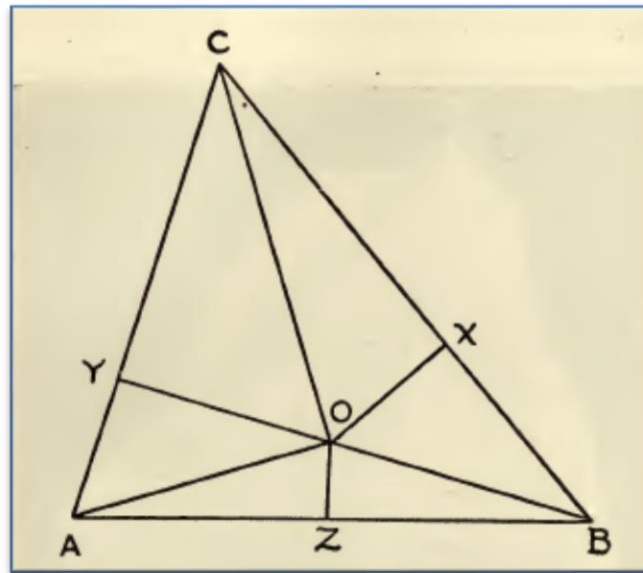
Il testo è una raccolta di costruzioni della geometria euclidea in cui l'uso della riga e del compasso è sostituito dall'**uso esclusivo della piegatura della carta**.

Questa procedura consente di verificare la correttezza di una qualunque affermazione mediante la sua realizzazione concreta.

# L'opera di Sundara Row

Sundara Row porta un esempio di come un'affermazione errata basata sull'immaginazione astratta di figure sia impossibile con la piegatura della carta.

**Ogni triangolo è isoscele**

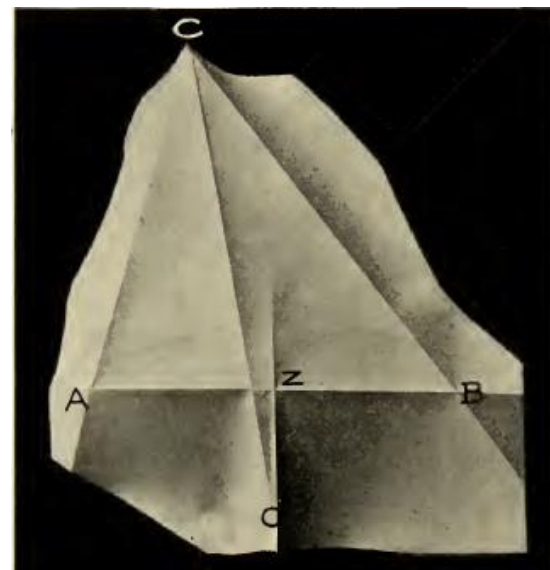
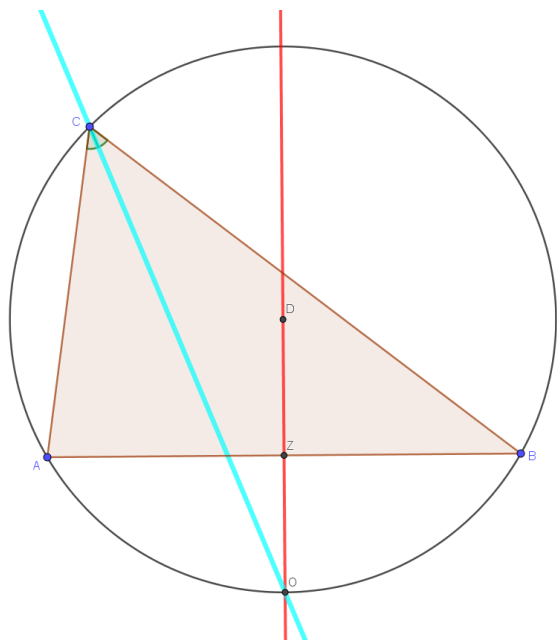


O è il punto d'intersezione tra l'asse del lato AB e la bisettrice dell'angolo in C.

# L'opera di Sundara Row

Sundara Row porta un esempio di come un'affermazione errata basata sull'immaginazione astratta di figure sia impossibile con la piegatura della carta.

**Ogni triangolo è isoscele**



Il punto O, intersezione delle due pieghe, non cade mai all'interno del triangolo perché è il punto medio dell'arco AB della circonferenza circoscritta al triangolo.

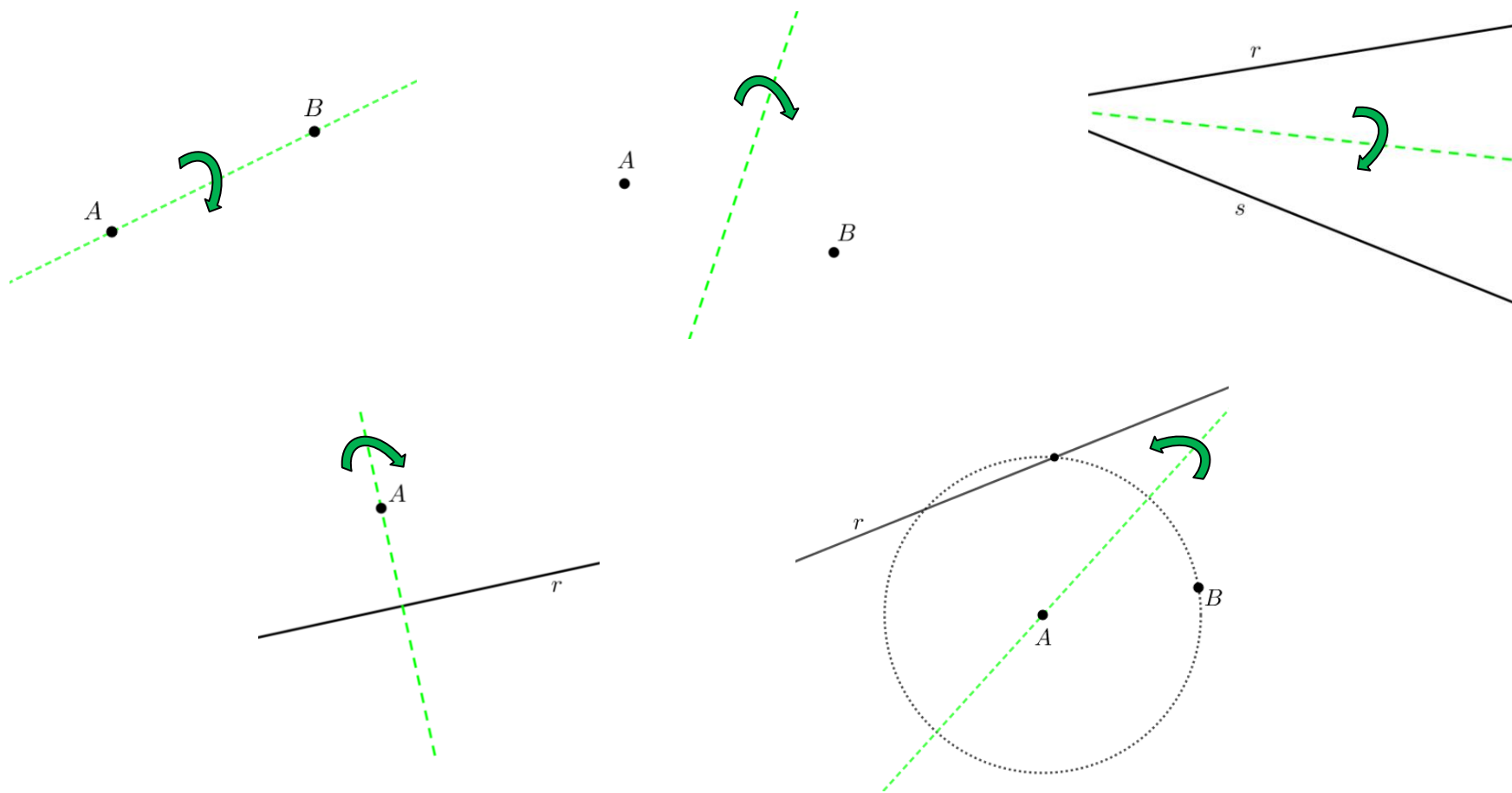
# L'opera di Sundara Row

Il testo è suddiviso in **14 capitoli**:

- **Cap. I – IX:** Costruzione dei poligoni regolari trattati negli *Elementi*, con l'aggiunta dell'ennagono; teorema di Pitagora e risultati di algebra geometrica.
- **Cap. X:** Progressioni aritmetiche, geometriche e armoniche.
- **Cap. XI:** Proprietà generali dei poligoni regolari e calcolo del valore di  $\pi$ .
- **Cap. XII:** Principi generali di congruenza, simmetrie e similitudini di figure.
- **Cap. XIII:** Costruzione per punti delle sezioni coniche.
- **Cap. XIV:** Costruzione per punti di altre curve algebriche e trascendenti.

# L'opera di Sundara Row

Sundara Row utilizza **cinque** operazioni di piegatura con cui si possono descrivere tutte le costruzioni origami.

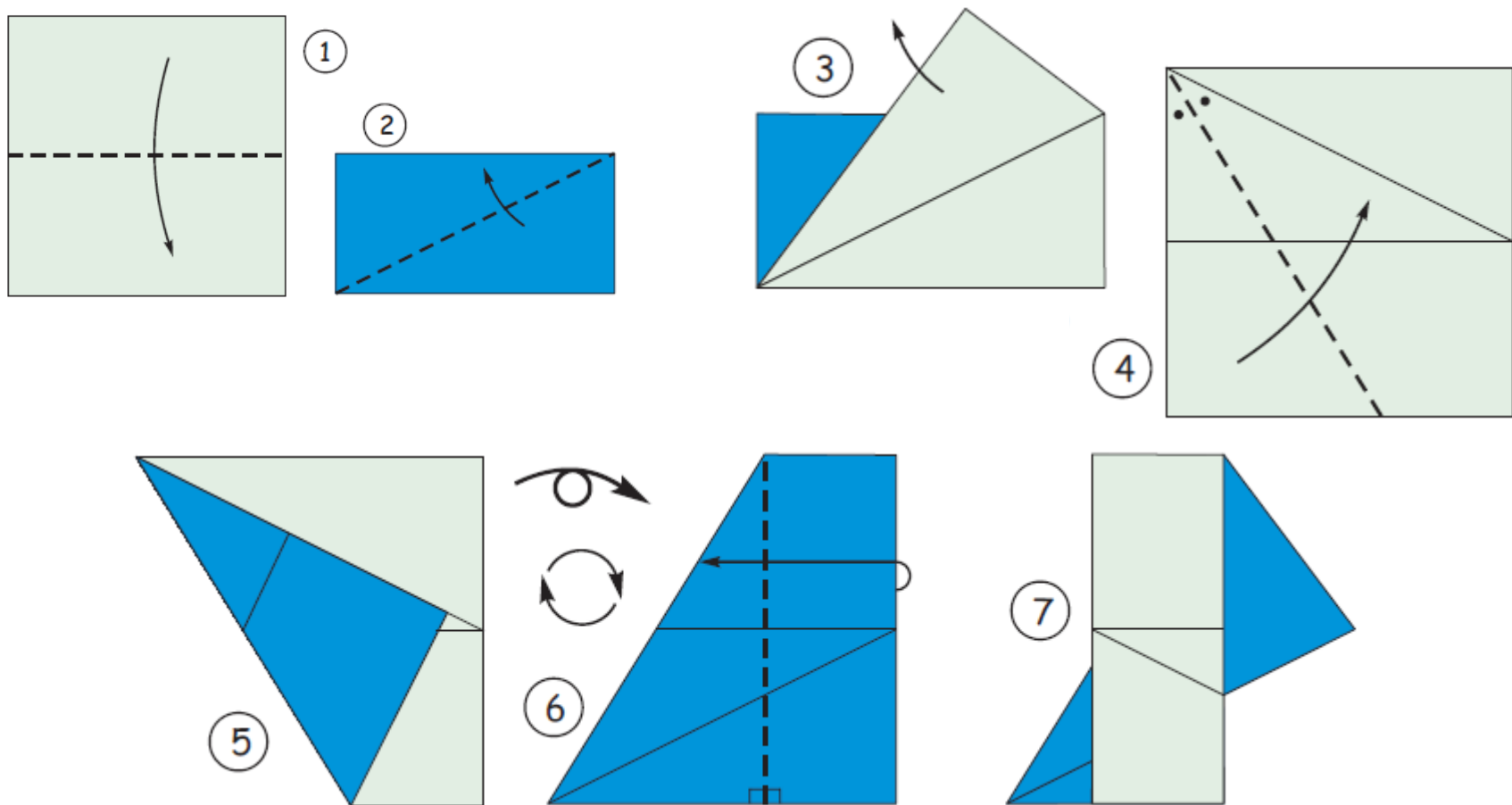


Questi ripiegamenti sono del tutto equivalenti, **in termini di possibilità di costruzione**, alla geometria della riga e del compasso.

# L'opera di Sundara Row

## La sezione aurea di un segmento

Dato un segmento  $AB$ , si vuole determinare un segmento  $AX$  tale che  $AX$  sia medio proporzionale tra il segmento stesso e la parte restante.



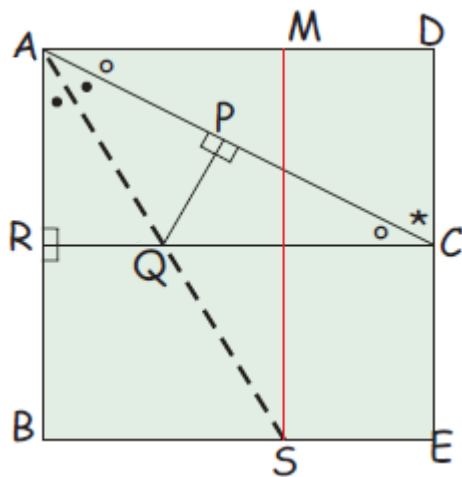


# L'opera di Sundara Row

## La sezione aurea di un segmento

La sezione aurea del segmento AB è il segmento AX tale che  $AB : AX = AX : XB$ .

Se  $AB = 1$  e si pone  $AX = x$ , allora si ha che  $1 : x = x : (1-x)$  da cui  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .



## Dimostrazione della costruzione

Dato che  $AD = 1$  e  $DC = \frac{1}{2}$ , si ha che  $AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Inoltre  $PC = AC - AP = AC - AR = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Si osserva che i triangoli ADC e QPC sono simili, pertanto vale che  $PC = 2 PQ = 2 RQ$ . Ma anche i triangoli ARQ e ABS sono simili, quindi  $BS = 2 RQ$ .

Segue che  $BS = PC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , cioè BS è sezione aurea del lato del quadrato.

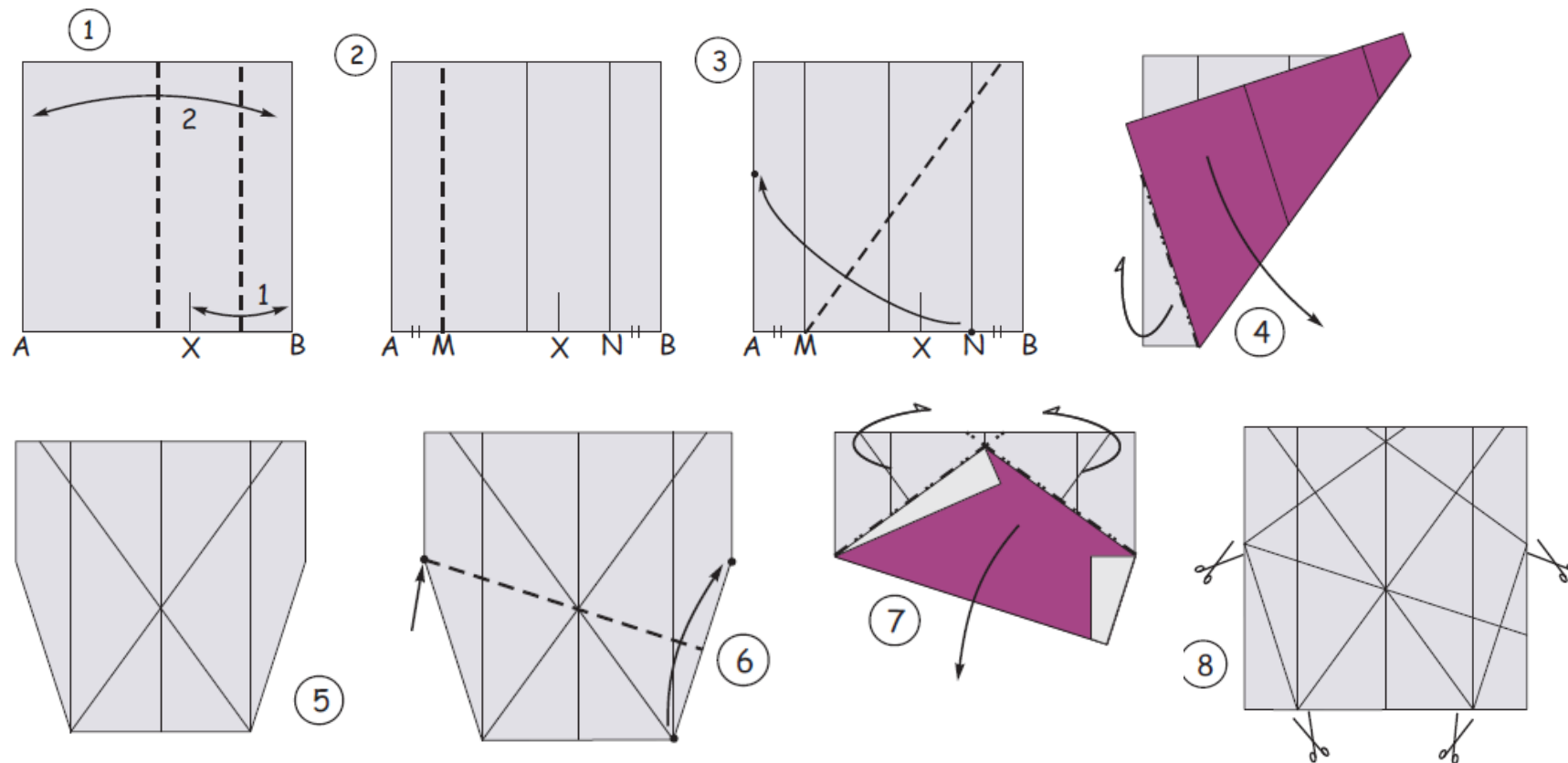
In particolare AMSB è un rettangolo aureo.

# L'opera di Sundara Row

## Costruzione del pentagono regolare

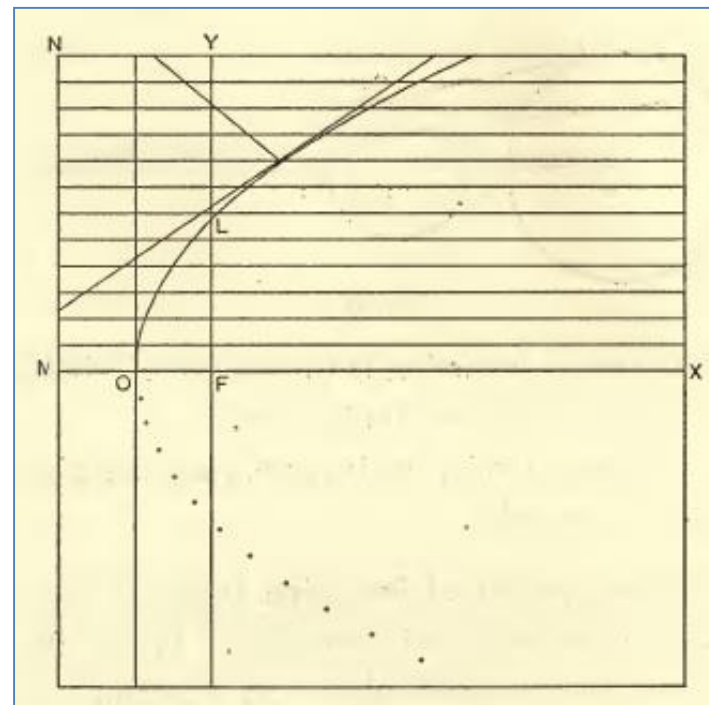
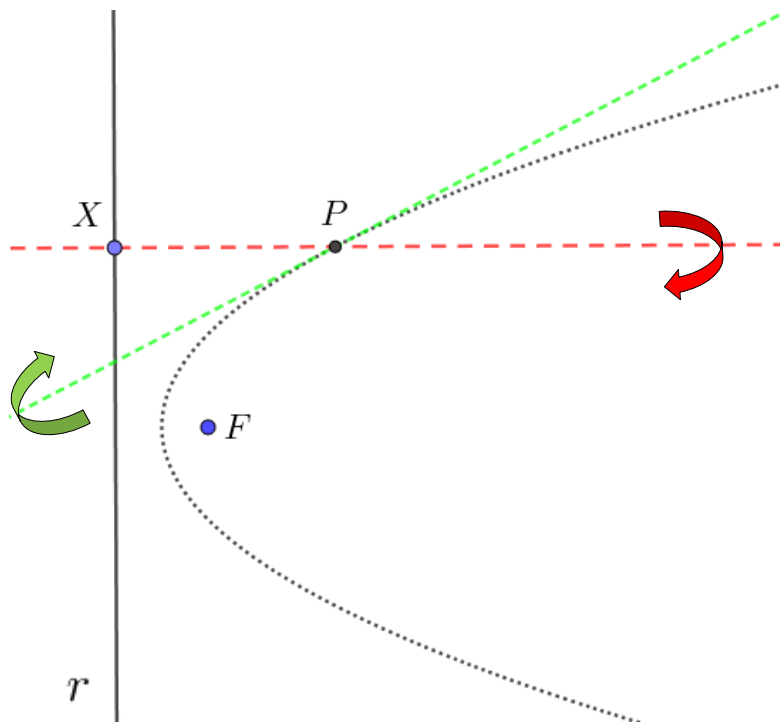
In un pentagono regolare il lato è sezione aurea della diagonale.

Nella costruzione  $AX = MN$  è il lato del pentagono ed è sezione aurea di  $AB$ .



# L'opera di Sundara Row

## Costruzione per punti di una parabola



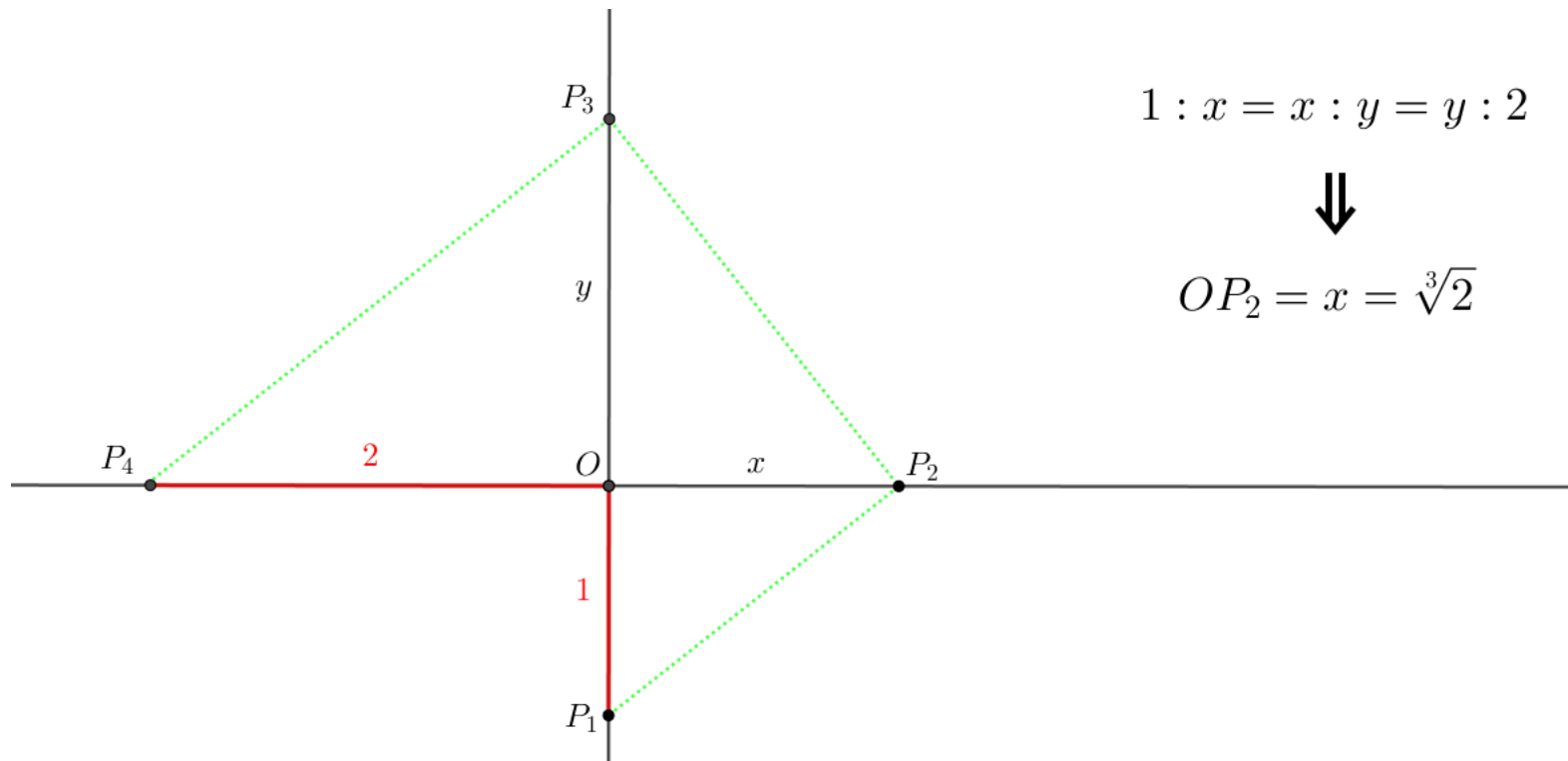
$P$  è il punto d'intersezione tra la **piega che porta il fuoco  $F$  sul punto  $X$  della direttrice** e **la piega perpendicolare a  $r$  passante per  $X$** .

La piegatura (in verde) è la **tangente alla parabola** di fuoco  $F$  e direttrice  $r$  nel punto  $P$ .



# L'opera di Sundara Row

## La duplicazione del cubo

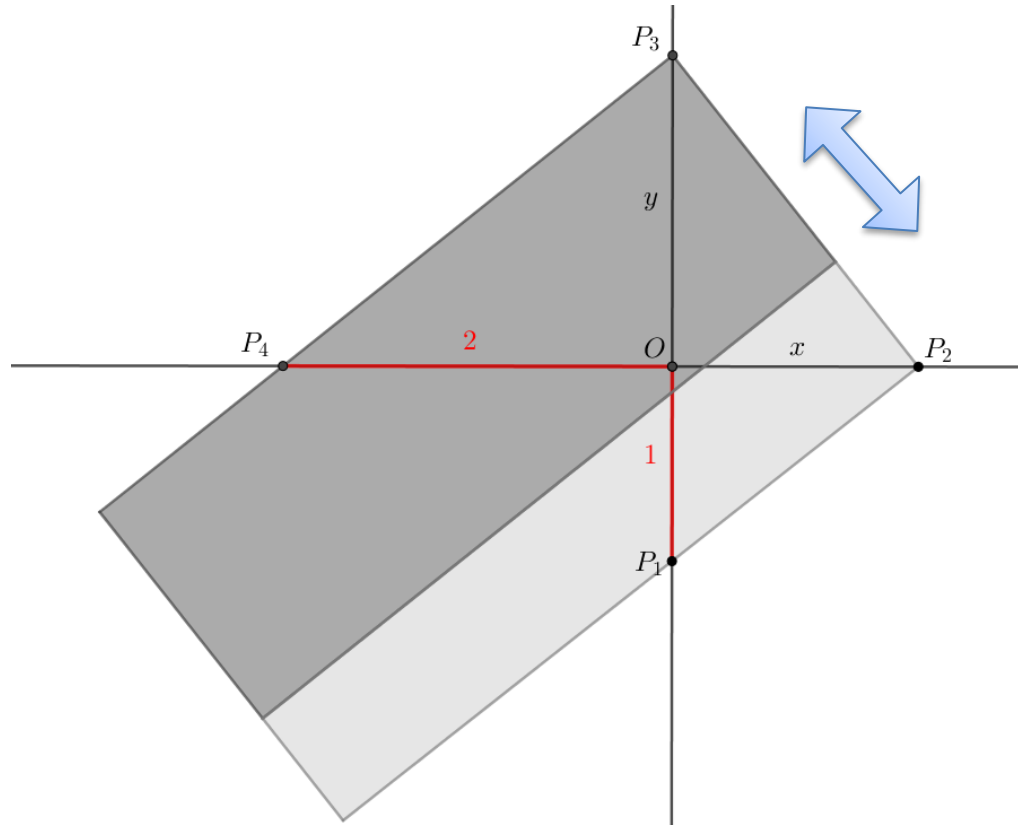


Il problema della duplicazione del cubo equivale a trovare **due medie proporzionali**  $x$  e  $y$  tra i segmenti  $OP_1$  e  $OP_4$  rispettivamente di lunghezza 1 e 2.

Sundara Row afferma che **non è possibile risolvere il problema per piegatura**.

# L'opera di Sundara Row

## La duplicazione del cubo



Per determinare i punti  $P_2$  e  $P_3$ , Sundara Row utilizza due strisce di carta disposte in modo tale da individuare la spezzata associata al problema.

Questo metodo esula dalla geometria origami.

# La diffusione del volume di Sundara Row

Il primo ad attrarre l'attenzione dei matematici occidentali verso l'opera di Sundara Row fu **Felix Klein** nelle sue celebri lezioni *Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* (1897).

Nei primi decenni del Novecento il trattato di Sundara Row indusse alcuni studiosi a ricercare nuovi metodi per risolvere equazioni quadratiche via origami.

- A. J. Lotka, *Construction of conic sections by paperfolding* (1907)
- C. A. Rupp, *On a transformation by paper folding* (1924)

In Italia il matematico **Giovanni Vacca** pubblicò nel 1930 un articolo sul *Periodico di Matematiche* in cui metteva in luce questi nuovi rapporti tra geometria e origami.

Nel 1934 **Margherita Beloch** pubblica una nota intitolata *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row* negli Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara.

# Margherita Beloch



Margherita Beloch (Frascati, 1879 – Roma, 1976) si laurea a Roma nel 1908 con **Guido Castelnuovo**, discutendo una tesi *Sulle trasformazioni birazionali nello spazio*.

Conseguita la libera docenza nel 1924, vince il **concorso a cattedra di geometria** bandito nel 1927 dall'Ateneo di Ferrara.

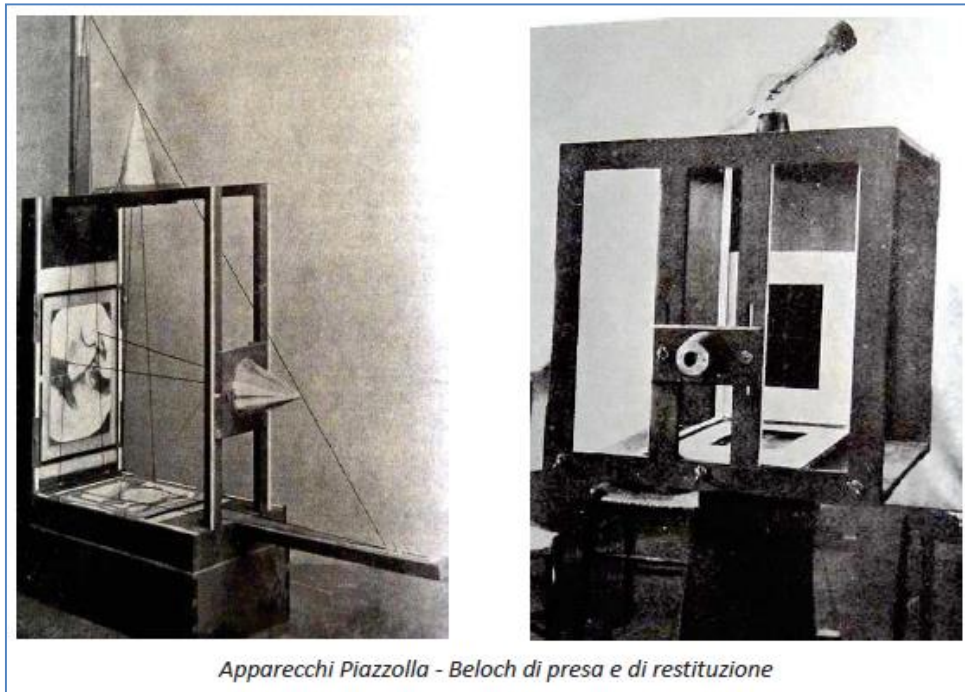
Tiene per incarico anche gli insegnamenti di geometria descrittiva, geometria superiore e **matematiche complementari**.

I suoi principali campi di ricerca sono la geometria algebrica, la topologia proiettiva e la **fotogrammetria**.

Insegna a Ferrara fino al collocamento fuori ruolo nel 1949 e a riposo nel 1954. L'anno seguente le viene conferito il titolo di **professore emerito**.



# Margherita Beloch



*Apparecchi Piazzolla - Beloch di presa e di restituzione*

La Beloch è ricordata per essere stata un pioniere nel campo dell'**aerofotogrammetria** e per aver diffuso in Italia l'applicazione dei metodi fotogrammetrici alla radiologia per scopi medici (***röntgenfotogrammetria***).

Presentato nel 1938 alla Mostra delle Invenzioni "Leonardo da Vinci" di Milano, nella sezione medica, il **precisometro** fu premiato con la Coppa d'argento del Ministero dell'educazione nazionale, destinata al primo classificato.

# Margherita Beloch



*Dall'archivio fotografico dell'Università di Ferrara, un'immagine che ritrae Margherita Beloch durante una cerimonia accademica.*

# Margherita Beloch



*In questa fotografia, Margherita Beloch assieme a Lea Meriggi, docente di diritto internazionale nell'Ateneo ferrarese.*

# Margherita Beloch

Nelle sue lezioni di Matematiche Complementari, la Beloch incluse alcune **osservazioni didattiche** sui metodi del ripiegamento della carta come **strumenti alternativi** per le costruzioni geometriche.

Scrisse due articoli rilevanti nella storia della geometria degli origami:

- *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row*, in Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara (1934);
- *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, in Periodico di Matematiche (1936).

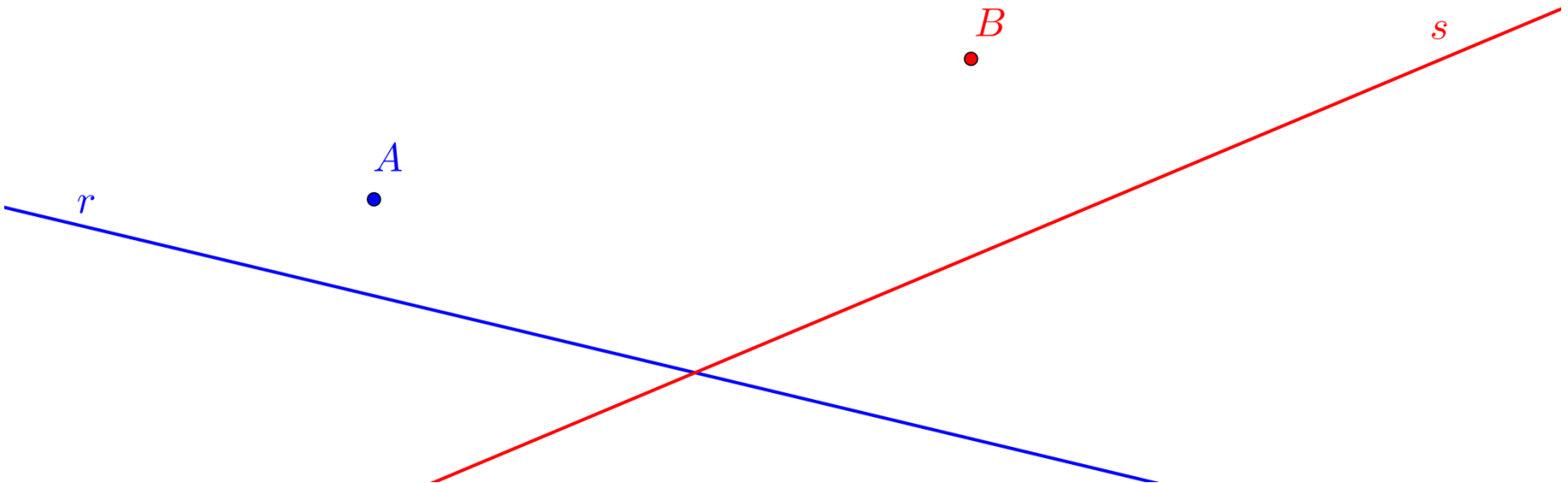
In queste note, la Beloch illustra come le tecniche origami consentano di risolvere **ogni problema di terzo grado**, mostrando di fatto la superiorità del metodo rispetto alle costruzioni con riga e compasso.

Segue la possibilità di risolvere il problema classico della **duplicazione del cubo** via origami, smentendo quanto affermato da Sundara Row.

# La piegatura Beloch

Oltre a riprendere i cinque ripiegamenti di Sundara Row, la Beloch introduce un sesto **movimento origami**: la piegatura che porta **contemporaneamente** due punti **A** e **B** a sovrapporsi rispettivamente su due rette **r** e **s**.

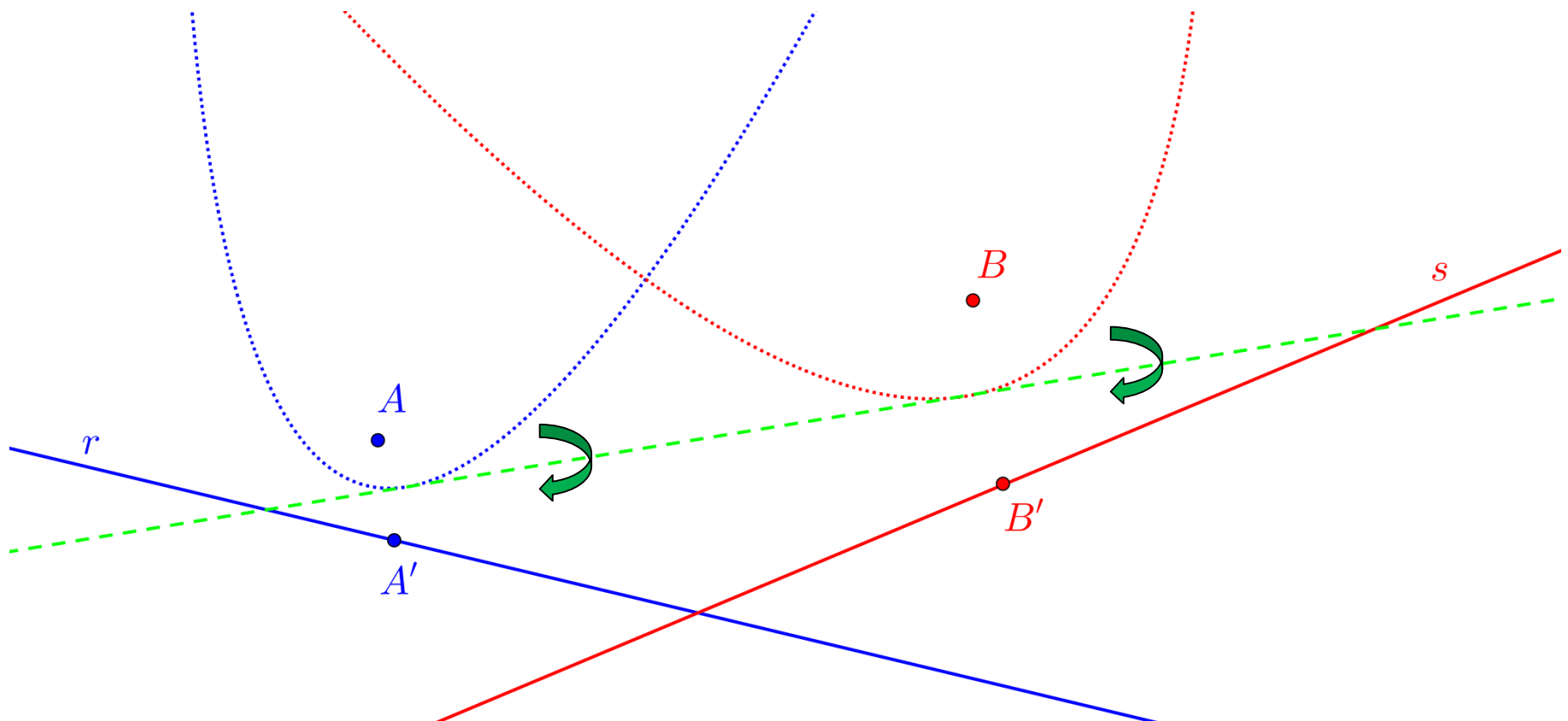
Una **piegatura Beloch** equivale a ricercare una **tangente comune a due parabole**, che hanno per fuoco e direttrice i punti e le rette assegnate.



# La piegatura Beloch

Oltre a riprendere i cinque ripiegamenti di Sundara Row, la Beloch introduce un sesto **movimento origami**: la piegatura che porta **contemporaneamente** due punti **A** e **B** a sovrapporsi rispettivamente su due rette **r** e **s**.

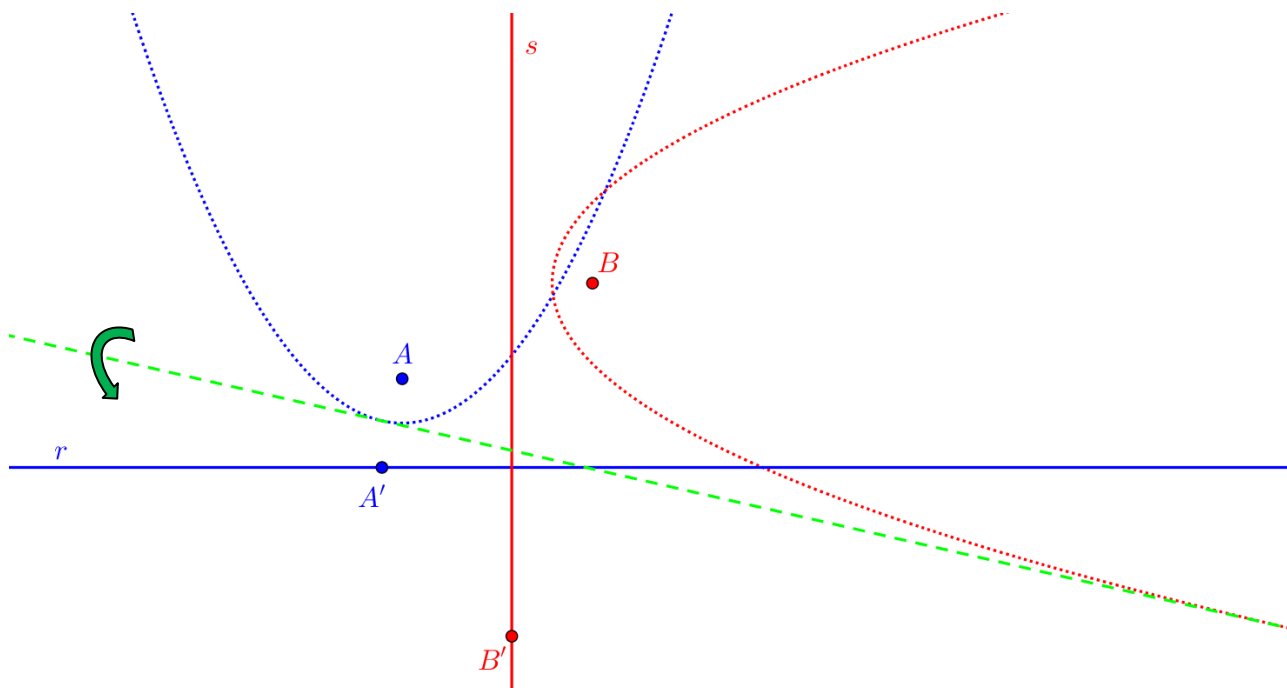
Una **piegatura Beloch** equivale a ricercare una **tangente comune a due parabole**, che hanno per fuoco e direttrice i punti e le rette assegnate.



# La piegatura Beloch

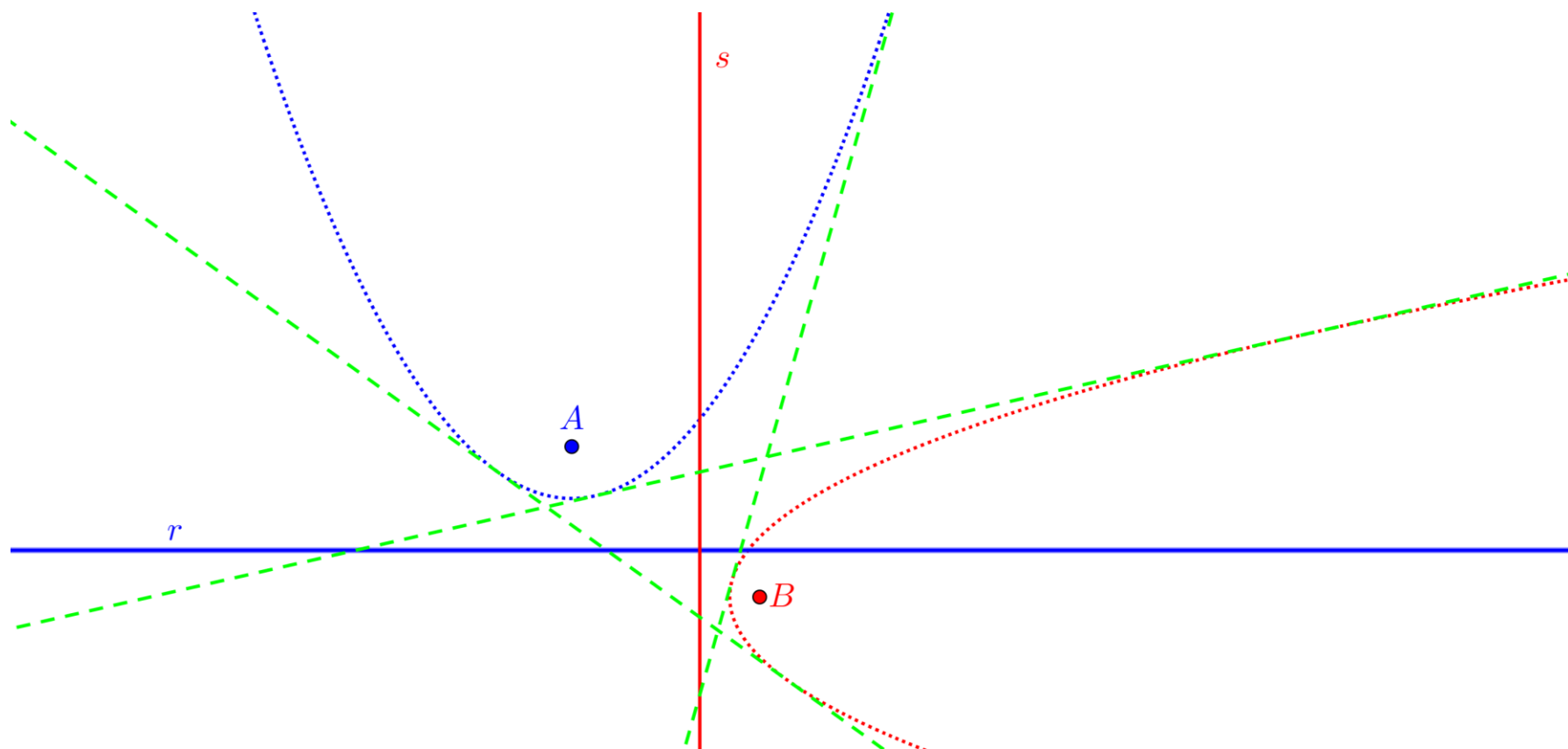
L'**esistenza** di una piegatura Beloch corrisponde all'esistenza di una tangente comune alle parabole associate al problema. Dato che due parabole nel piano possono **non avere alcuna tangente comune**, se ne deduce che la ricerca di una piegatura Beloch può anche non essere fruttuosa.

Nel caso particolare in cui **le direttrici delle parabole siano perpendicolari**, si può dimostrare che **esiste sempre almeno una tangente comune**. Pertanto nel caso in cui  **$r$**  e  **$s$**  siano ortogonali, si trova sempre almeno una piegatura Beloch che porta  **$A$**  su  **$r$**  e  **$B$**  su  **$s$** .



# La piegatura Beloch

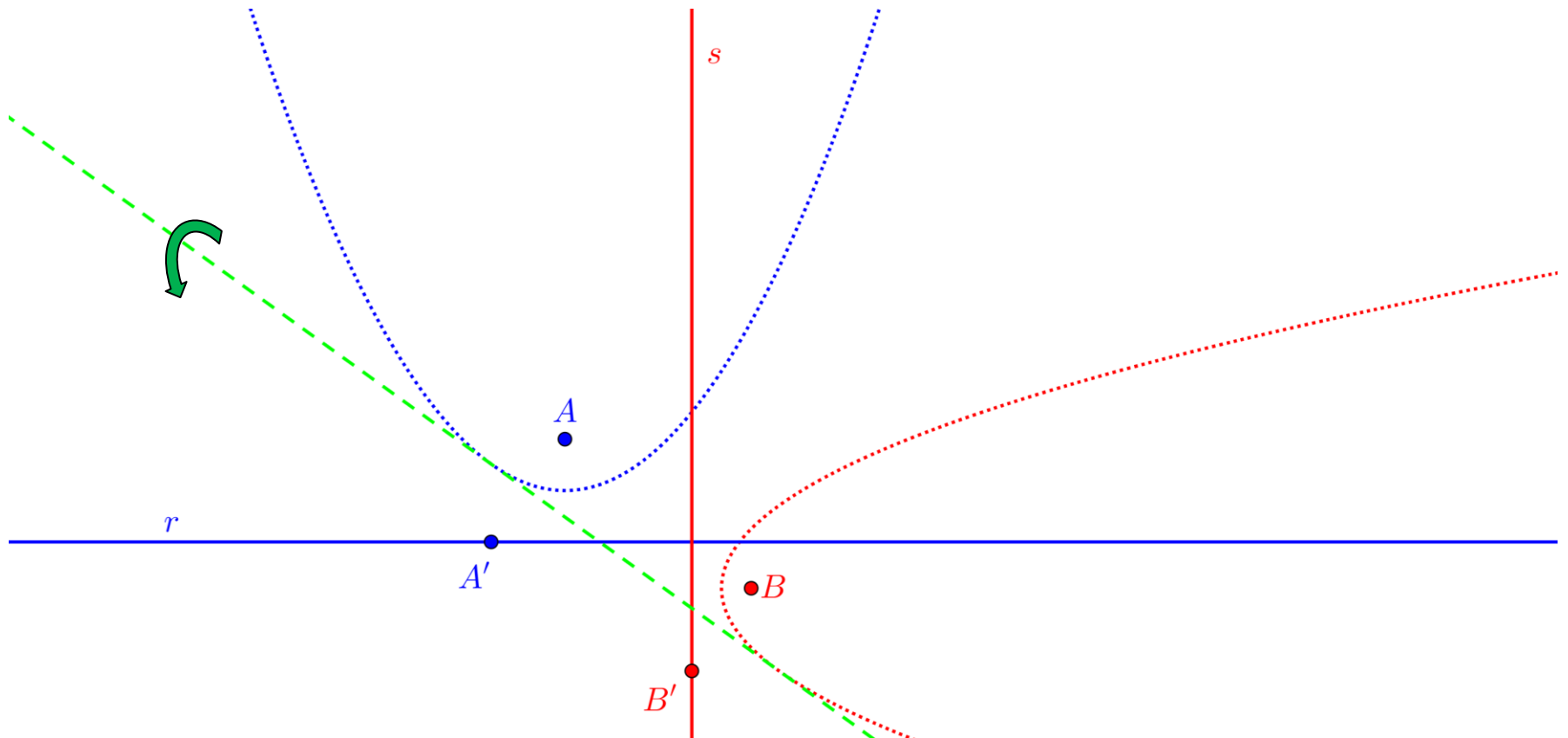
Dato che due parabole con direttrici ortogonali possono avere **al più tre tangenti comuni**, possono essere **al più tre** le piegature Beloch che portano i due punti assegnati sulle due rette date.





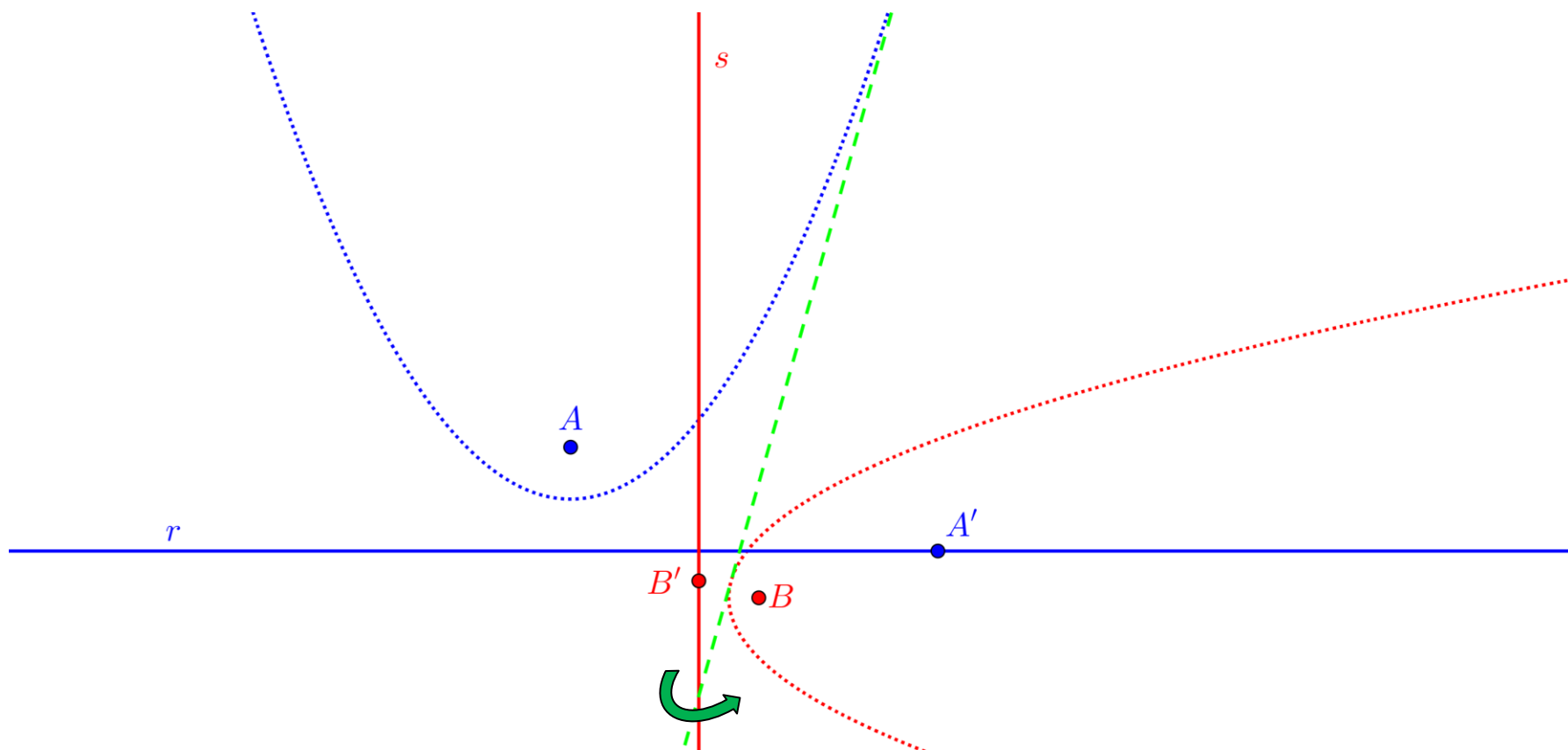
# La piegatura Beloch

Dato che due parabole con direttrici ortogonali possono avere **al più tre tangenti comuni**, possono essere **al più tre** le piegature Beloch che portano i due punti assegnati sulle due rette date.



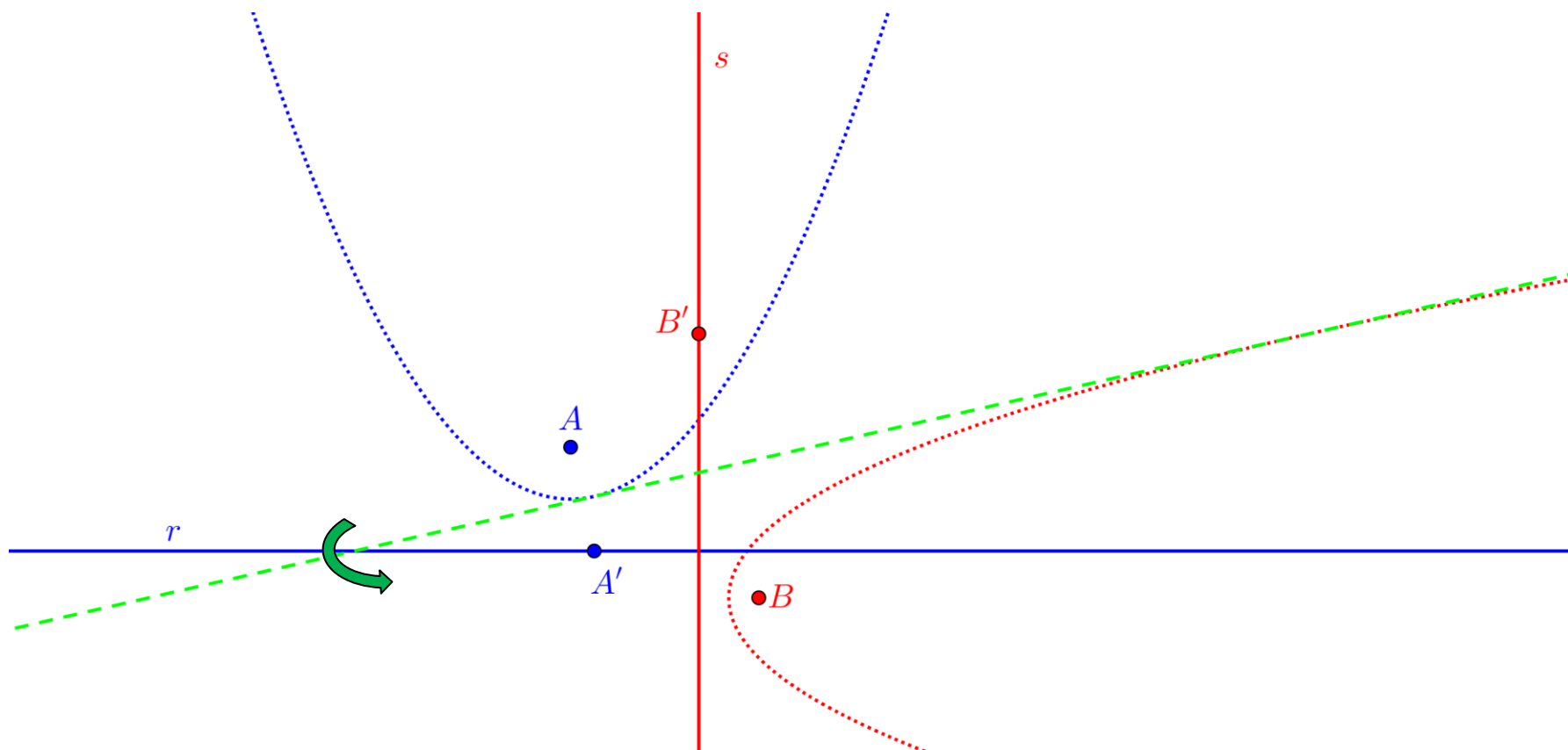
# La piegatura Beloch

Dato che due parabole con direttrici ortogonali possono avere **al più tre tangenti comuni**, possono essere **al più tre** le piegature Beloch che portano i due punti assegnati sulle due rette date.



# La piegatura Beloch

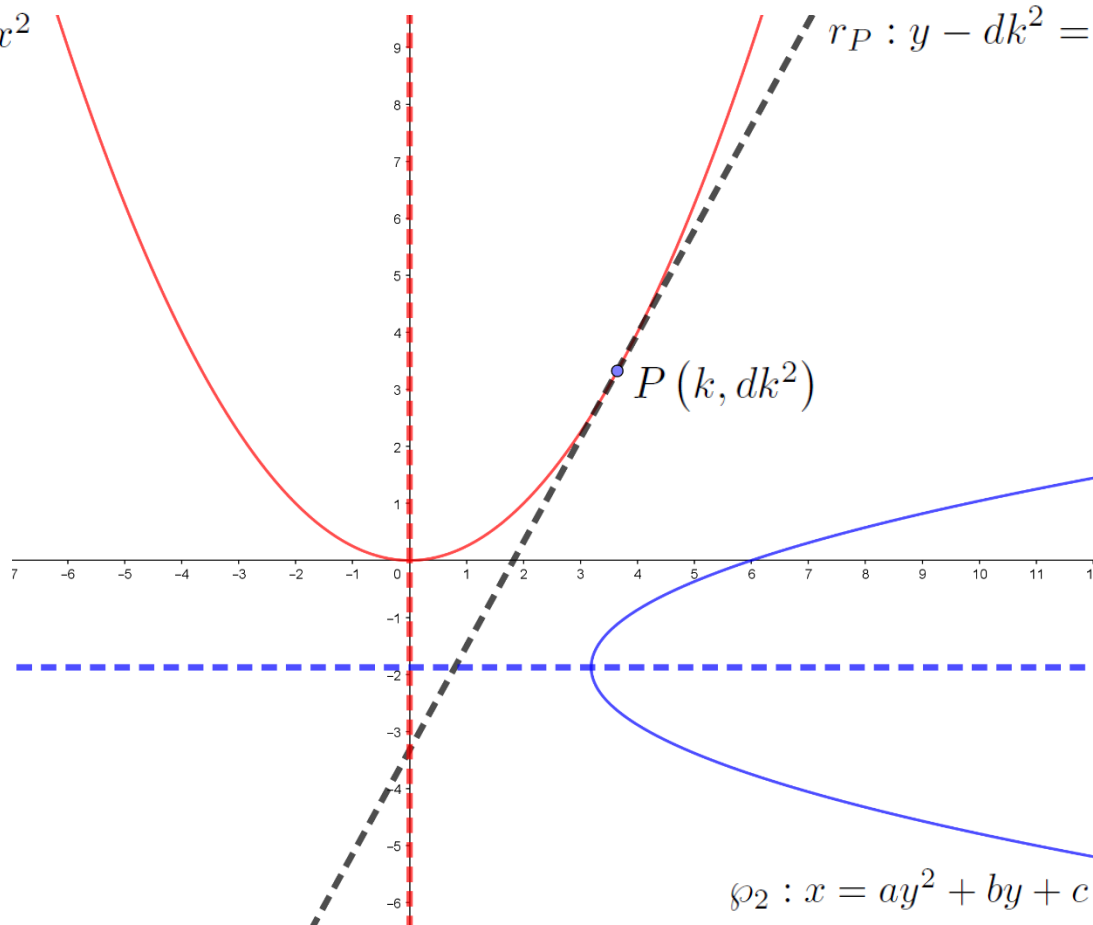
Dato che due parabole con direttrici ortogonali possono avere **al più tre tangenti comuni**, possono essere **al più tre** le piegature Beloch che portano i due punti assegnati sulle due rette date.



# La piegatura Beloch

**Proposizione.** *Date due parabole nel piano con assi di simmetria ortogonali, esiste almeno una tangente comune alle due parabole e al più tre.*

$$\varphi_1 : y = dx^2 \\ d \neq 0$$



$$r_P : y - dk^2 = 2dk(x - k)$$

$$P(k, dk^2)$$

$$\varphi_2 : x = ay^2 + by + c \\ a \neq 0$$

# La piegatura Beloch

Si vuole ora imporre che la retta  $r_P$  sia tangente pure alla parabola  $\wp_2$ . Ciò equivale a considerare il sistema

$$\begin{cases} y = dk(2x - k) & (1.1) \\ x = ay^2 + by + c & (1.2) \end{cases}$$

e ad imporre che l'equazione risolvente abbia due soluzioni reali e coincidenti. Sostituendo la (1.1) nella (1.2), si trova l'equazione di secondo grado nell'incognita  $x$  di parametro  $k$ :

$$x = ad^2k^2(2x - k)^2 + bdk(2x - k) + c$$

$$4ad^2k^2x^2 + (-4ad^2k^3 + 2bdk - 1)x + ad^2k^4 - bdk^2 + c = 0$$

il cui discriminante è

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= (-4ad^2k^3 + 2bdk - 1)^2 - 16ad^2k^2(ad^2k^4 - bdk^2 + c) = \\ &= 16a^2d^4k^6 + 4b^2d^2k^2 + 1 - 16abd^3k^4 - 4bdk + 8ad^2k^3 + \\ &\quad - 16a^2d^4k^6 + 16abd^3k^4 - 16acd^2k^2 = \\ &= 8ad^2k^3 + 4d^2(b^2 - 4ac)k^2 - 4bdk + 1 \end{aligned}$$

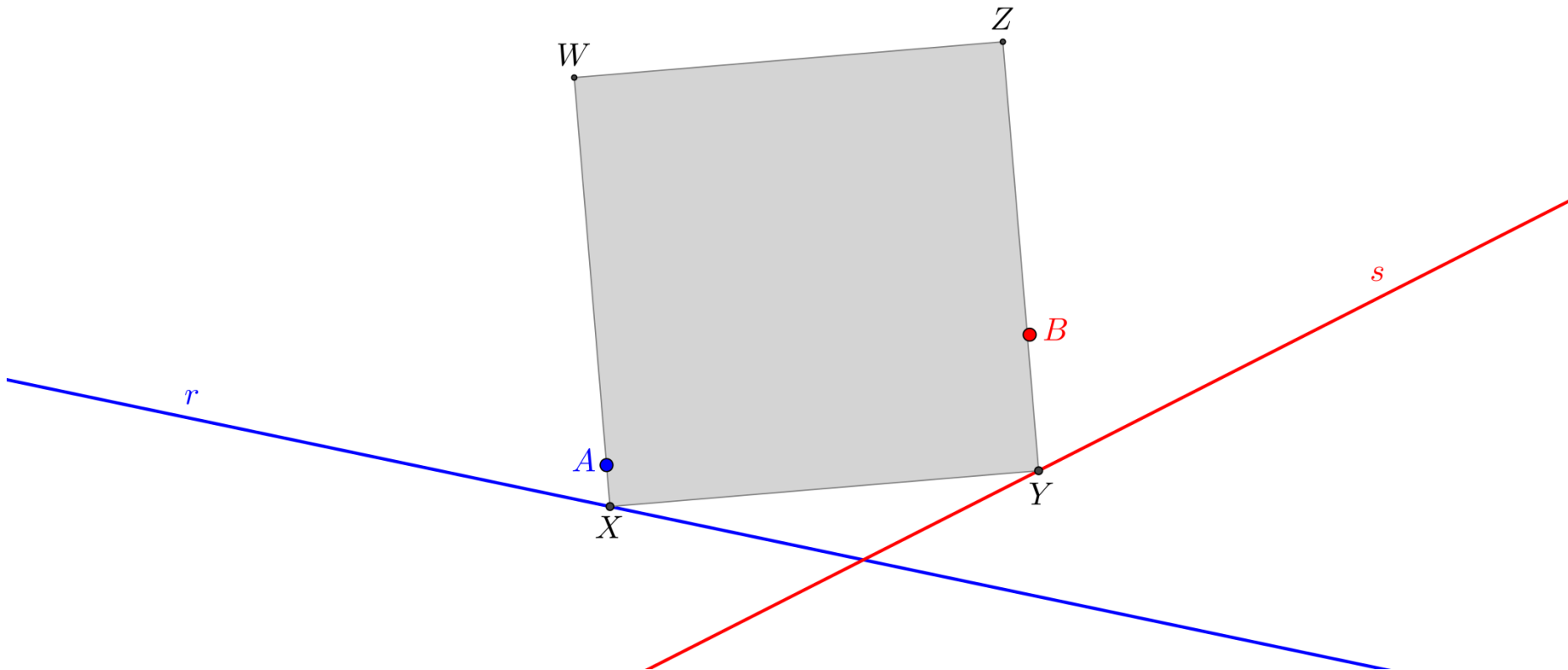
ovvero un quadrinomio di terzo grado nella variabile  $k$  in cui il coefficiente del termine di grado massimo è di certo non nullo dal momento che per ipotesi  $a$  e  $d$  sono diversi da zero.

Imponendo  $\Delta(k) = 0$ , si ottiene quindi un'equazione di terzo grado in  $k$  che, come è noto, ammette almeno una radice reale e al più tre radici reali.

# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

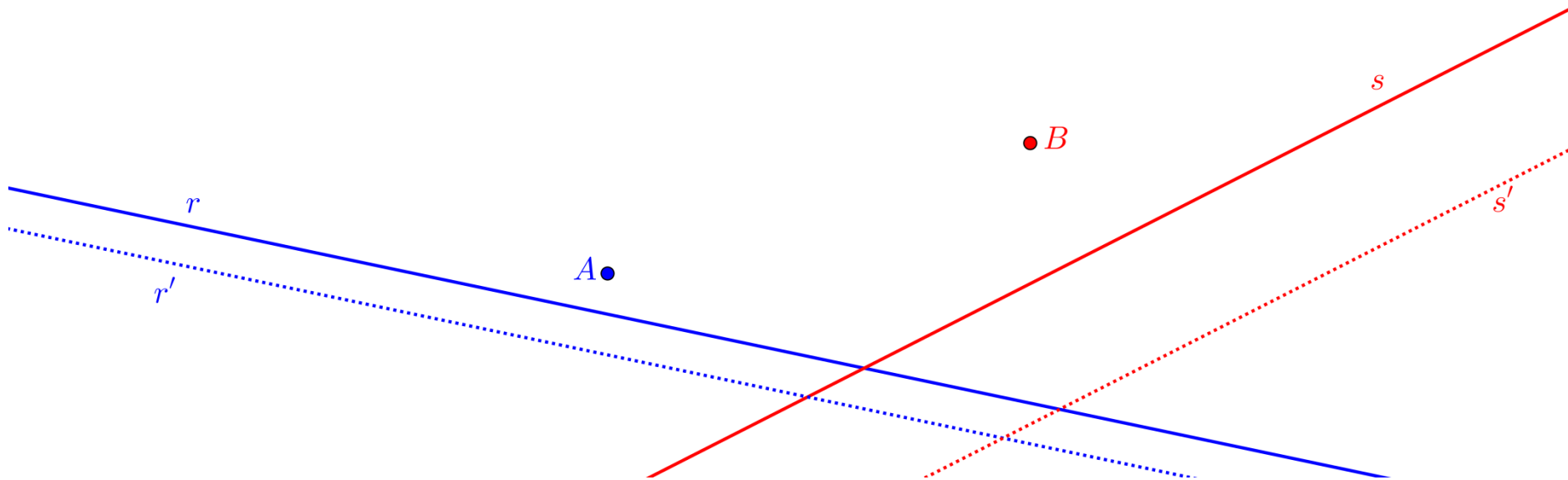
- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.



# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

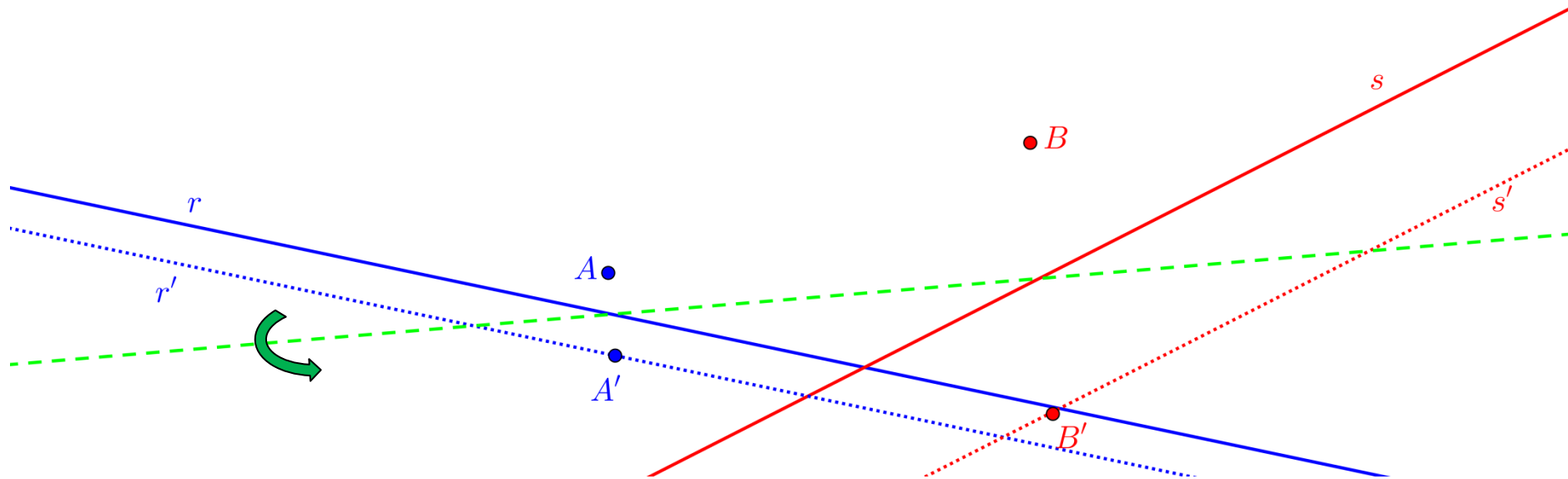
- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.



# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.

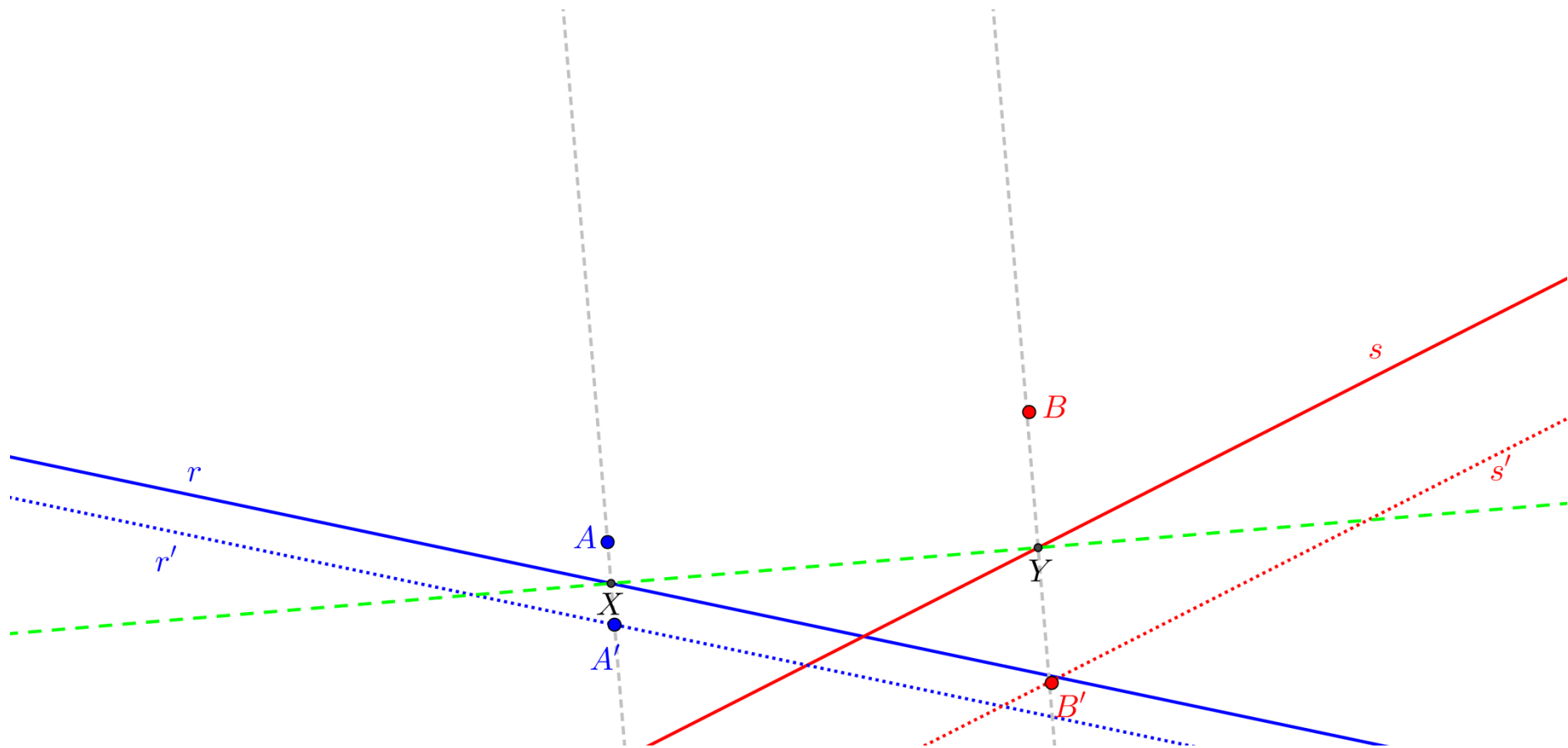




# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

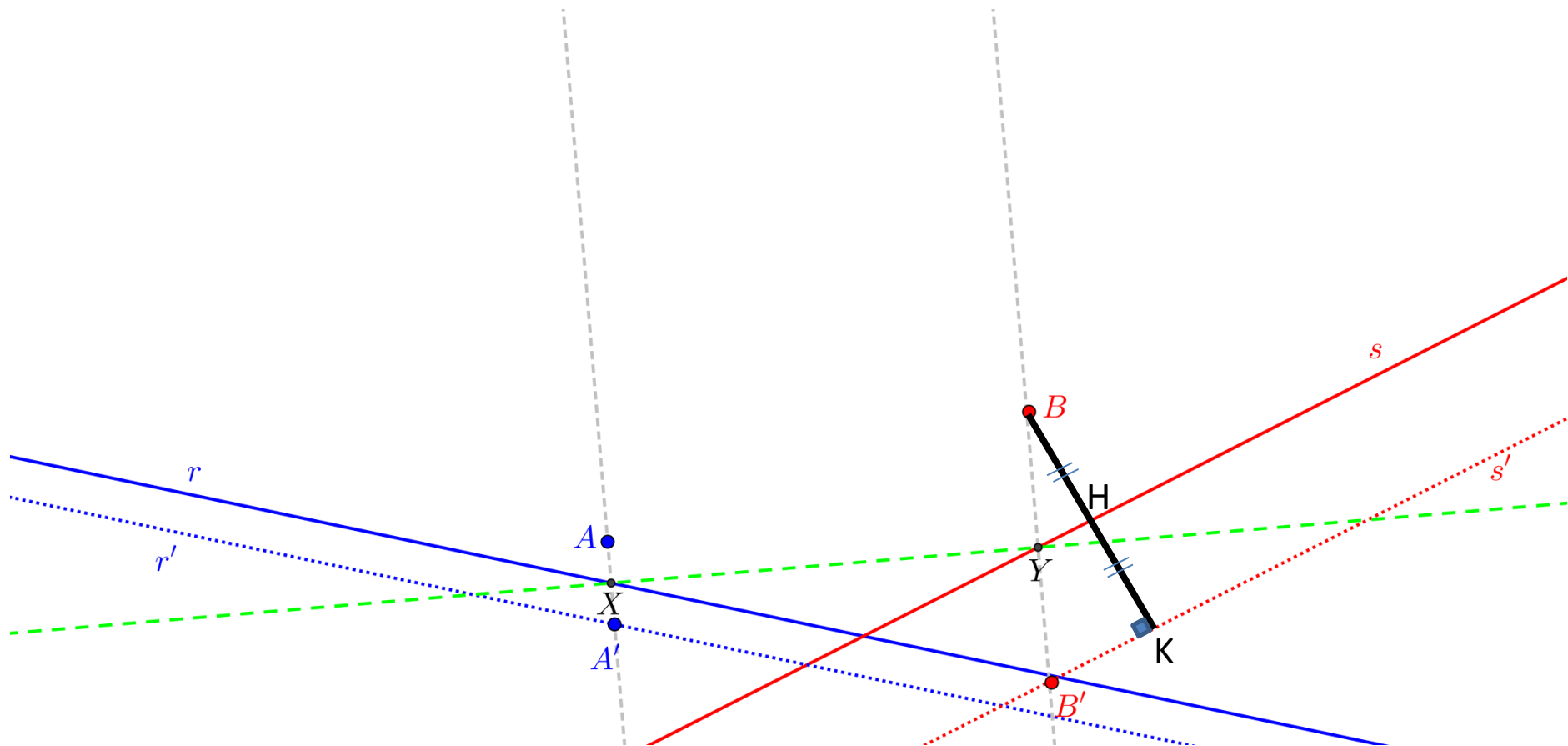
- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.



# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

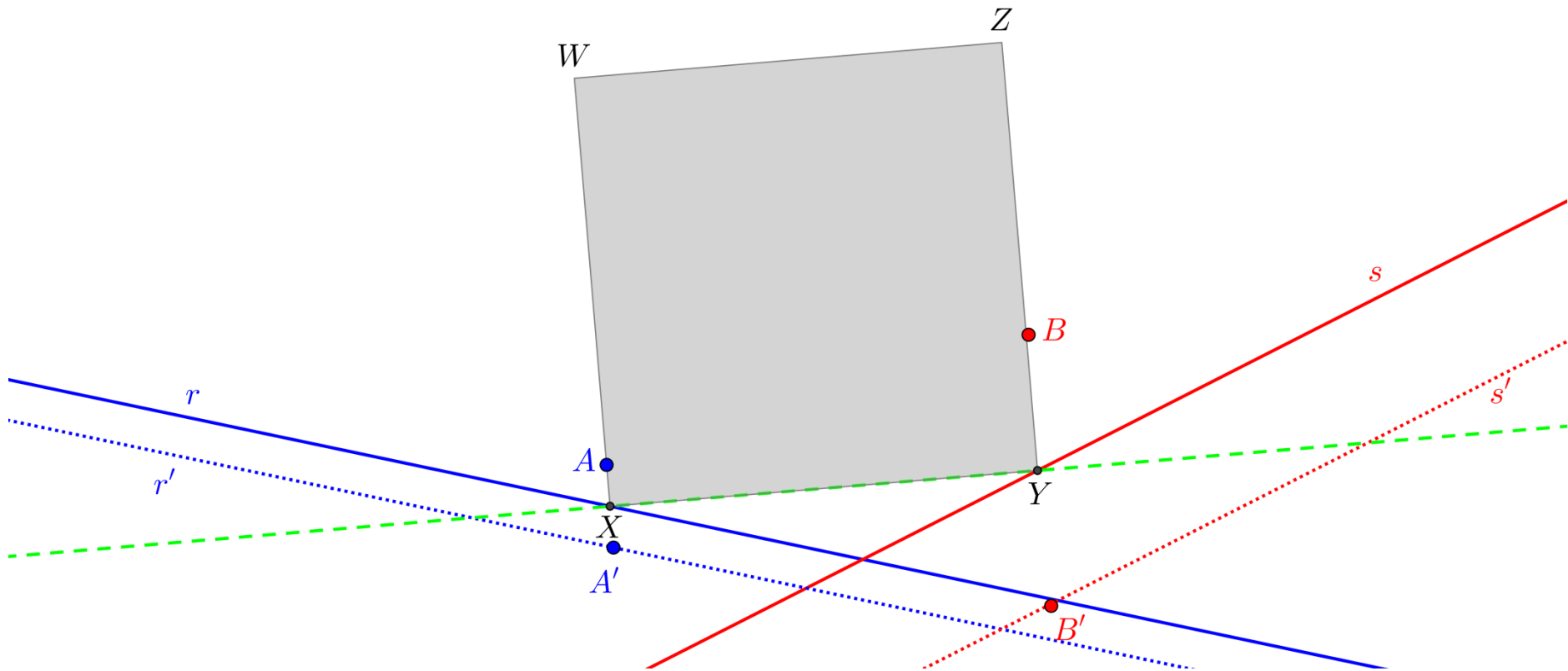
- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.



# Il quadrato Beloch

Dati due punti **A** e **B** e due rette **r** e **s**, costruire un **quadrato XYZW**:

- con due vertici **X** e **Y** situati rispettivamente sulle rette **r** e **s**,
- con i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per i punti **A** e **B**.



# Il metodo di Lill

Margherita Beloch mostrò come la costruzione del suo quadrato potesse essere impiegata per determinare le **radici reali di un'equazione cubica** mediante il ripiegamento della carta.

A tal fine, la Beloch riprese un **procedimento grafico per la risoluzione di un'equazione polinomiale di grado  $n$** , illustrato dall'ingegnere militare austriaco **Eduard Lill** (1830-1900) in una sua nota del 1867 pubblicata sui *Nouvelles Annales de mathématiques*.

---

## RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue,  
et description d'un instrument inventé dans ce but;

PAR M. E. LILL,  
Capitaine du génie au service de l'Autriche.

---

# Il metodo di Lill

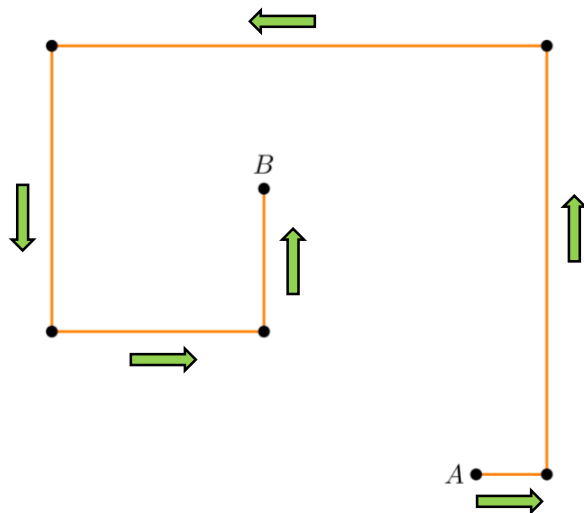
Il **metodo di Lill** consente di localizzare, ammesso che esista, una radice reale di un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

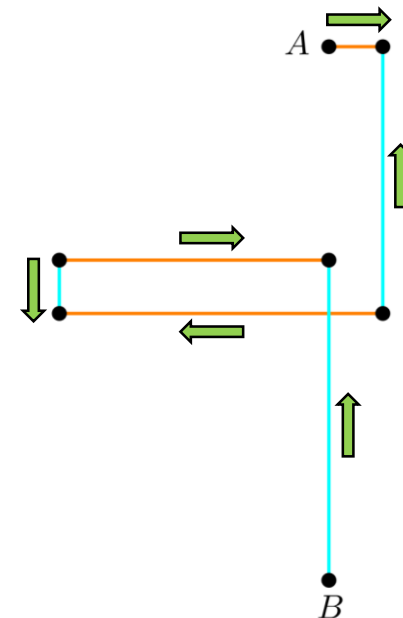
disegnando una spezzata rettangolare i cui segmenti hanno **lunghezza e orientamento** dipendenti dai coefficienti del polinomio.

## Esempi

$$x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

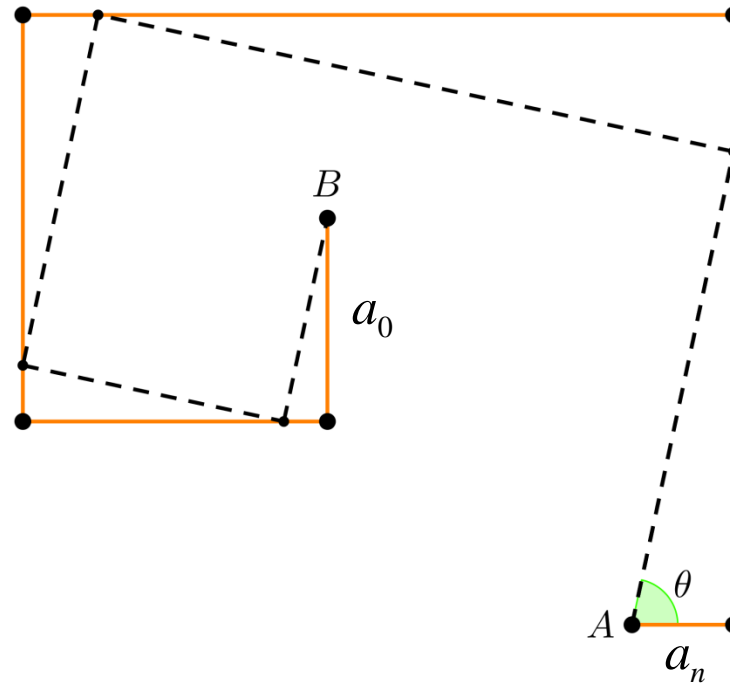


$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x^2 + 5x - 6$$



# Il metodo di Lill

Ora si suppone di aver individuato un'altra spezzata rettangolare, detta **cammino risolvente**, che parte da  $A$  e termina in  $B$ , tale che gli estremi di ogni segmento stiano su due segmenti consecutivi della spezzata di Lill.



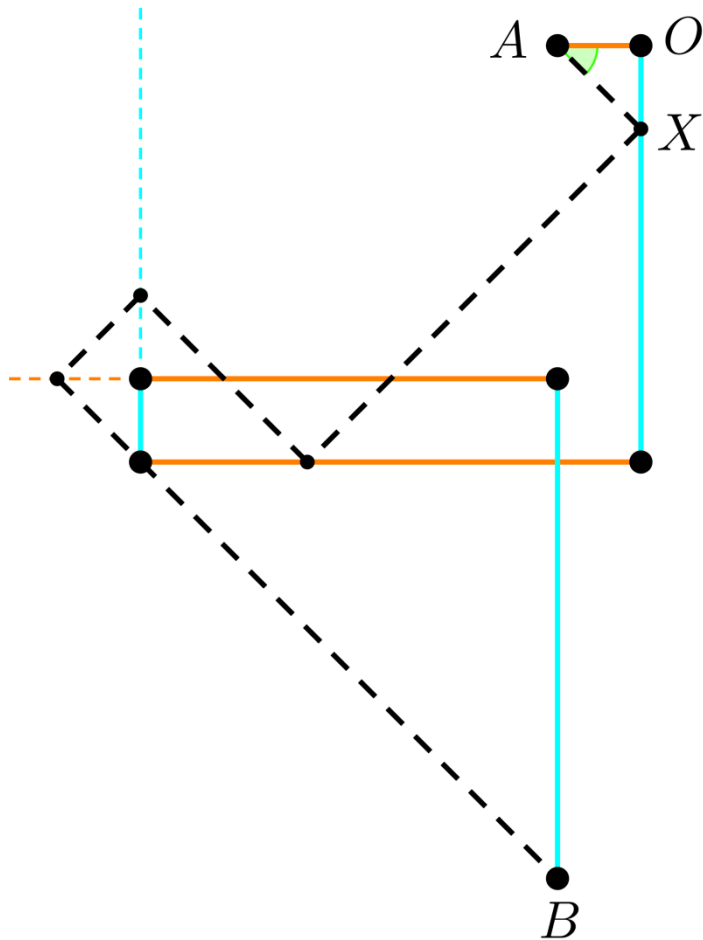
Sia  $\theta$  l'**angolo orientato** che il primo segmento del cammino risolvente forma con il segmento  $a_n$  della spezzata di Lill. Allora si ha che

$$-\operatorname{tg} \theta$$

è **una radice reale** del polinomio di partenza.

# Il metodo di Lill

In merito al segno della radice, si precisa che i segmenti della spezzata di Lill **percorsi a ritroso** sono considerati come segmenti di lunghezza negativa.



Ad esempio, in figura il cammino risolvente del polinomio

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x^2 + 5x - 6$$

determina un angolo  $\theta$  di  $-45^\circ$ , dato che  $AO=1$  e **OX è segmento di lunghezza negativa**.

Segue che

$$-\operatorname{tg}(-45^\circ) = +1$$

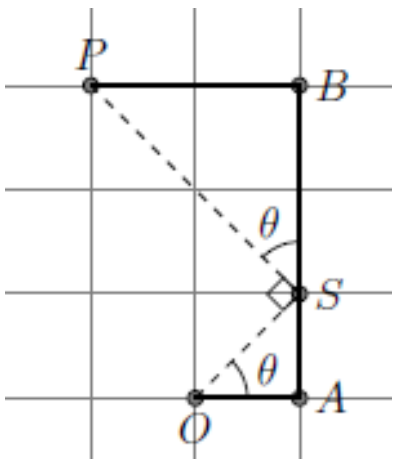
è una radice del polinomio dato.

È chiaro che si individueranno tanti cammini risolventi quante sono le radici distinte del polinomio considerato.

# La risoluzione di una quadrica

Nel caso della risoluzione di **un'equazione di 2° grado**, si può dare una dimostrazione analitica al metodo di Lill.

Si consideri il polinomio  $P(x) = x^2 + a_1x + a_0$  e la sua spezzata di Lill con origine in  $O$ . Allora si avrà che  $A(1,0)$ ,  $B(1, a_1)$  e  $P(1 - a_0, a_1)$ .



Una generica retta  $y = mx$  interseca la retta  $x = 1$  nel punto  $S(1, m)$ .

La retta perpendicolare a  $y = mx$  in  $S$  ha equazione  $y = -\frac{1}{m}(x - 1) + m$ .

Imponendo il passaggio per  $P$ , si trova

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{m}(1 - a_0 - 1) + m \Leftrightarrow ma_1 = a_0 + m^2 \\ \Leftrightarrow (-m)^2 + a_1(-m) + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

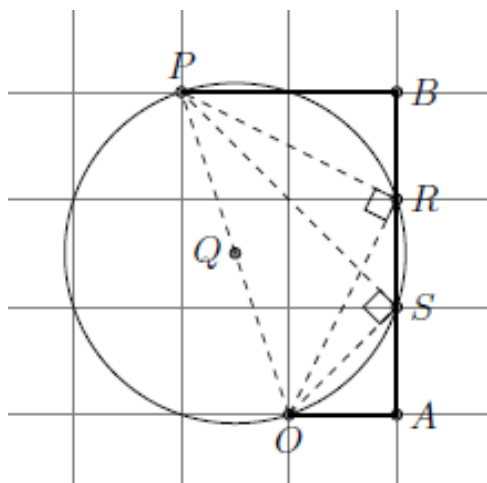
e quindi  $-m = -tg\theta$  è soluzione dell'equazione  $P(x) = 0$ .



# La risoluzione di una quadrica

Nel caso  $n = 2$ , trovare un cammino risolvente equivale a costruire un **triangolo rettangolo** di ipotenusa  $OP$  e con vertice dell'angolo retto sulla retta per  $A$  e  $B$ .

Questa costruzione si può eseguire con riga e compasso: si prende il punto medio  $Q$  del segmento  $OP$  e si traccia la circonferenza di centro  $Q$  passante per  $O$ .



Nell'esempio in figura, la circonferenza interseca il segmento  $AB$  in due punti  $R$  e  $S$ .

I triangoli  $ORP$  e  $OSP$  sono entrambi rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza.

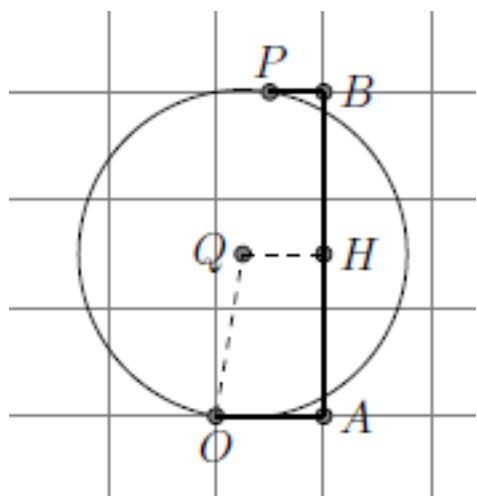
Pertanto le spezzate **OR-RP** e **OS-SP** sono due cammini risolventi per la quadrica associata.

L'esistenza dei punti d'intersezione  $R$  e  $S$  dipende dall'esistenza di radici reali per l'equazione associata.

# La risoluzione di una quadrica

Come devono essere le lunghezze dei segmenti AB e BP, ovvero i coefficienti  $b$  e  $c$  dell'equazione  $x^2 + bx + c = 0$ , affinché la circonferenza intersechi la retta AB?

Il raggio  $r$  della circonferenza deve essere maggiore o uguale alla distanza QH tra il punto Q e la retta per A e B.



Il centro Q ha coordinate  $(\frac{1-c}{2}, \frac{b}{2})$ , mentre il raggio  $r$  è dato

$$\text{da } \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{(1-c)^2}{4}}.$$

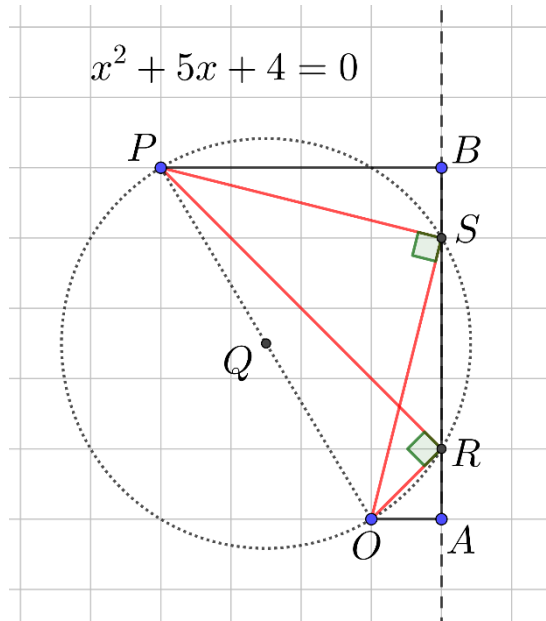
La distanza QH è pari a  $|1 - \frac{1-c}{2}|$ .

$$\text{Allora } r \geq QH \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{(1-c)^2}{4}} \geq |1 - \frac{1-c}{2}| \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} + \frac{(1-c)^2}{4} \geq \left(1 - \frac{1-c}{2}\right)^2.$$

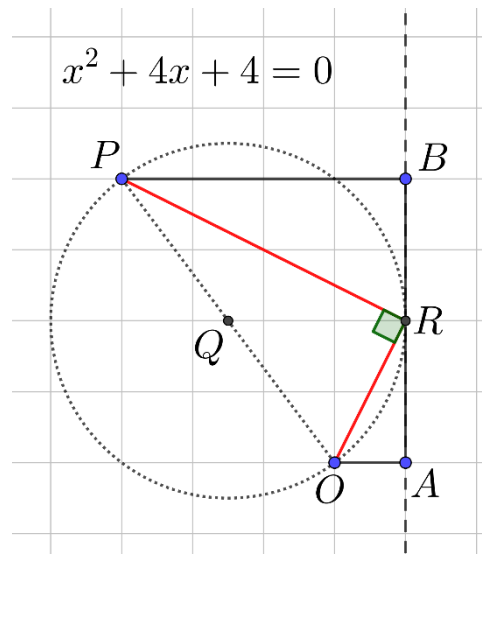
Svolgendo i calcoli, si trova la condizione  $b^2 \geq 4c$ , ovvero la nota condizione di risolubilità secondo cui il discriminante  $b^2 - 4c$  dell'equazione deve essere  $\geq 0$ .

# La risoluzione di una quadrica

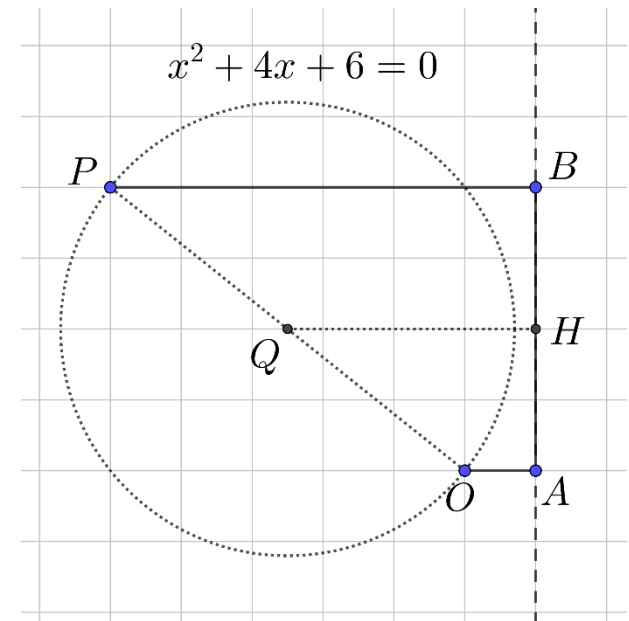
## Alcuni esempi di risoluzioni di quadriche con il metodo di Lill



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



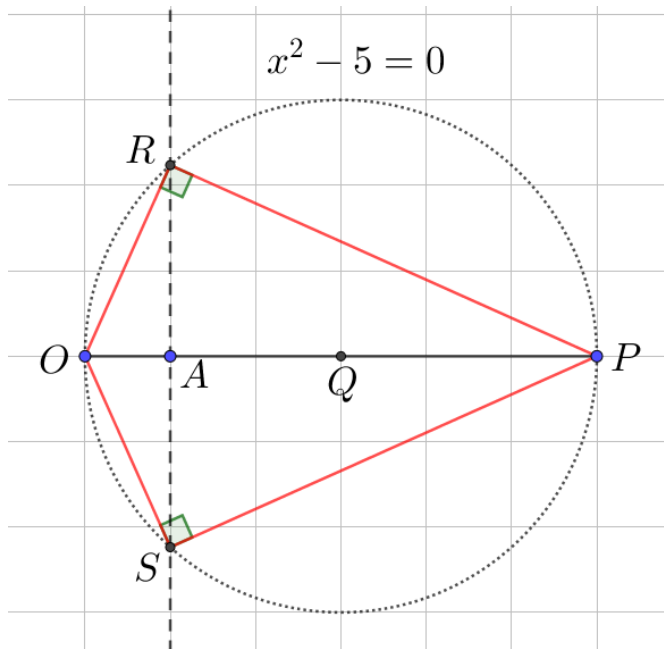
$\Delta < 0$

# La risoluzione di una quadrica

## Alcuni esempi di risoluzioni di quadriche con il metodo di Lill

Nel caso particolare di una equazione di 2° grado **pura** della forma  $x^2 - a_0 = 0$ , con  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ , la spezzata di Lill è costituita da due segmenti adiacenti OA e AP di lunghezze 1 e  $a_0$ .

La retta associata al termine mancante viene comunque messa in evidenza come retta perpendicolare ad OA passante per l'estremo A.



Le soluzioni  $\pm\sqrt{a_0}$  sono individuate dai segmenti AS e AR.

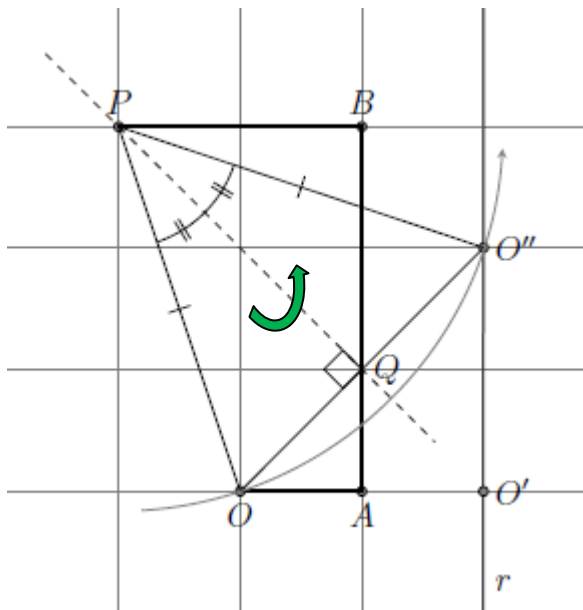
Si osserva che  $AR^2 = AS^2 = a_0$  come conseguenza del **II teorema di Euclide** applicato ai triangoli ORP e OSP in cui AR e AS sono altezze relative all'ipotenusa OP, mentre OA e AP sono proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

# La risoluzione di una quadrica

## Risoluzione di una quadrica mediante piegatura della carta

Data la spezzata di Lill associata alla quadrica, si traccia la retta  $r$  parallela al segmento  $AB$  e passante per  $O'$ , punto simmetrico di  $O$  rispetto al segmento  $AB$ .

Ora si cerca una piega passante per  $P$  che porti il punto  $O$  a sovrapporsi sulla retta  $r$ . Sia  $O''$  l'immagine di  $O$  sulla retta  $r$  e  $Q$  l'intersezione della piega con la retta passante per  $A$  e  $B$ . Allora **la lunghezza del segmento  $AQ$ , presa con il segno opportuno, è radice della quadrica considerata.**



Infatti la piega per  $P$  e  $Q$  è asse della corda  $OO''$ . Pertanto l'angolo  $OQP$  è retto.

Inoltre  $Q$ , punto medio di  $OO''$ , sta sulla retta per  $A$  e  $B$  poiché tale retta è per costruzione la parallela alla retta  $r$  passante per il punto medio del segmento  $OO'$ .

Pertanto la spezzata  $OQ$ - $QP$  è un cammino risolvente per la quadrica considerata.

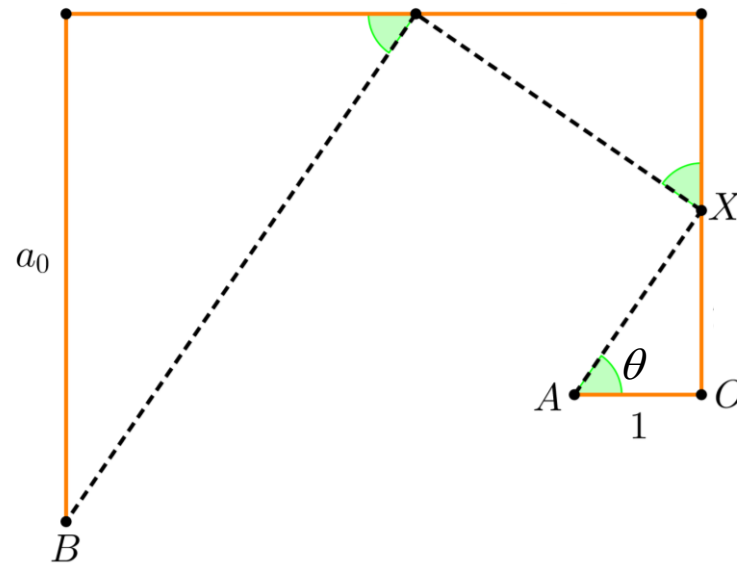
# Il metodo di Lill nel caso $n = 3$

## Il caso $n = 3$

Se il polinomio è monico e di **terzo grado**, ovvero della forma

$$P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

allora la spezzata di Lill è costituita da **quattro segmenti** di lunghezze  $1, a_2, a_1, a_0$ .



Un cammino risolvente di angolo  $\theta$ , formato da **tre segmenti**, individua **tre triangoli rettangoli simili**. Da considerazioni trigonometriche segue che

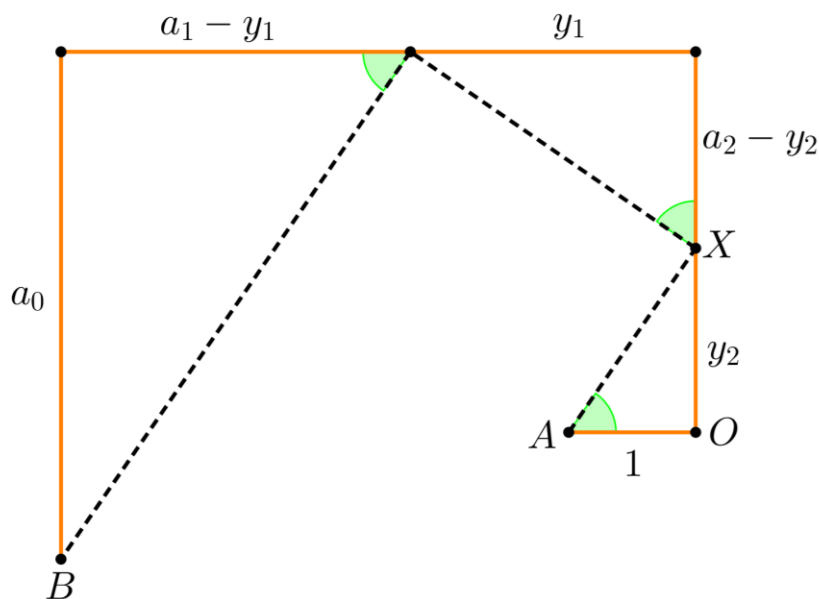
$$-\operatorname{tg} \theta = -OX$$

è radice del polinomio dato.

# Il metodo di Lill nel caso $n = 3$

Si osserva che i segmenti del cammino risolvente sono ipotenuse di **tre triangoli rettangoli simili** i cui cateti stanno sulla spezzata di Lill.

Siano  $y_2, y_1$  le lunghezze dei cateti opposti agli angoli  $\theta$  che sono parte rispettivamente dei segmenti  $a_2, a_1$ . Invece nell'ultimo triangolo il cateto opposto all'angolo  $\theta$  è proprio  $a_0$ .



Dalla trigonometria, si ha che

$$y_2 = \operatorname{tg} \theta = -\bar{x}$$

$$y_1 = \operatorname{tg} \theta (a_2 - y_2) = -\bar{x} (a_2 + \bar{x})$$

$$a_0 = \operatorname{tg} \theta (a_1 - y_1) = -\bar{x} [a_1 + \bar{x} (a_2 + \bar{x})]$$

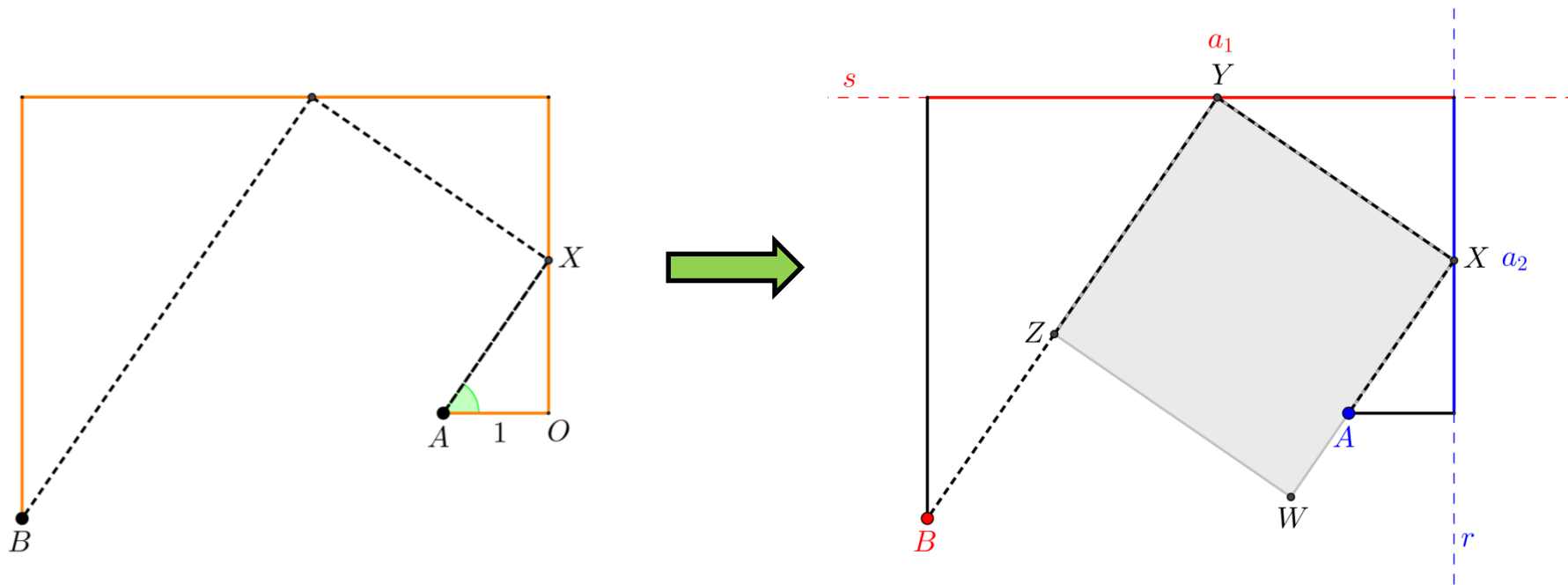
e quindi dall'ultima relazione si ha che

$$\bar{x}^3 + a_2 \bar{x}^2 + a_1 \bar{x} + a_0 = 0$$

cioè  $\bar{x} = -\operatorname{tg} \theta$  è radice del polinomio dato.

# La risoluzione della cubica

Il contributo di originalità della Beloch fu l'interpretazione del **metodo di Lill nel caso  $n=3$**  come un'applicazione del **quadrato Beloch con le rette  $r$  e  $s$  ortogonali**.



Infatti, ricercare un **cammino risolvente per una cubica** equivale a trovare un quadrato Beloch XYZW che abbia:

1. i due vertici **X** e **Y** sulle rette **r** e **s**, che contengono rispettivamente i segmenti  $a_2$ ,  $a_1$  della spezzata di Lill associata alla cubica;
2. i lati opposti **XW** e **YZ** (o i loro prolungamenti) passanti rispettivamente per il **punto iniziale A** e per il **punto finale B** della spezzata di Lill.

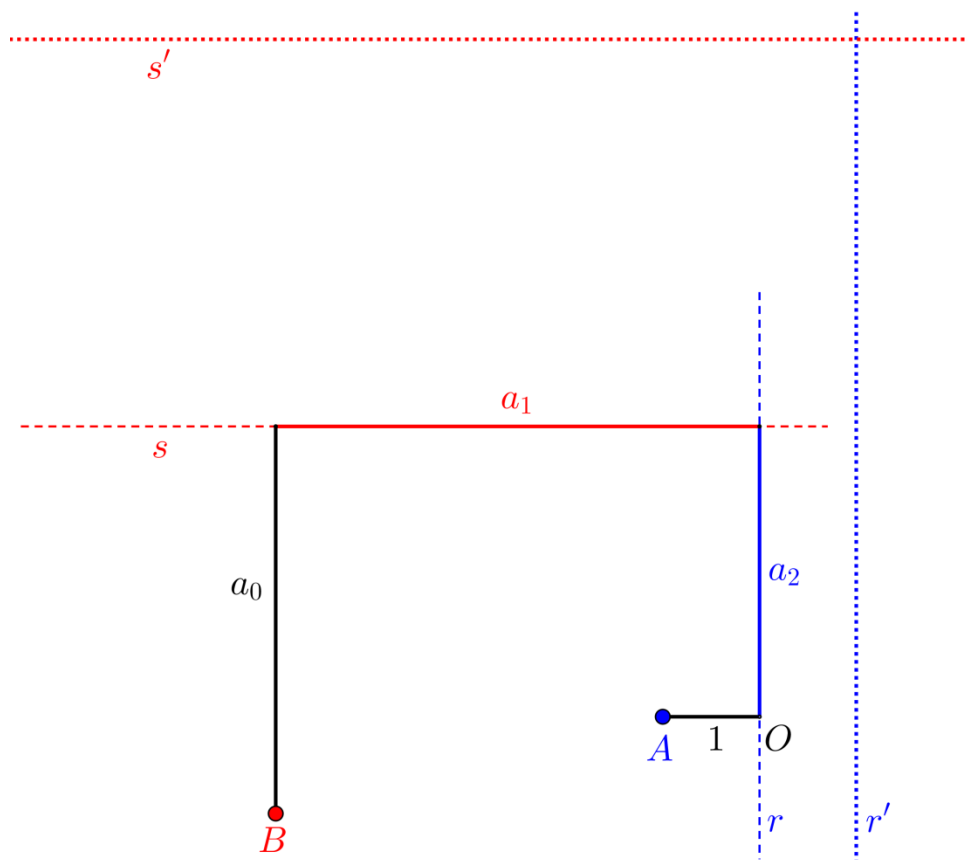


# La risoluzione della cubica

Il problema della risoluzione di una cubica è quindi ricondotto alla costruzione di un quadrato Beloch mediante la ripiegatura della carta.

Si deve individuare una **piegatura Beloch** che porti simultaneamente:

1. il **punto iniziale A** sulla retta  $r'$ ;
2. il **punto finale B** sulla retta  $s'$ .

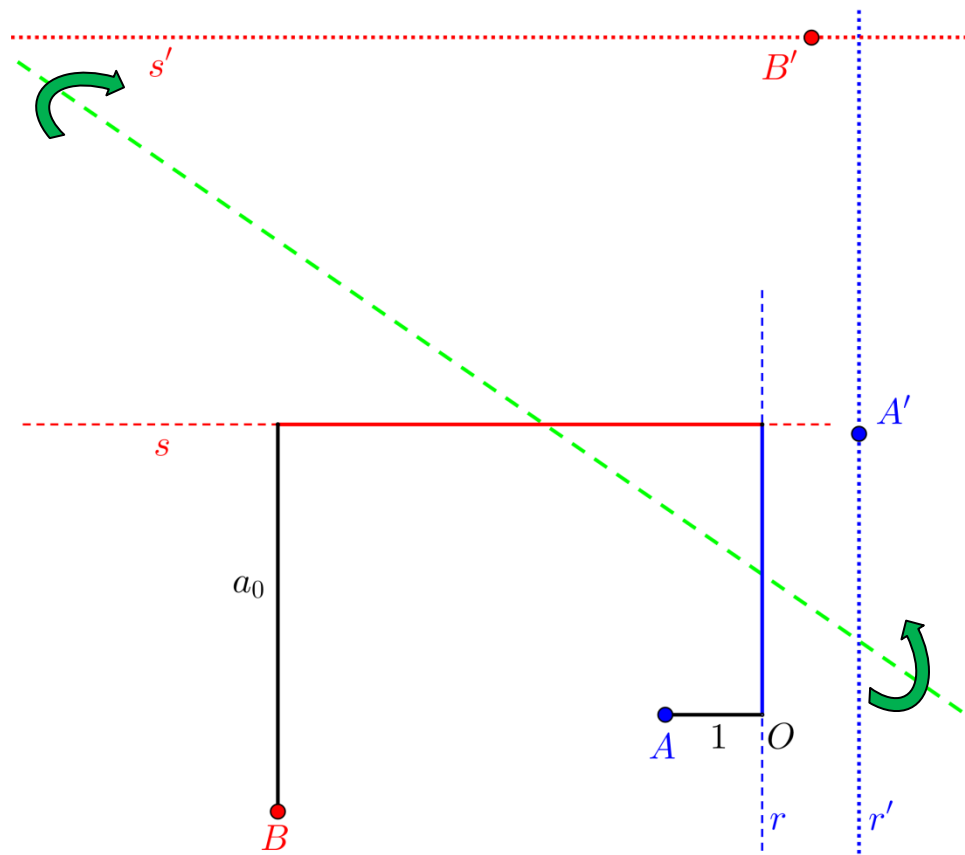


# La risoluzione della cubica

Il problema della risoluzione di una cubica è quindi ricondotto alla costruzione di un quadrato Beloch mediante la ripiegatura della carta.

Si deve individuare una **piegatura Beloch** che porti simultaneamente:

1. il **punto iniziale A** sulla retta  $r'$ ;
2. il **punto finale B** sulla retta  $s'$ .

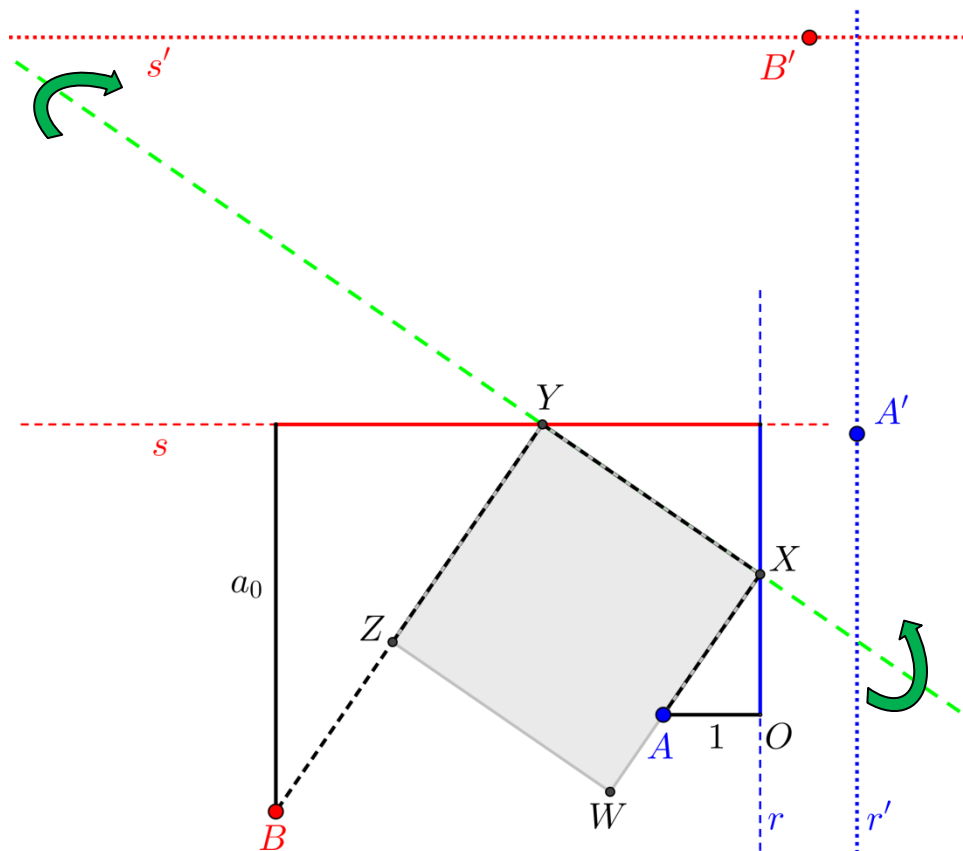


# La risoluzione della cubica

Il problema della risoluzione di una cubica è quindi ricondotto alla costruzione di un quadrato Beloch mediante la ripiegatura della carta.

Si deve individuare una **piegatura Beloch** che porti simultaneamente:

1. il **punto iniziale A** sulla retta  $r'$ ;
2. il **punto finale B** sulla retta  $s'$ .

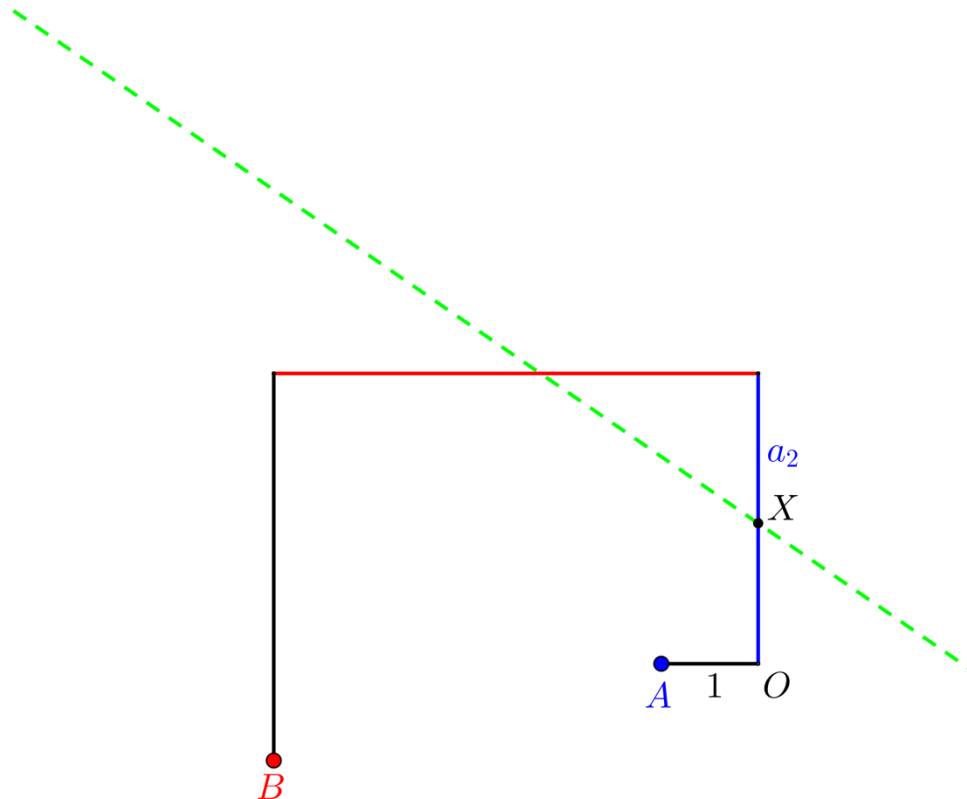


# La risoluzione della cubica

In particolare il **punto X**, dato dall'intersezione tra la linea di piegatura e la retta che contiene il segmento  $a_2$ , fornisce una **soluzione reale dell'equazione cubica**

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

in quanto la lunghezza del **segmento OX** (presa con il segno opportuno) risulta essere una radice del polinomio considerato.

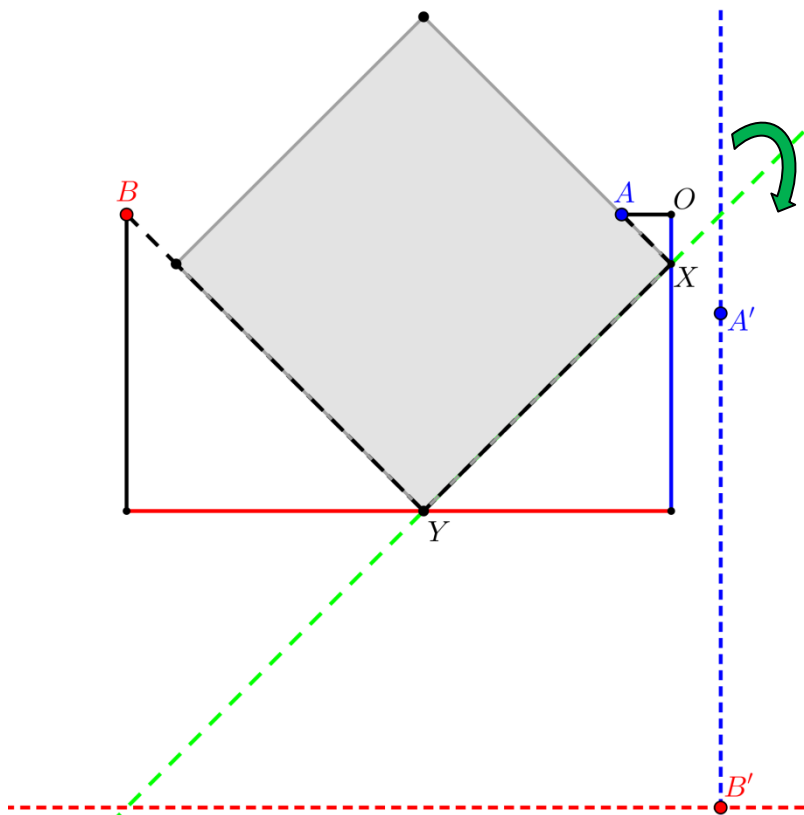


# La risoluzione della cubica

Ad esempio, se si vuole risolvere l'equazione cubica

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

basta disegnare su un foglio di carta trasparente la spezzata di Lill associata alla cubica e applicare il **metodo Beloch**.



La **linea di piegatura** intersecherà il **segmento blu** associato al secondo coefficiente nel punto **X**.

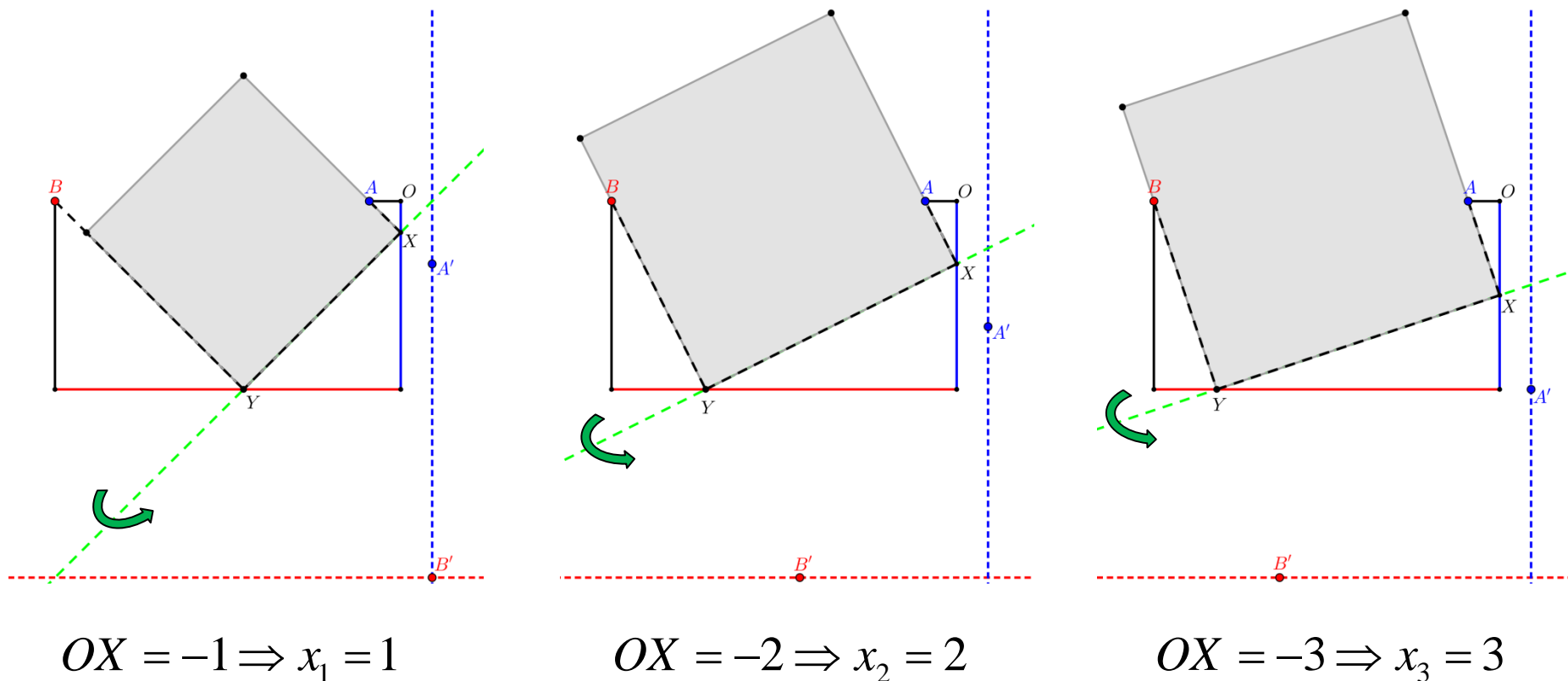
Tenendo presente l'orientamento dei segmenti, si avrà che **OX = -1** e quindi una soluzione dell'equazione data sarà **x = 1**.

# La risoluzione della cubica

In realtà, l'equazione cubica

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

ha **tre radici reali**. Infatti si possono individuare **tre piegature Beloch** che portano **A** e **B** rispettivamente sulle rette **r'** e **s'**. Di conseguenza i **tre quadrati Beloch**, associati ai rispettivi cammini risolventi, localizzano le tre soluzioni.

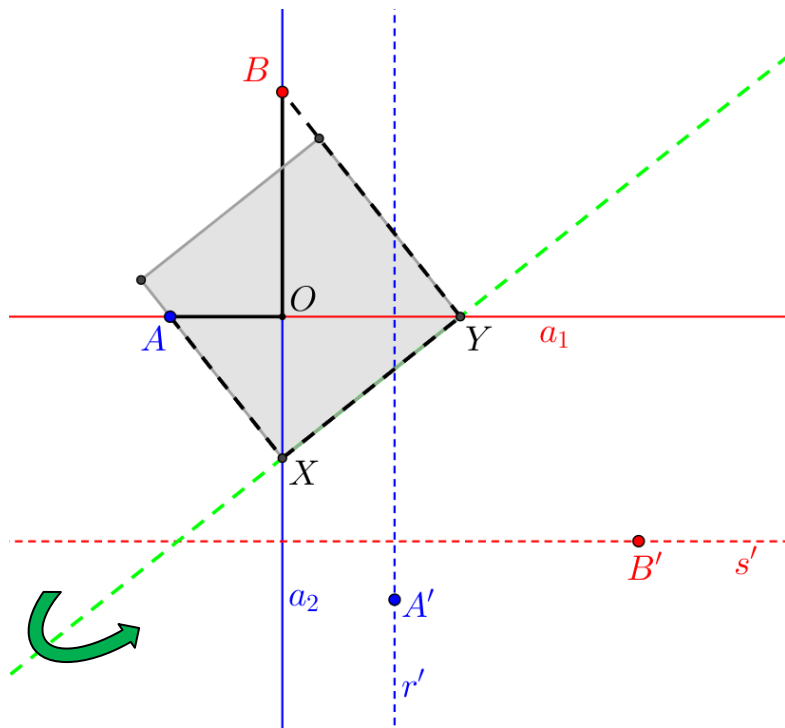


# La duplicazione del cubo

**Margherita Beloch provò che tutti i problemi di terzo grado, e di conseguenza di quarto grado, possono essere risolti col metodo del ripiegamento della carta.**

In particolare, è possibile risolvere il problema classico della **duplicazione del cubo**, costruendo un segmento OX di lunghezza  $\sqrt[3]{2}$  come soluzione della cubica

$$x^3 - 2 = 0$$



Con il metodo Lill-Beloch si ritrova la costruzione legata alla ricerca di **due medie proporzionali** per i segmenti

$$AO = 1 \quad \text{e} \quad OB = 2,$$

che Sundara Row riteneva impossibile da eseguire con i metodi origami.

# L'articolo di Luigi Tenca

Nel 1949 Luigi Tenca pubblica sul *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* un articolo intitolato ***Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio.***

## **Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio.**

Nota di LUIGI TENCA (a Firenze)

**Sunto.** - Viene esposto, in forma riassuntiva, il metodo di risoluzione dei problemi geometrici per mezzo della piegatura del foglio, metodo che nella sua trattazione generale è poco conosciuto e quindi poco usato ed apprezzato.

Non ci risulta invece consigliata in nessun testo la risoluzione sistematica dei problemi geometrici ricorrendo alla piegatura del foglio, esercizi pure istruttivi ed interessanti, la questione è ora quasi dimenticata: ne trattò anni sono, in un suo corso di matematiche complementari, la Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH della Università di Ferrara (\*).

Alcuni autori di libri di testo di geometria per le scuole elementari e per le scuole secondarie inferiori e alcuni insegnanti ricorrono alle volte alla piegatura per verificare, nella geometria piana, proprietà sull'eguaglianza di segmenti, di angoli, di poligoni e sull'equivalenza di poligoni; alcuni autori di libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori ricorrono alle volte alla piegatura per illustrare il contenuto di alcuni postulati, per dimostrazioni intuitive.



# L'articolo di Luigi Tenca

Nel 1949 Luigi Tenca pubblica sul *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* un articolo intitolato ***Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio.***

Ci limitiamo ad esporre, per la sua semplicità, la risoluzione della Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH (\*) del problema della ricerca di una tangente reale propria comune a due parabole date nel foglio mediante i loro fuochi e le loro direttrici.

Siano date le parabole rispettivamente di fuoco  $A$  e direttrice  $d_a$  di fuoco  $B$  e direttrice  $d_b$ : basta ripiegare il foglio in modo che  $d_a$  e  $d_b$  vengano rispettivamente a passare per  $A$  e  $B$ . Lo spigolo della piega ottenuta dà, per una proprietà nota, una tangente comune alle due parabole: il problema può avere una, due o tre soluzioni *distinte* reali, o nessuna.

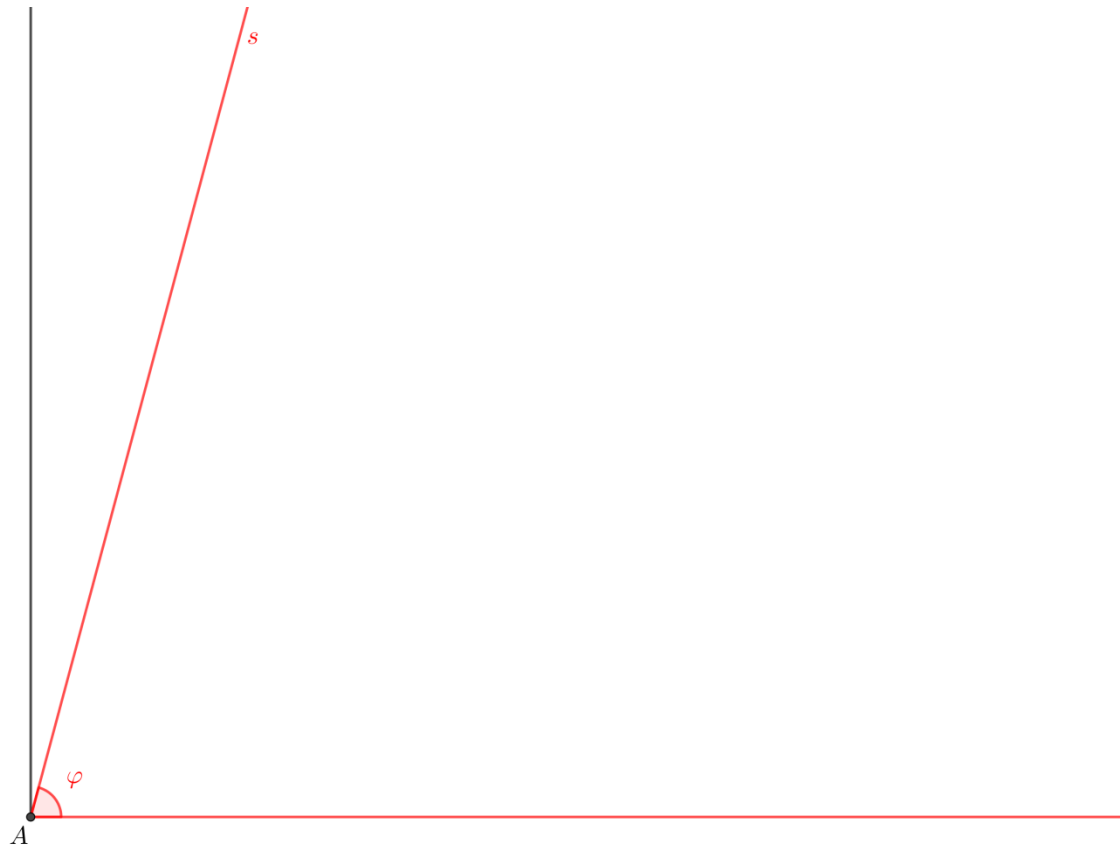
La Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH risolve con questa piegatura, fra altri, il problema delle due medie proporzionali (\*)<sub>b</sub>; si può inoltre risolvere il problema della trisezione dell'angolo, ne viene quindi che con tutte le piegature sopra indicate si possono risolvere tutti i problemi di 3° grado, quando gli elementi noti sono dati da spigoli di pieghe e punti grafici e quindi gli elementi richiesti sono rappresentabili allo stesso modo.

Non semplici e pratiche riescono tutte le risoluzioni: oltre quelle sopra indicate della Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH, è semplice, fra altre, la sua risoluzione del problema della duplicazione del cubo (\*)<sub>b</sub> che ricorda la prima di MENECEO (\*)<sub>I,f</sub>; molto meno semplice la trisezione dell'angolo, altre riescono troppo complicate.

# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

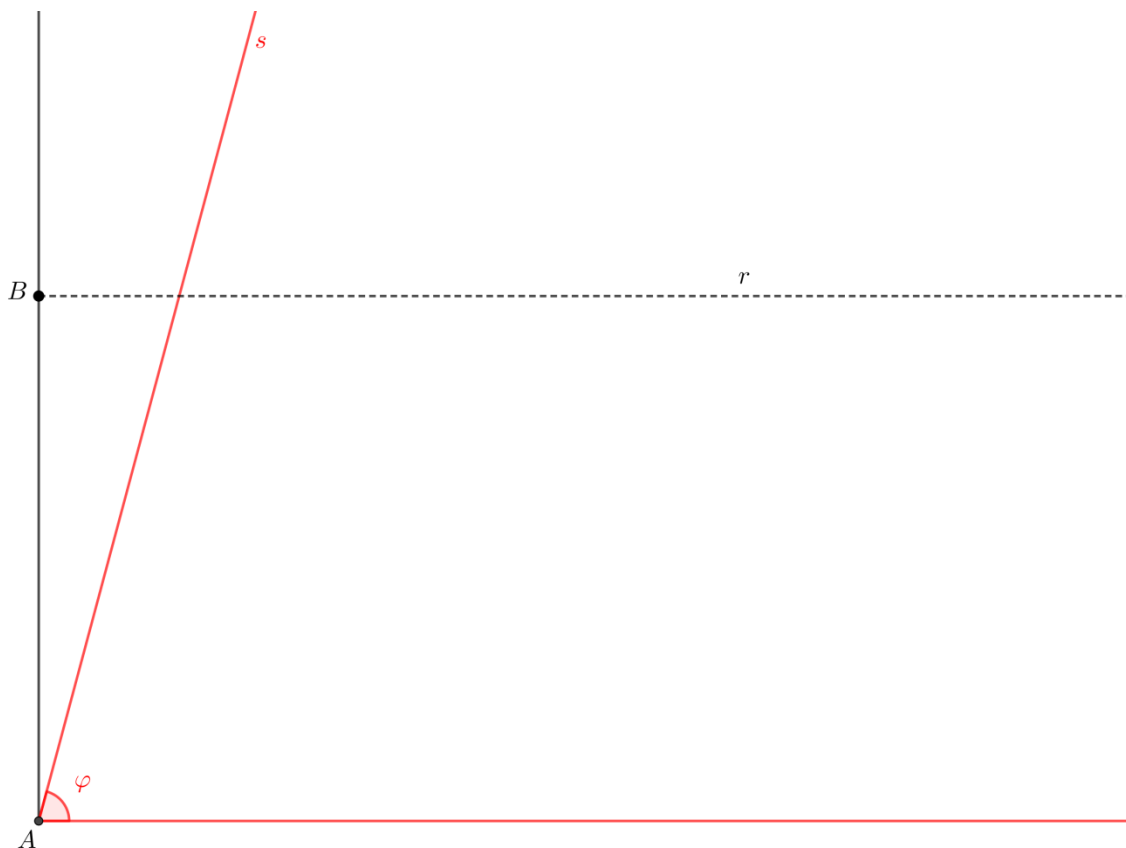
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

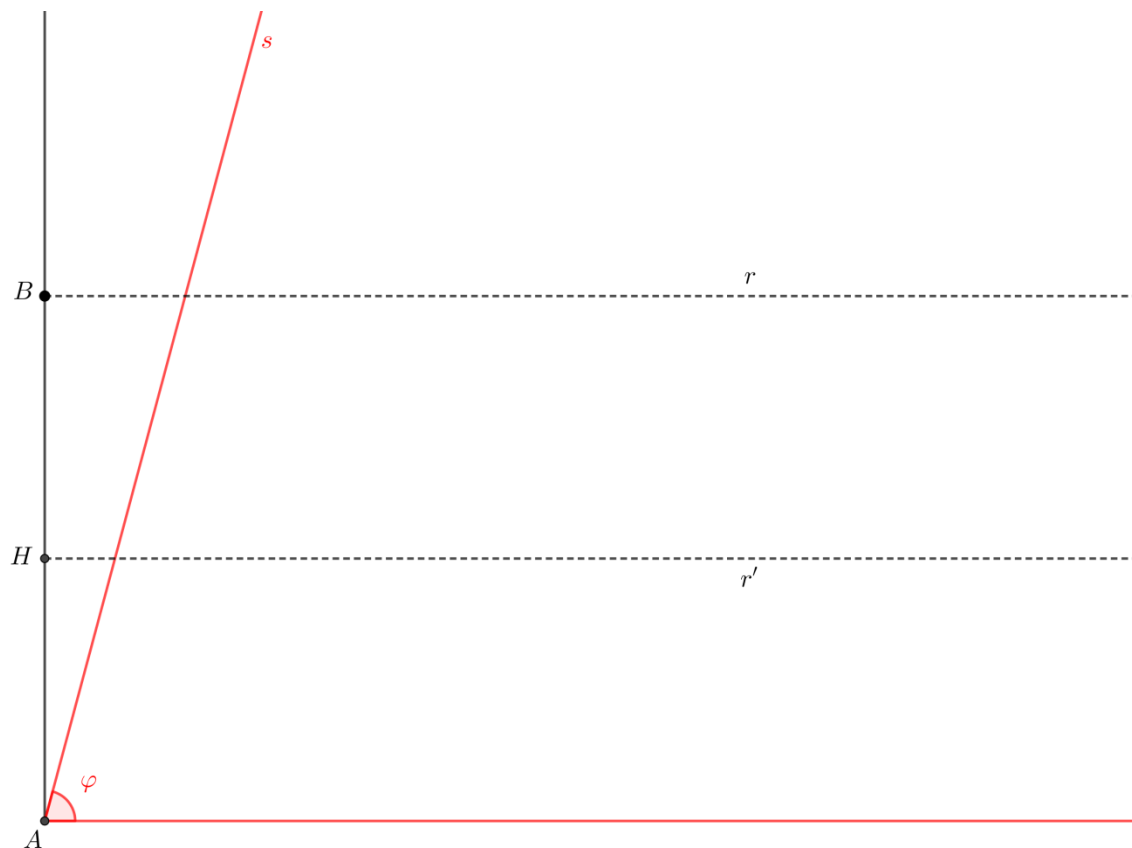
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

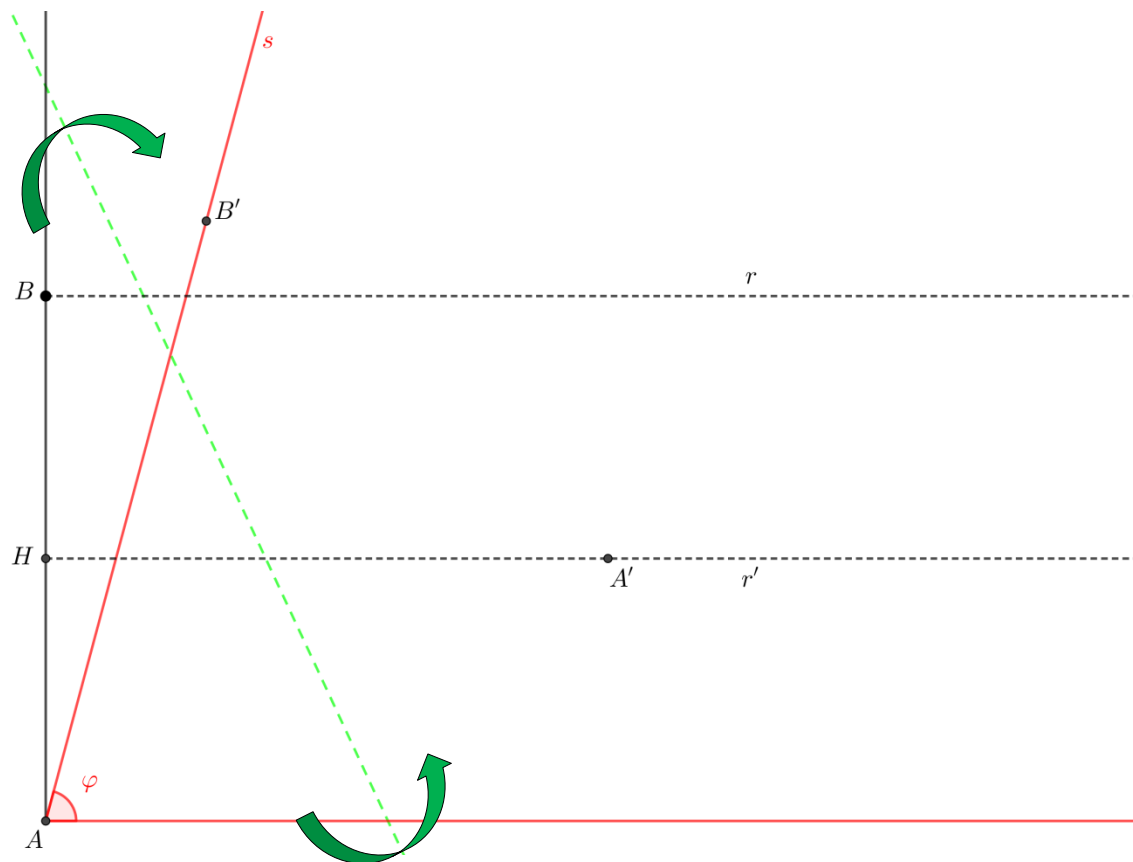
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

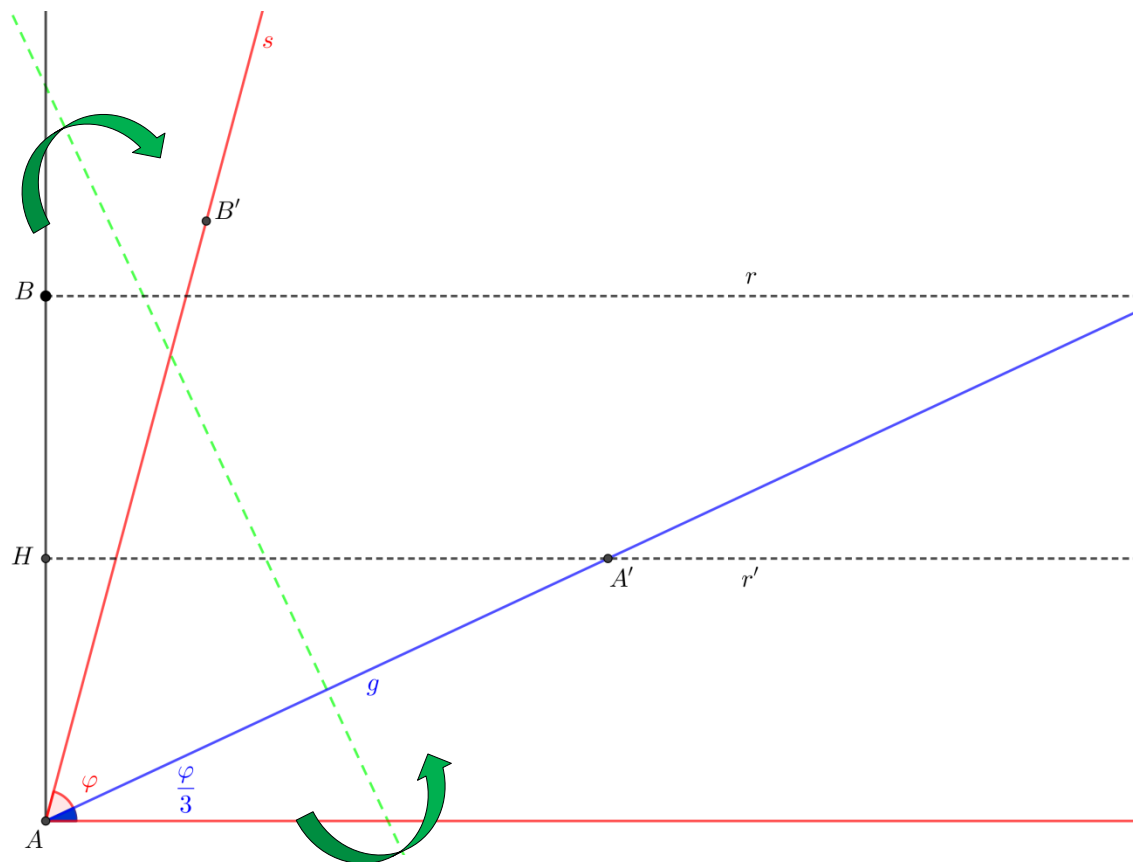
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

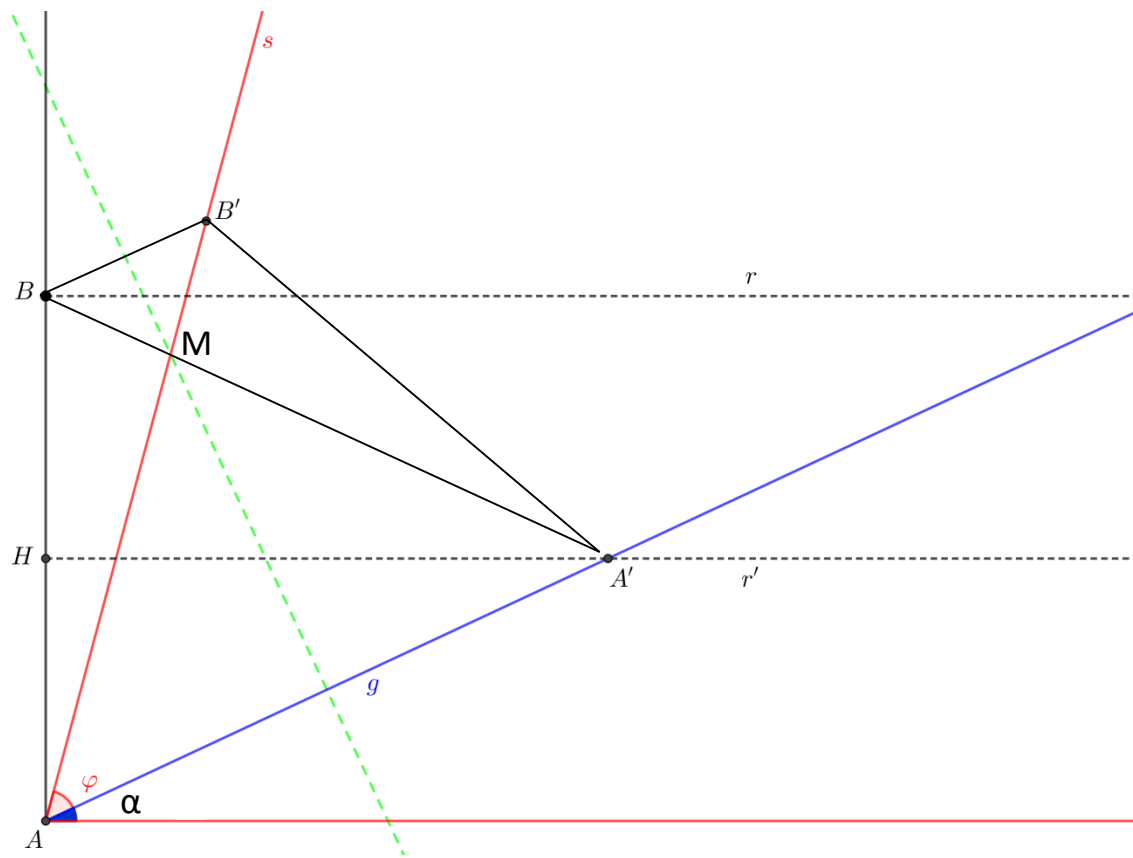
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

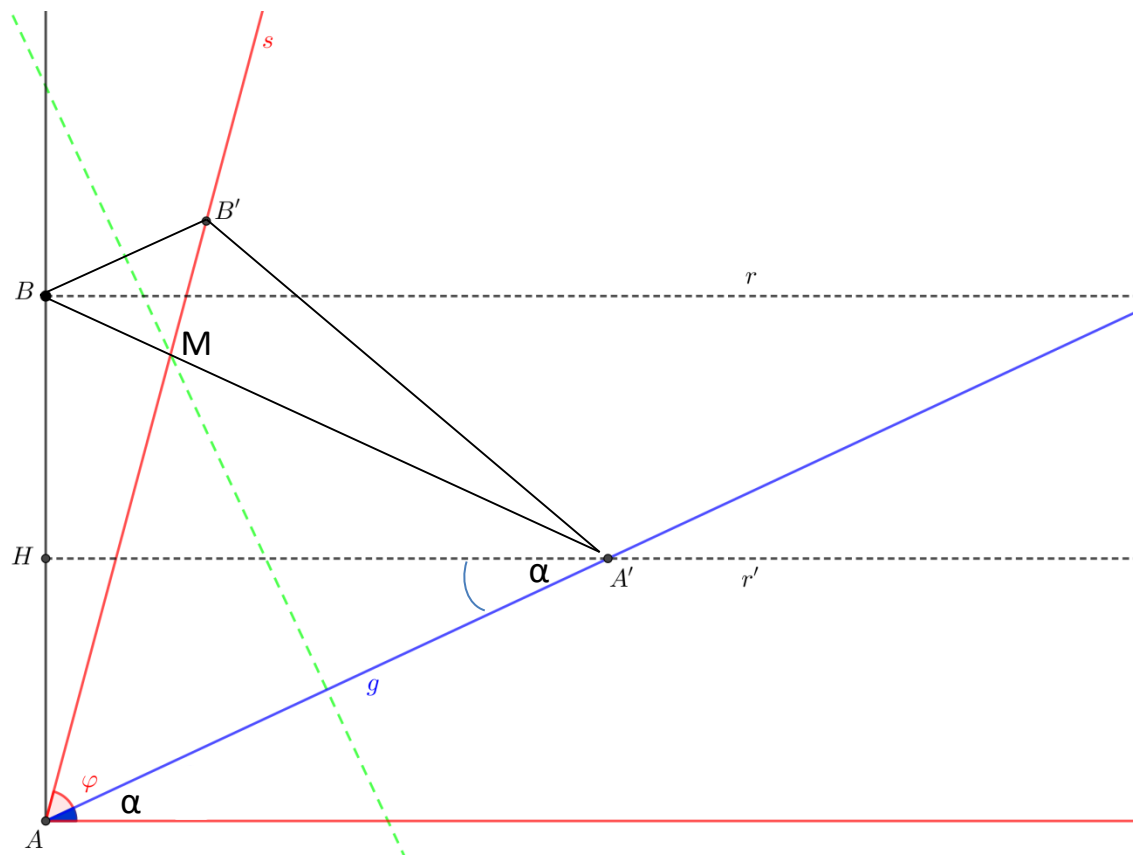
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

## Metodo di Hisashi Abe (1984)

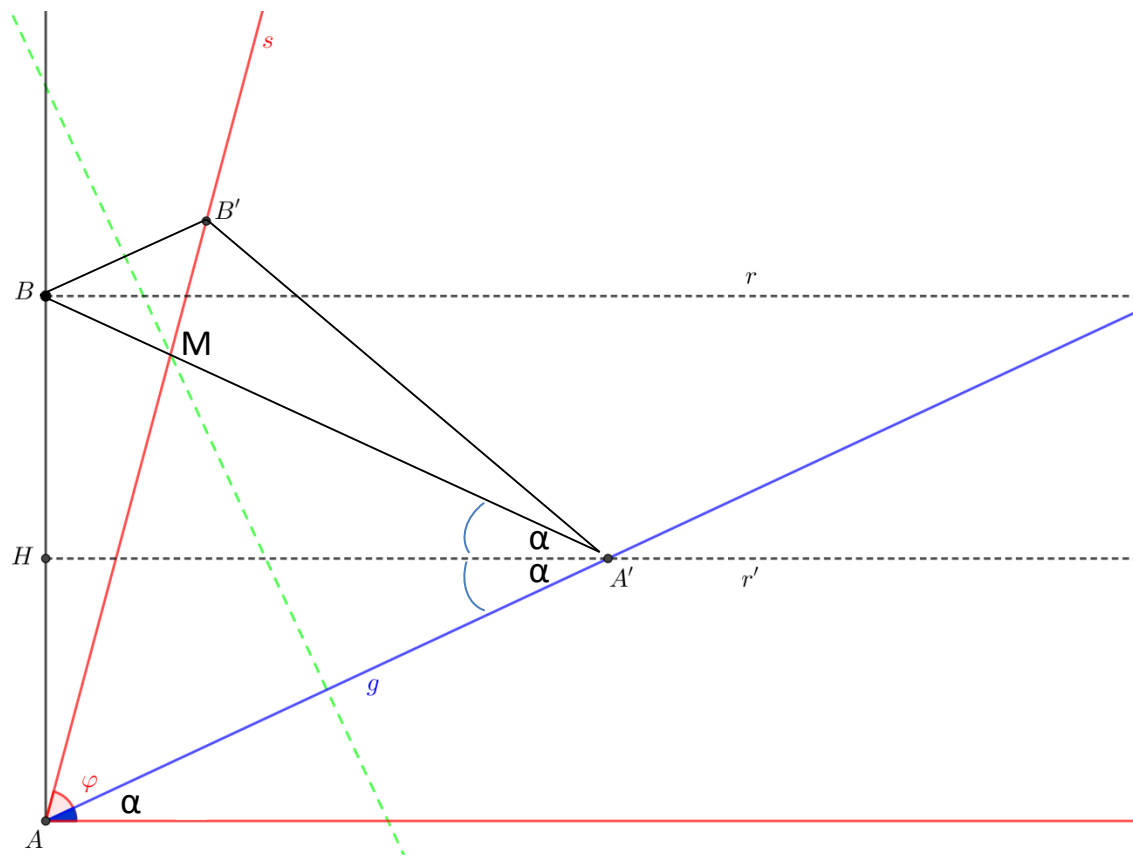




# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

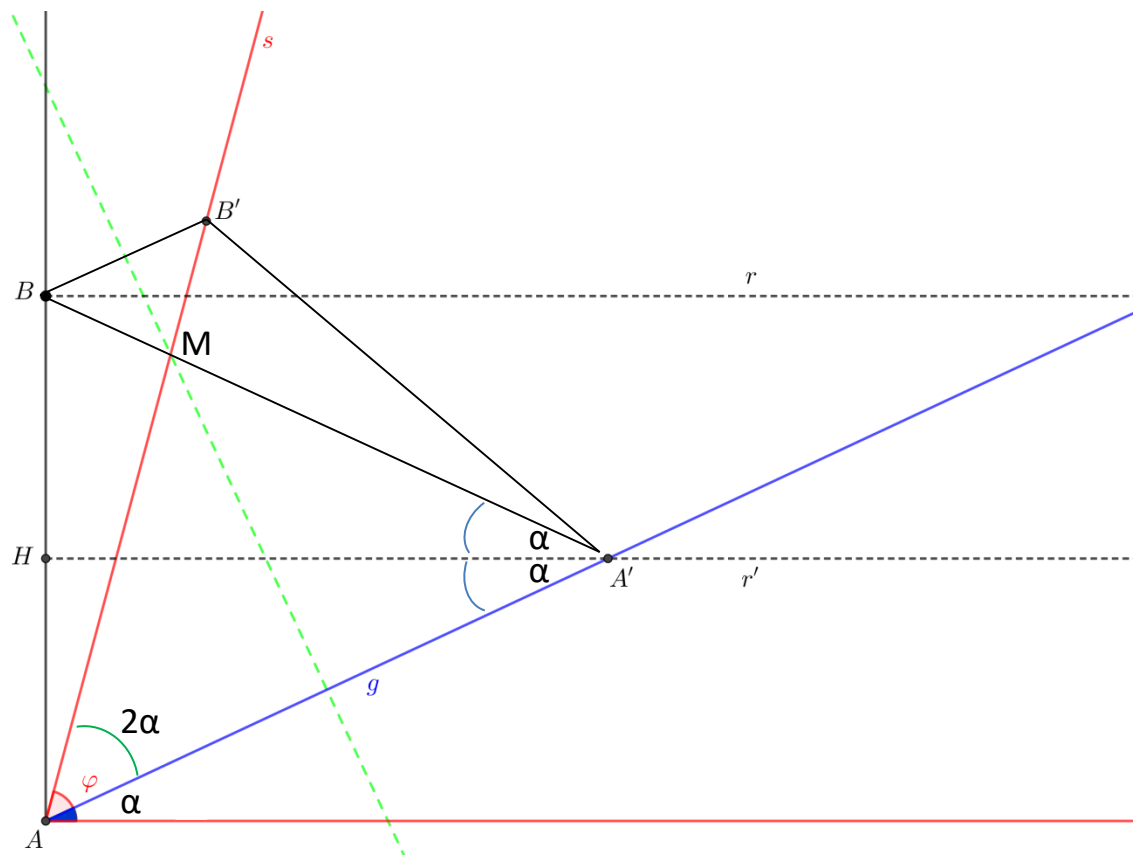
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



# La trisezione dell'angolo

Anche il problema classico della **trisezione di un angolo** è un problema di terzo grado, impossibile da risolvere con l'uso di riga e compasso, che può essere risolto con il metodo Lill-Beloch. Tuttavia il procedimento è piuttosto laborioso.

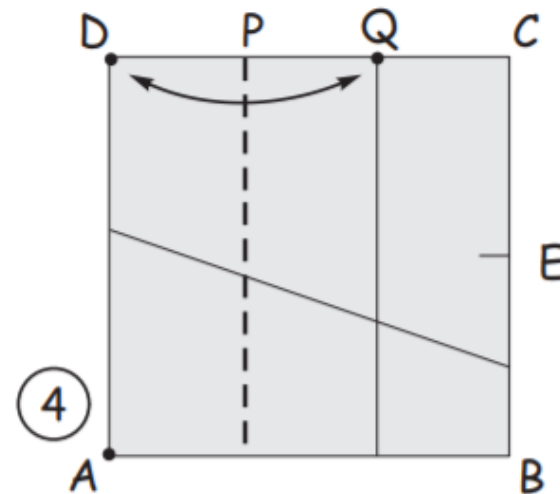
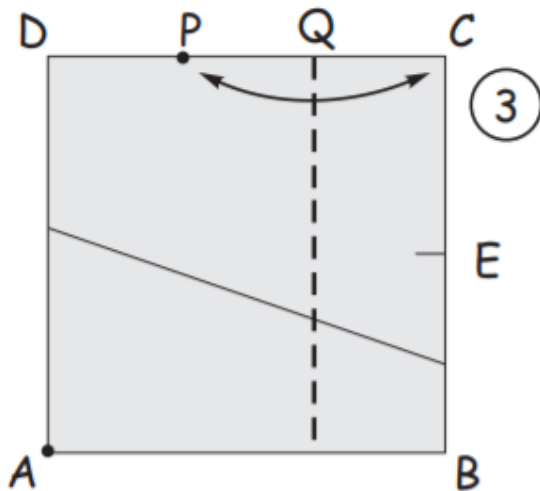
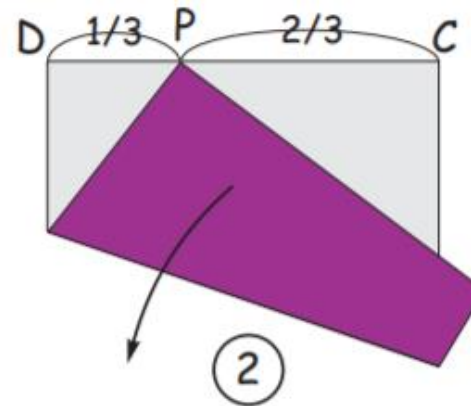
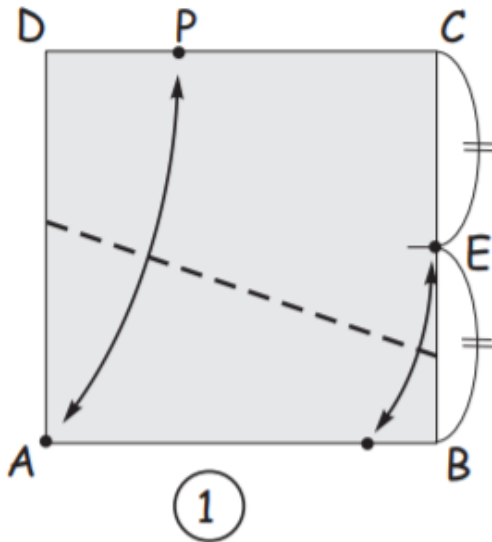
## Metodo di Hisashi Abe (1984)



$$\begin{aligned} \varphi &= 2\alpha + \alpha \\ &\Downarrow \\ \varphi &= 3\alpha \\ &\Downarrow \\ \alpha &= \frac{\varphi}{3} \end{aligned}$$

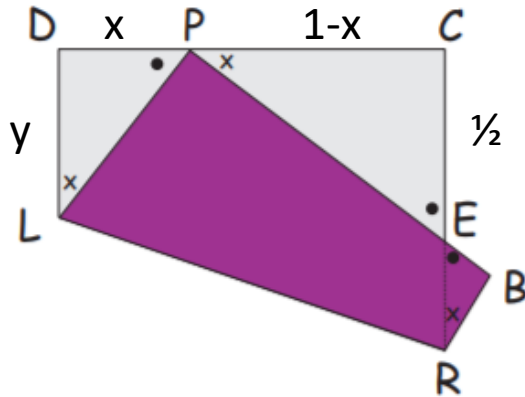
# La trisezione di un segmento

## Metodo di Kazuo Haga



# La trisezione di un segmento

## Metodo di Kazuo Haga



I triangoli DPL, PCE, EBR sono simili.

Posto  $DC = 1$ ,  $DP = x$ ,  $DL = y$ ,  $PC = 1-x$ ,  $CE = \frac{1}{2}$ ,  
si ha che  $x : y = \frac{1}{2} : (1-x)$   
da cui  $y = 2x(1-x)$ .

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo DPL si ha che

$$x^2 + 4x^2(1-x)^2 = [1 - 2x(1-x)]^2$$

$$x^2 + 4x^2(1 + x^2 - 2x) = (1 - 2x + 2x^2)^2$$

$$x^2 + 4x^2 + 4x^4 - 8x^3 = 1 + 4x^2 + 4x^4 - 4x + 4x^2 - 8x^3$$

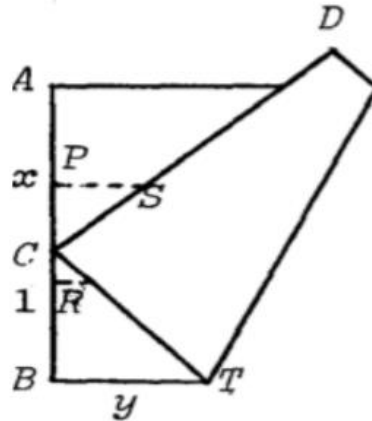
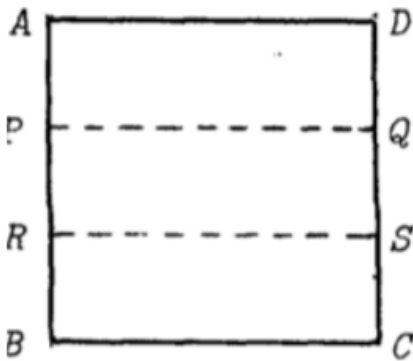
$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3}$$

da cui  $x_1 = 1$  (soluzione non accettabile) e  $x_2 = \frac{1}{3}$ . Quindi  $DP = \frac{1}{3} DC$ .

# La duplicazione del cubo

## Metodo di Peter Messer (1986)

Dato un quadrato ABCD diviso in tre parti uguali dalle rette parallele PQ e RS, si pieghi il punto C su AB e contemporaneamente il punto S su PQ. Allora  $\frac{AC}{CB} = \sqrt[3]{2}$ .



Sia  $CB = 1$ ,  $AC = x$ ,  $BT = y$ .

Allora il lato del quadrato è  $1+x$  e  $CT = 1+x-y$ .

Per il teorema di Pitagora applicato a CBT, vale che  $1 + y^2 = (1 + x - y)^2$

da cui  $y = \frac{x^2+2x}{2x+2}$ . (\*)

Ora si considerano i triangoli simili CPS e CBT.

Si ha che  $PC = AC - AP = x - \frac{1+x}{3} = \frac{2x-1}{3}$  e  $CS = \frac{1+x}{3}$ . Vale allora che

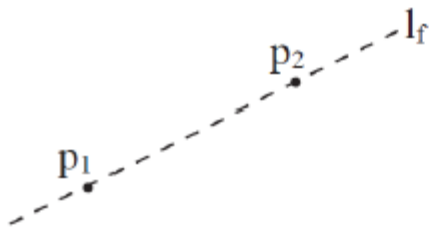
$$CS:PC = CT:BT \Leftrightarrow \frac{(1+x)}{3} : \frac{(2x-1)}{3} = (1+x-y):y \Leftrightarrow y = \frac{2x^2+x-1}{3x}. (**)$$

Da (\*) e (\*\*) si ricava che  $3x(x^2 + 2x) = (2x + 2)(2x^2 + x - 1)$   
da cui  $x^3 = 2$  ovvero  $x = \sqrt[3]{2}$ .

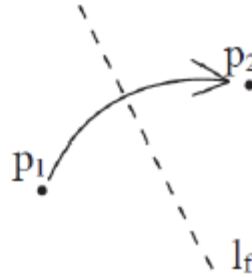
# Gli assiomi di Huzita-Justin-Hatori

In occasione del *First International Meeting of Origami Science and Technology* (Ferrara, 6-7 Dicembre 1989), **Humiaki Huzita** (1924-2005) presenta per la prima volta un **sistema assiomatico** per la geometria origami.

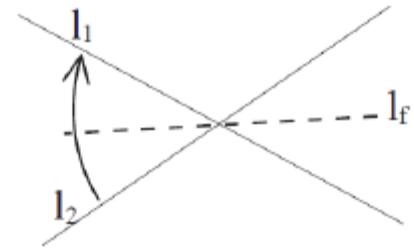
## I sei assiomi di Huzita



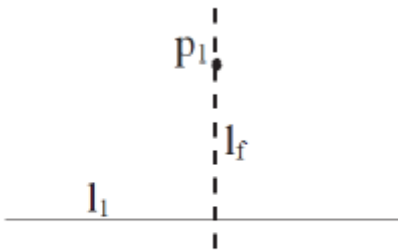
Assioma H1



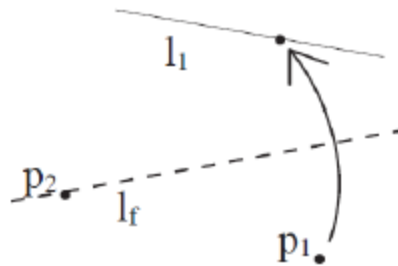
Assioma H2



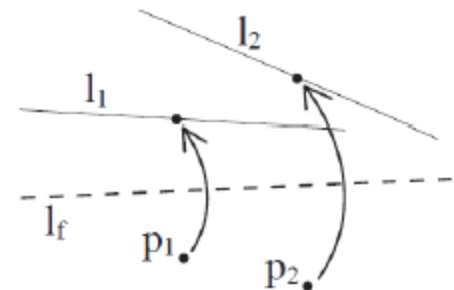
Assioma H3



Assioma H4



Assioma H5

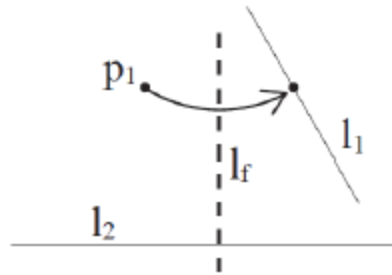


Assioma H6

# Gli assiomi di Huzita-Justin-Hatori

Nello stesso anno **Jacques Justin** aveva presentato una lista di **sette operazioni** origami distinte, includendone una trascurata da Huzita.

Questo **settimo assioma** viene riscoperto nel 2001 da **Koshiro Hatori**.



Assioma H7

**Assioma H7.** *Dati un punto  $p_1$  e due rette  $l_1$  e  $l_2$ , esiste una piega perpendicolare a  $l_2$  che porta  $p_1$  su  $l_1$ .*



**Il sistema assiomatico di Huzita-Justin-Hatori è completo?**

# L'algebra del *paper-folding* di Huzita-Scimemi

Nel 1989 **Benedetto Scimemi** propone una definizione di **punto costruibile per *paper-folding***.

**Definizione.** Un punto  $P$  è *origami-costruibile* se può essere ottenuto mediante una costruzione origami che prevede l'utilizzo dei primi sei assiomi di Huzita.

Segue una definizione di **numero origami-costruibile** e una sua caratterizzazione algebrica in termini di estensioni di campi.

**Definizione.** Un numero complesso  $z = a + ib$  si dice *origami-costruibile* se il punto  $P(a, b)$  è origami-costruibile.

**Teorema.** Un numero complesso  $z$  è origami-costruibile se e solo se il grado

$$[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 2^r 3^s$$

per qualche intero  $r, s$  non negativo.

In particolare, i numeri costruibili con riga e compasso sono origami-costruibili.



# La costruzione dell' $n$ -agono regolare

## Critério di costruibilità per i poligoni regolari

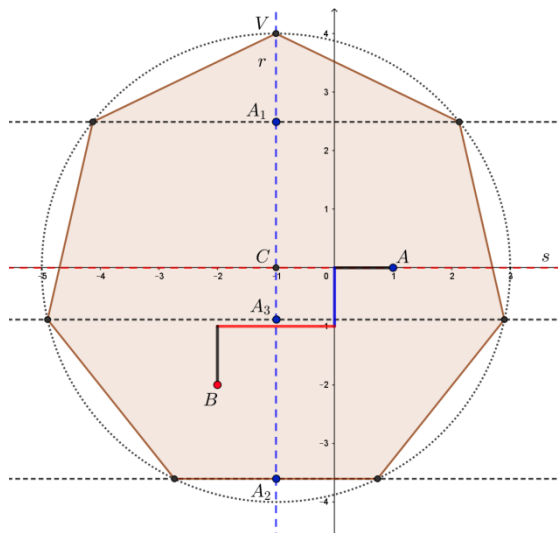
Un poligono regolare di  $n$  lati è costruibile per *paper-folding* se e solo se la scomposizione in fattori primi di  $n$  è della forma

$$2^r 3^s p_1 p_2 \dots p_m$$

dove  $r, s$  sono interi non negativi e i  $p_i$  sono primi distinti della forma

$$2^a 3^b + 1$$

per qualche intero  $a, b$  non negativo (**primi di Pierpont**).

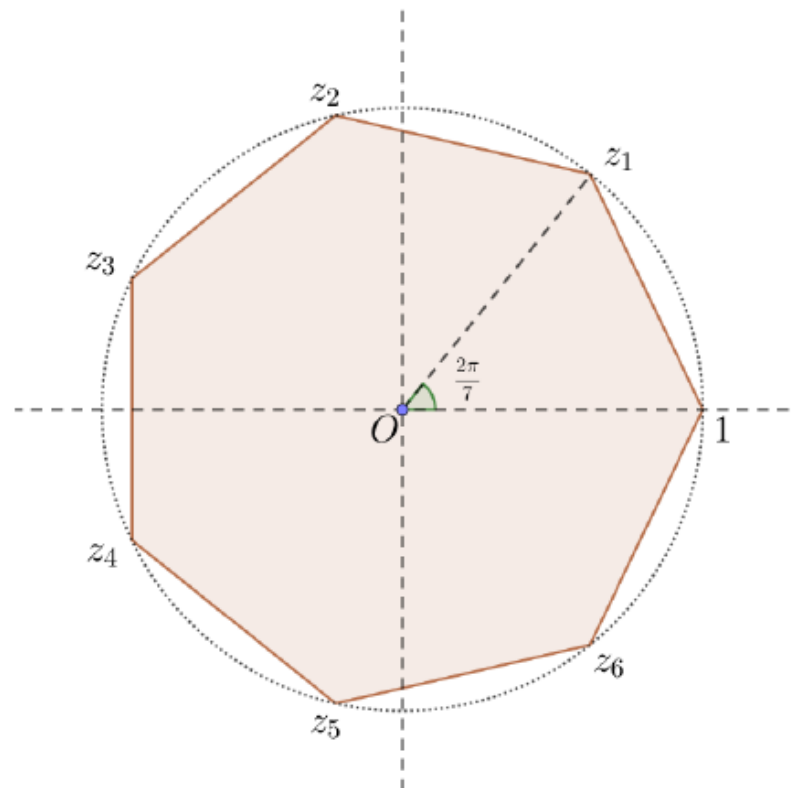


L'**ettagono regolare** è il poligono regolare con il minor numero di lati che non può essere costruito con riga e compasso, ma può essere costruito via origami.

# La costruzione dell'ettagono regolare

I vertici di un ettagono regolare inscritto in una circonferenza unitaria con un vertice in  $(1, 0)$  rappresentano le radici settime dell'unità nel campo complesso  $\mathbb{C}$ , ovvero le radici complesse dell'equazione  $z^7 - 1 = 0$ . Tali soluzioni sono nella forma

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{7}\right) = e^{\frac{2\pi k i}{7}} \quad k = 0, 1, \dots, 6.$$



# La costruzione dell'ettagono regolare

Tra queste radici, l'unica reale è  $z_0 = 1$ . Pertanto le radici complesse  $z_1, z_2, \dots, z_6$  devono essere le radici del secondo fattore che compare nella scomposizione

$$z^7 - 1 = (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Dato che la somma delle radici di un polinomio di grado  $n$  è pari all'opposto del coefficiente del termine di grado  $n - 1$ , deve valere che

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = -1. \quad (1)$$

Inoltre si osserva che

$$z_6 = z_1^{-1}$$

$$z_5 = z_2^{-1}$$

$$z_4 = z_3^{-1}$$

vale a dire che  $z_4, z_5, z_6$  sono rispettivamente i coniugati di  $z_3, z_2, z_1$ . Allora la (1) diventa

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_3^{-1} + z_2^{-1} + z_1^{-1} = -1. \quad (2)$$

Si nota che

$$z_k + z_k^{-1} = 2\Re z_k = 2 \cos \left( \frac{2\pi k}{7} \right) \quad k = 1, 2, 3$$

e quindi la (2) diventa

$$2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} \right) + 2 \cos \left( \frac{4\pi}{7} \right) + 2 \cos \left( \frac{6\pi}{7} \right) = -1. \quad (3)$$

# La costruzione dell'ettagono regolare

Posto  $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ , la (3) diventa

$$2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (3\alpha) = -1 \quad (4)$$

dove

$$\cos (2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

e

$$\begin{aligned} \cos (3\alpha) &= \cos (2\alpha + \alpha) = \cos (2\alpha) \cos \alpha - \sin (2\alpha) \sin \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4), si trova che

$$2 \cos \alpha + 2 (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 (4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha) = -1$$

$$(2 \cos \alpha)^3 + (2 \cos \alpha)^2 - 2 (2 \cos \alpha) - 1 = 0$$

ovvero  $2 \cos \alpha$  è soluzione dell'equazione di terzo grado

$$\boxed{x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0} \quad (5)$$

vale a dire che  $2 \cos \left(\frac{2\pi}{7}\right)$  è una radice reale della (5).

# La costruzione dell'ettagono regolare

Pertanto  $z_1 + z_1^{-1}$  è uno zero del polinomio  $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ , quindi lo si può scomporre come

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x - (z_1 + z_1^{-1})) (x^2 + (z_1 + z_1^{-1} + 1)x + z_2 + z_1 + z_6 + z_5)$$

in cui il secondo fattore è un trinomio monico di secondo grado. Al fine di scomporlo, si cercano due numeri reali la cui somma è  $z_1 + z_1^{-1} + 1$  e il cui prodotto è  $z_2 + z_1 + z_6 + z_5$ . Dalla (2) si osserva che

$$z_1 + z_1^{-1} + 1 = -(z_2 + z_2^{-1}) - (z_3 + z_3^{-1}) = -(z_2 + z_5) - (z_3 + z_4)$$

e inoltre vale che

$$[-(z_2 + z_5)] [-(z_3 + z_4)] = z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_5 z_3 + z_5 z_4 = z_5 + z_6 + z_1 + z_2.$$

Pertanto il polinomio  $P(x)$  si scompone come

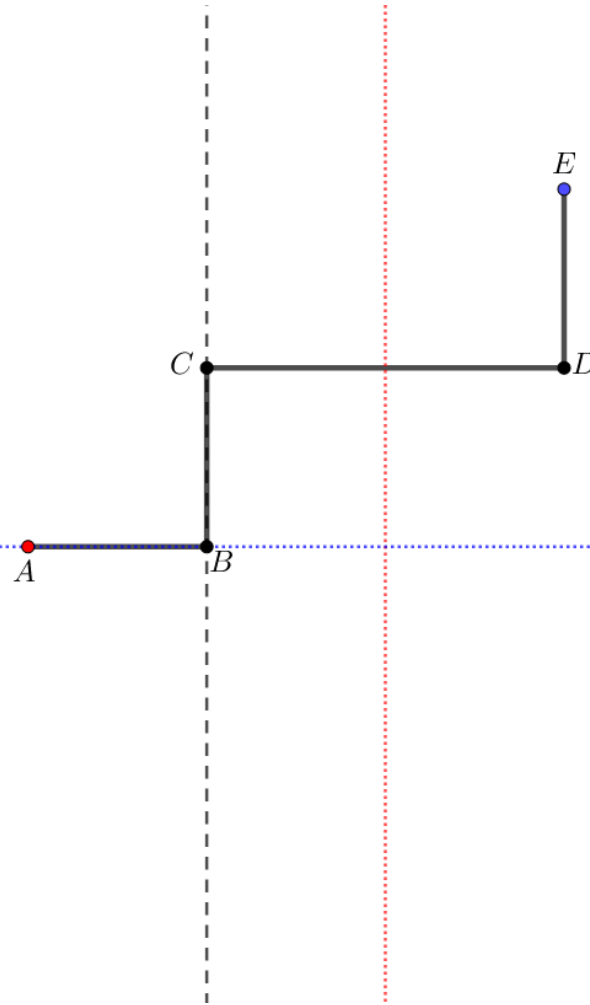
$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x - (z_1 + z_1^{-1})) (x - (z_2 + z_2^{-1})) (x - (z_3 + z_3^{-1}))$$

da cui segue che le tre radici reali dell'equazione (5) sono

$$x_1 = 2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} \right) \quad x_2 = 2 \cos \left( \frac{4\pi}{7} \right) \quad x_3 = 2 \cos \left( \frac{6\pi}{7} \right).$$

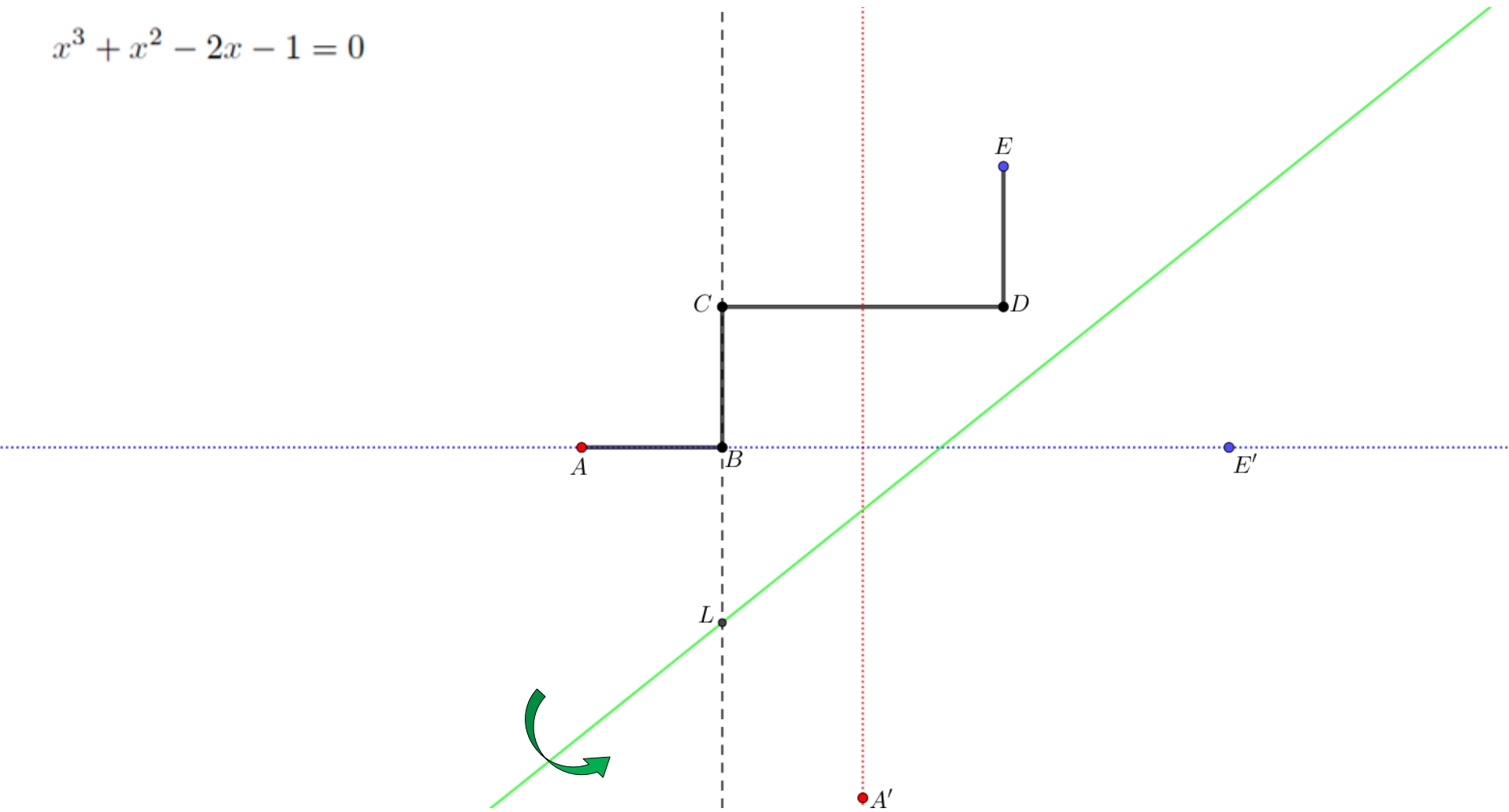
# La costruzione dell'ottagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$



# La costruzione dell'ettagono regolare

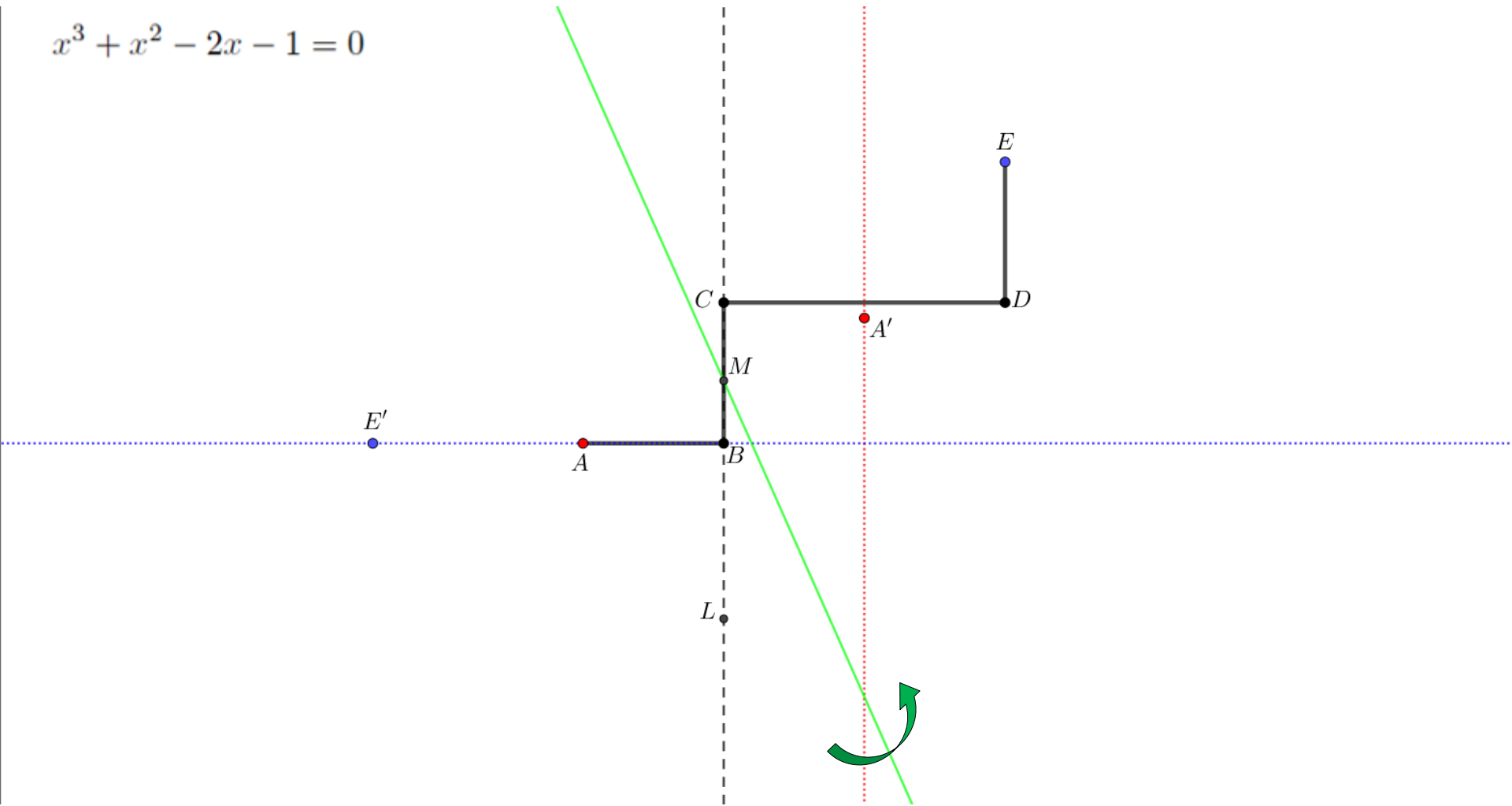
$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$



$$BL = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

# La costruzione dell'ettagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

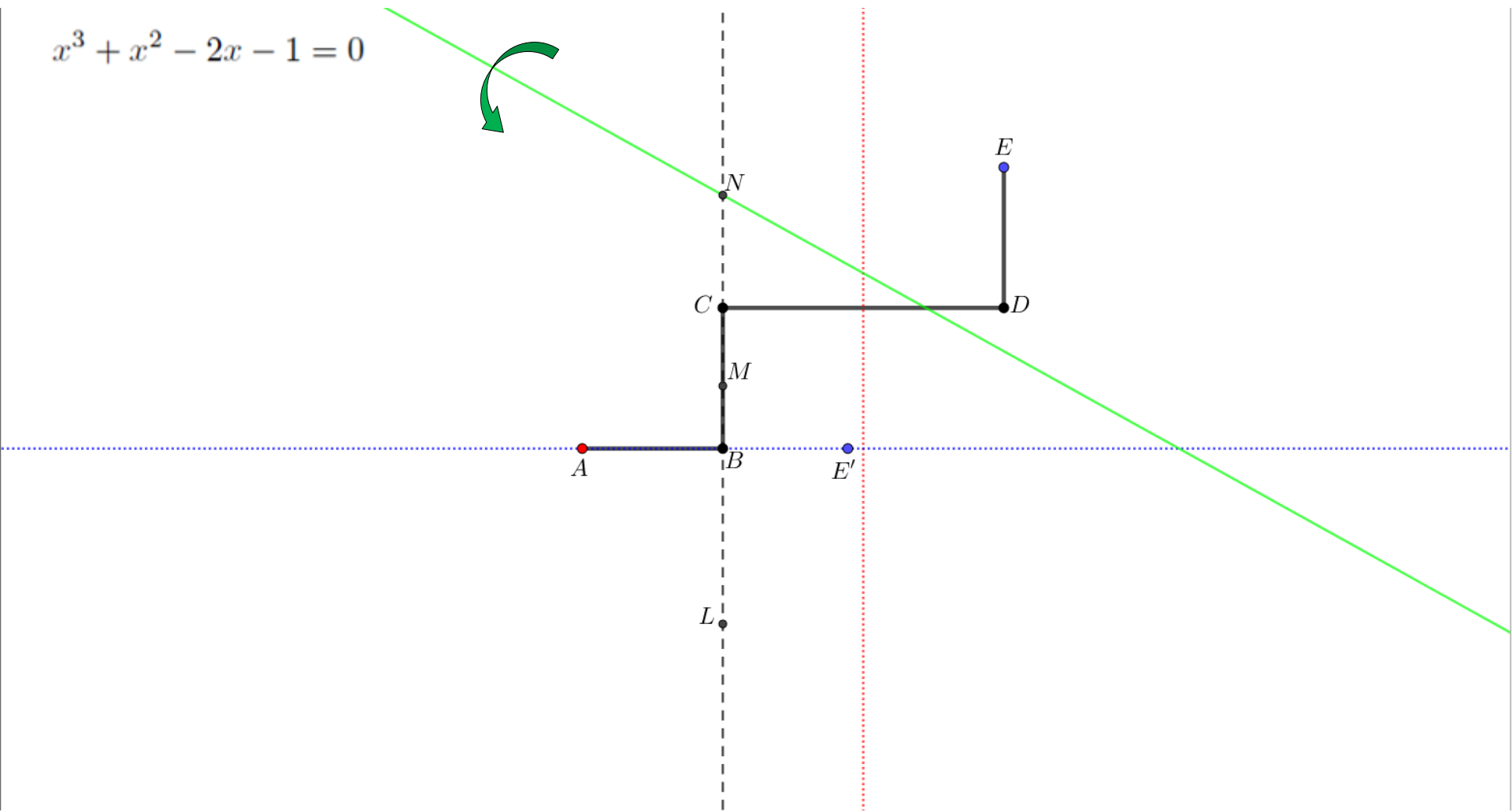


$$BL = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad BM = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$



# La costruzione dell'ettagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$



$$BL = 2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} \right)$$

$$BM = 2 \cos \left( \frac{4\pi}{7} \right)$$

$$BN = 2 \cos \left( \frac{6\pi}{7} \right)$$



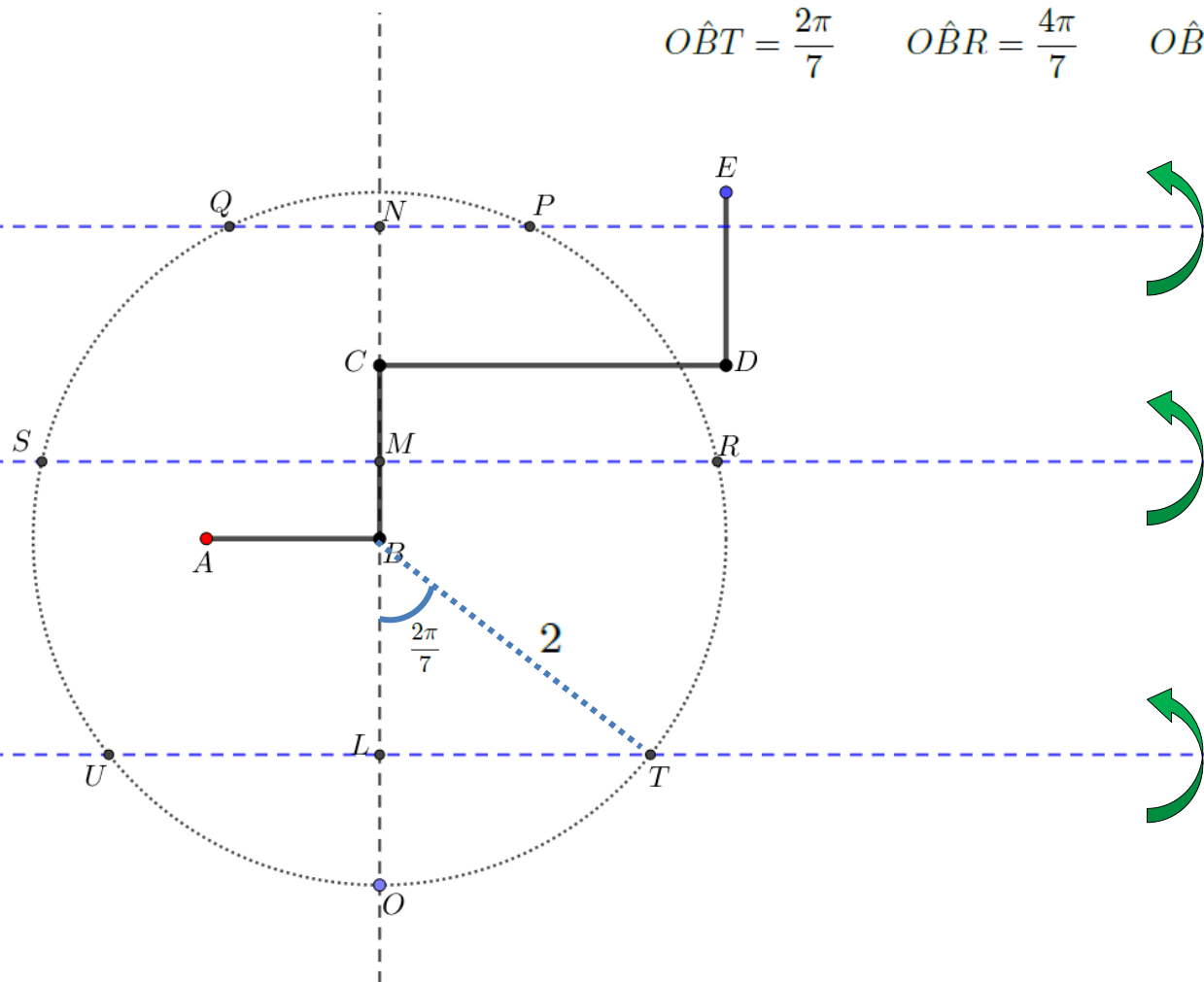
# La costruzione dell'ettagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$O\hat{B}T = \frac{2\pi}{7}$$

$$O\hat{B}R = \frac{4\pi}{7}$$

$$O\hat{B}P = \frac{6\pi}{7}$$



$$BL = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$BM = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

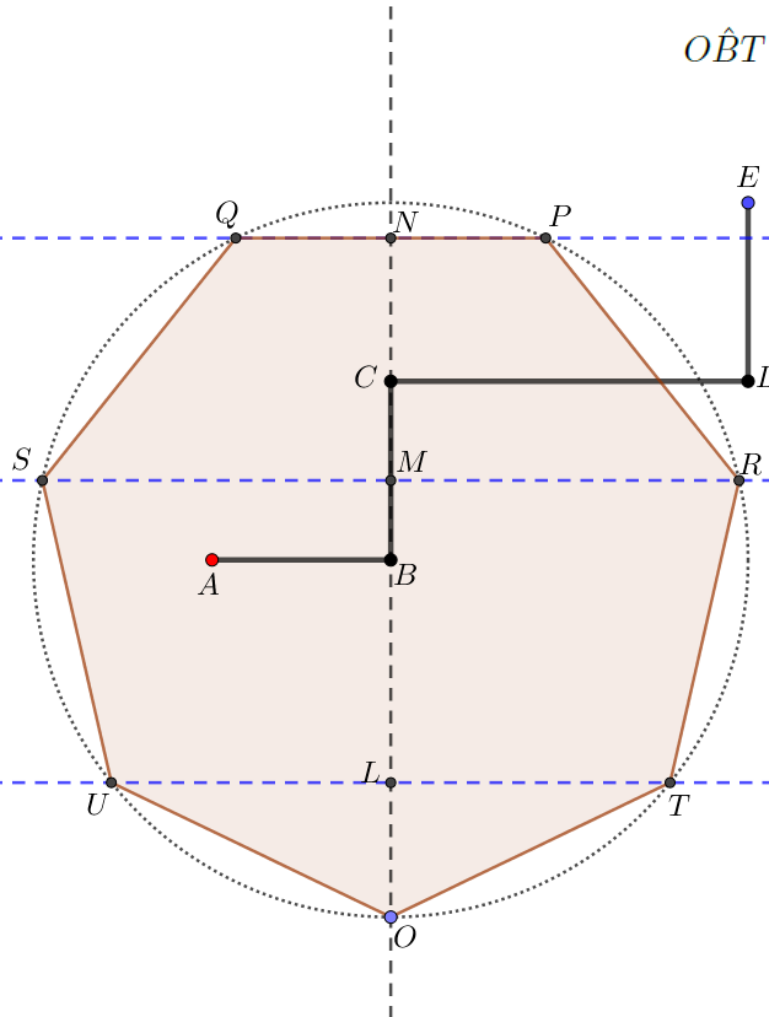
$$BN = 2 \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$BO = 2$$

# La costruzione dell'ettagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$O\hat{B}T = \frac{2\pi}{7} \quad O\hat{B}R = \frac{4\pi}{7} \quad O\hat{B}P = \frac{6\pi}{7}$$

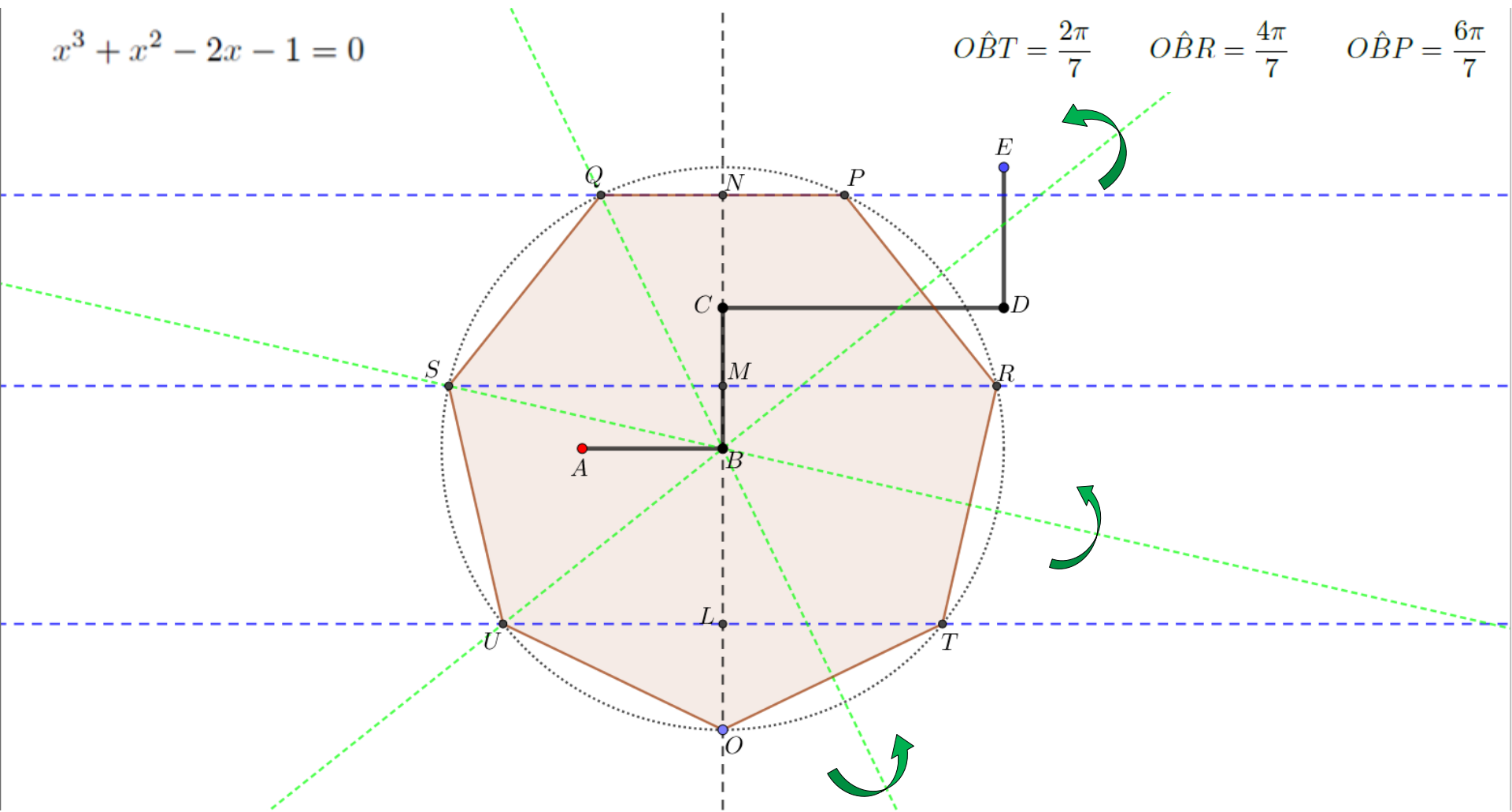


$$BL = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad BM = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \quad BN = 2 \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \quad BO = 2$$

# La costruzione dell'ettagono regolare

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$O\hat{B}T = \frac{2\pi}{7} \quad O\hat{B}R = \frac{4\pi}{7} \quad O\hat{B}P = \frac{6\pi}{7}$$



$$BL = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \quad BM = 2 \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) \quad BN = 2 \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) \quad BO = 2$$

# Dalla geometria *one-fold* alla geometria *multi-fold*

Nonostante gli origami consentano di risolvere una classe più vasta di problemi rispetto alla geometria euclidea, restano irrisolti problemi di grado superiore:

- la **quintisezione** dell'angolo;
- la costruzione del poligono regolare di **11 lati**;
- la risoluzione di una **quintica** qualunque.

Nel 2003 **Robert J. Lang** dimostra come **quintisecare un angolo qualunque** mediante piegatura. Nel procedimento è richiesto un **doppio ripiegamento**, che esula dagli assiomi della geometria origami *one-fold*.



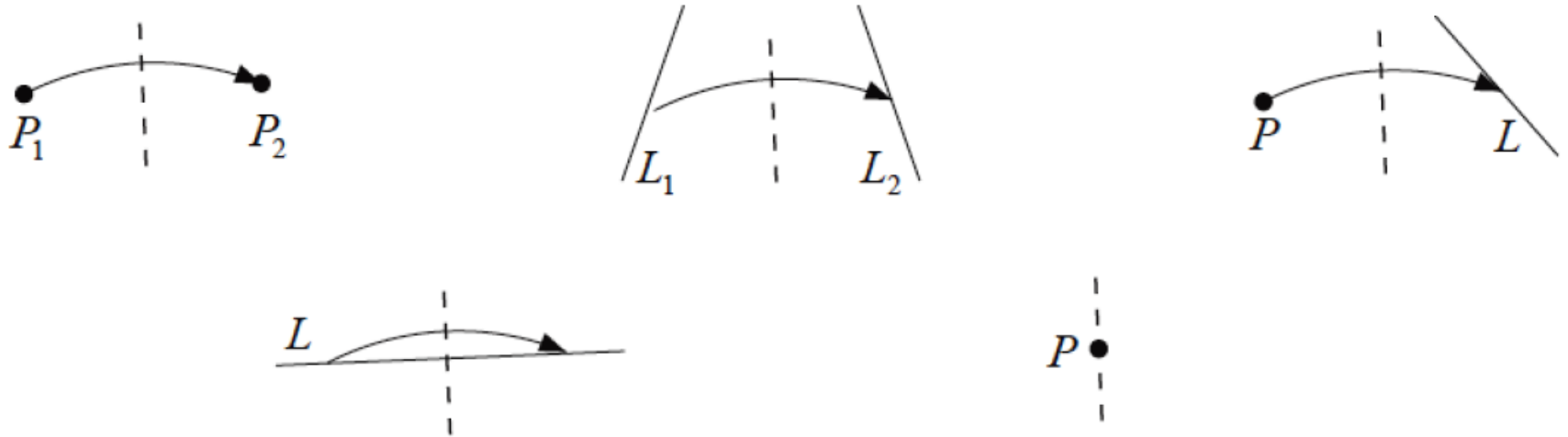
**Se si ammettono più piegature simultanee, quali costruzioni sono possibili?**

**Equazioni algebriche di quali ordini si possono risolvere con operazioni a piegatura multipla (*multi-fold origami*)?**

# La teoria degli allineamenti di Alperin-Lang

Nel 2006 **R. Alperin** e **R. J. Lang** hanno introdotto una formulazione alternativa del sistema di assiomi HJ attraverso una nuova nozione chiamata **allineamento** (*alignment*) che consente di codificare anche le piegature di ordine superiore.

Nella geometria origami *one-fold* si individuano **cinque allineamenti** possibili.



Elencando tutte le possibili combinazioni di tali allineamenti, si conclude che i sette assiomi di Huzita-Justin-Hatori sono **tutti e soli** i possibili assiomi per la geometria origami *one-fold*. Ciò prova la **completezza** del sistema assiomatico HJ.

# La teoria degli allineamenti di Alperin-Lang

La teoria degli allineamenti consente di codificare tutte le piegature multiple consentite in una **geometria origami  $n$ -fold**, vale a dire in una geometria in cui sono ammesse  **$n$  piegature simultanee** della carta.

Nella **geometria origami  $two$ -fold**, si definiscono **17 allineamenti** possibili che, combinati insieme, portano alla formulazione di **489 operazioni** di doppio ripiegamento. Quintisecare un angolo richiede soltanto uno di questi assiomi.

Per determinare una soluzione reale di **un'equazione quintica** generale occorrono tre piegature simultanee (**geometria origami  $three$ -fold**). Nella pratica realizzare delle piegature così articolate è piuttosto complesso.

Nel 2006 **T. Y. Chow** e **K. Fan** sono giunti a dimostrare che sono sufficienti  **$n - 2$  piegature simultanee** per risolvere **un'equazione algebrica generale di grado  $n$** , riadattando la procedura di Lill-Beloch.



# Conclusioni

Ripercorrendo la storia della geometria degli origami, a Margherita Beloch va riconosciuto il merito di aver dimostrato che i metodi di ripiegamento della carta consentono di risolvere **ogni problema di terzo e di quarto ordine**.

Con la geometria origami si risolvono i **problemi classici** della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, mostrando di fatto la superiorità del metodo rispetto alla geometria della riga e del compasso.

Alla luce della sistemazione assiomatica di Huzita, **la piegatura Beloch risulta essere il più complesso movimento origami che si possa realizzare mediante un solo ripiegamento**.

In altri termini, la teoria di Margherita Beloch determina **i limiti algebrici e geometrici delle tecniche origami** che possono essere messe in pratica con un foglio di carta trasparente, senza troppe difficoltà.

# Bibliografia

- M. BELOCH, *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row*, in Atti dell'Accademia delle Scienze Mediche, Naturali e Fisico-Matematiche di Ferrara, **2**, Vol. XI, 1934, pp. 186-189.
- M. BELOCH, *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, in Periodico di Matematiche, **16**, 1936, pp. 104-108.
- M. BELOCH, *La matematica elementare vista dall'alto*, Ist. di Geometria dell'Università di Ferrara, 1953.
- M.T. BORGATO, R. SALMI, *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, Periodico di Matematiche 10/3, 2018.
- M. FRIEDMAN, *A History of Folding in Mathematics*, Science Networks Historical Studies 59, Birkäuser, 2018.
- T. HULL, *Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill*, in American Mathematical Monthly, 2011, pp. 307-315.
- E. LILL, *Résolution graphique des equations numériques d'un degré quelconque à une inconnue*, in Nouvelles Annales de mathématiques, **6**, 1867, pp. 359-362.
- T. SUNDARA ROW, *Geometric exercises in paper folding*, Addison and Co., Madras, 1893.
- L. TENCA, *Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio*, in Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, **3**, Vol. 4, 1949, pp. 288-298.