

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

10 febbraio 2019

ESAME DI LICEO SCIENTIFICO 2019

ESEMPIO DI PROVA DI MATEMATICA E FISICA

Febbraio 2019

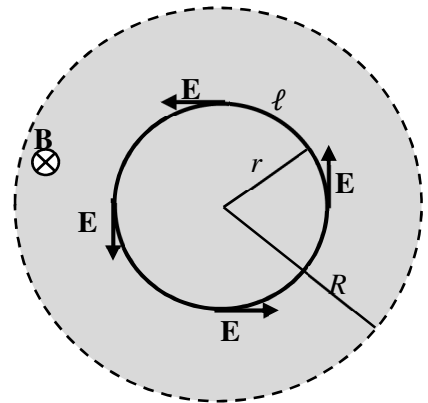
PROBLEMA N° 1

(ispirato al testo universitario di Halliday-Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag. 260)

Con riferimento alla figura a fianco, si consideri la regione piana circolare di raggio R , sede di un campo magnetico \vec{B} le cui linee di campo sono perpendicolari al piano del foglio e in esso entranti. Al di fuori della regione di raggio R si supponga che il campo sia trascurabile.

Il campo \vec{B} ha intensità $B = B(t)$, funzione che dipende solo dal tempo e che è strettamente crescente sul suo dominio.

Si consideri ora una spira circolare ℓ conduttrice di raggio r , concentrica e complanare alla regione di raggio R .



- Si presentino e si discutano gli aspetti fondamentali del fenomeno fisico in base al quale nella spira piana circola una corrente elettrica.
- Si mostri, utilizzando l'equazione di Maxwell relativa alla circuitazione del campo elettrico, che il modulo E_I del campo elettrico indotto è espresso dalla seguente funzione:

$$E_I(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } r > R \end{cases}$$

- Dopo avere dato la definizione di funzione continua in un punto x_0 del suo insieme di definizione, si stabilisca, giustificando adeguatamente la risposta, se la funzione $E_I(r)$ è continua sul suo insieme di definizione.
- Si assuma che $R = 0,4$ m e che il modulo del campo magnetico vari secondo la legge $B(t) = \alpha t + \beta$, dove t è espresso in secondi, $\alpha = 2 \text{ Ts}^{-1}$ e $\beta = 1$ T. Si tracci il grafico della funzione

$$E_I(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} r \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } 0 \leq r \leq R \\ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} \frac{dB(t)}{dt}, & \text{per } r > R \end{cases} \quad \text{individuandone il massimo.}$$

- Si dica, giustificando adeguatamente la risposta, se nel punto di massimo della funzione $E_I(r)$ la sua derivata prima si annulla.

PROBLEMA N°2

(ispirato al testo universitario Halliday Resnick, Fisica, edizione italiana 1970, pag 159-160)
La forza F tra due atomi in una molecola biatomica è conservativa e può essere espressa, approssimativamente, dalla legge $F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$ dove a e b sono costanti positive e x è la distanza tra i due atomi.

- Si studi la funzione $F(x)$ per $x > 0$ e se ne disegni l'andamento del suo grafico.
- A partire dal grafico di $F = F(x)$ si descrivano le caratteristiche del grafico dell'energia potenziale $U=U(x)$ relativa alla forza F tra i due atomi. Si giustifichi la risposta fornita.
- Si determini un'espressione per $U=U(x)$ imponendo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$.
- Si dice energia di dissociazione della molecola l'energia necessaria a rompere il legame tra gli atomi, portandoli a distanza tale che essi non risentano più di alcuna reciproca interazione. Si calcoli l'energia di dissociazione per il sistema formato dai due atomi

QUESTIONARIO

QUESITI DI FISICA

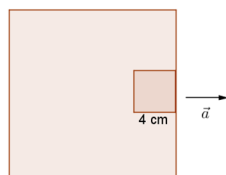
- Dopo avere spiegato in che cosa consiste il fenomeno della *dilatazione del tempo* nella relatività ristretta, si dia la definizione di tempo proprio (durata propria) $\Delta\tau$. Si chiarisca quindi che cosa si intende con Δt e con v nella relazione relativistica

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Posto $\beta = v/c$ si studi, con riferimento a un opportuno sistema di assi cartesiani, la funzione $\gamma = \gamma(\beta)$. Si interpreti dal punto di vista fisico l'andamento di tale funzione, presentando le ragioni per le quali la velocità della luce nel vuoto in relatività ristretta assume carattere di velocità limite.

- Un campione di materiale radioattivo contiene, all'istante $t = 0$, un numero N_0 di nuclei instabili, che possono dare luogo a decadimento radioattivo, trasformandosi in nuclei diversi che qui supponiamo stabili. Il numero di nuclei instabili ancora presenti nel campione all'istante generico t è espresso dalla legge $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ dove λ è una costante positiva, che dipende dal tipo di isotopo.
Il radon-222 è un isotopo instabile del gas radon. Ha un tempo di dimezzamento di 3,82 giorni, il che vuol dire che, mediamente, ogni 3,82 giorni la quantità di radon-222 si dimezza. Si calcoli la costante λ per il radon-222, precisandone il significato e scrivendola in notazione scientifica con due sole cifre significative in unità del SI.

3. Una spira metallica, quadrata di lato $l = 4,0 \times 10^{-2} \text{ m}$ e resistenza $R = 10 \, \Omega$, viene estratta, a partire dall'istante $t = 0$, dalla regione in cui è presente un campo magnetico uniforme \vec{B} , con accelerazione \vec{a} costante, di modulo $5,0 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, diretta parallelamente al lato orizzontale della spira, come indicato in figura. Il campo magnetico ha intensità $3,0 \times 10^{-2} \text{ T}$, è diretto perpendicolarmente al piano individuato dalla spira ed è uscente da esso. La regione in cui è presente il campo \vec{B} è rappresentata in figura da un quadrato colorato. Al di fuori di essa il campo è trascurabile. All'istante $t = 0$ la spira si trova completamente immersa nella regione in cui è presente il campo \vec{B} , nella posizione indicata in figura, cioè con un bordo della spira sovrapposto a parte della linea che delimita il campo e con velocità iniziale trascurabile.



Si spieghi, qualitativamente, perché nella spira si genera una corrente, a partire dall'istante $t=0$ fino all'istante t_1 , quando la spira esce definitivamente dalla regione in cui è presente il campo \vec{B} .

Si calcoli l'istante t_1 e, infine, si determini un'espressione della corrente indotta nella spira in funzione del tempo t .

4. In un moto rettilineo di un punto P , la funzione $x(t) = 100 \cdot e^{-kt}$ rappresenta la legge oraria del moto, dove t è il tempo in secondi, $k = 1 \text{ s}^{-1}$ e $x(t)$ è la posizione del punto P .
- Si calcoli la velocità media di P tra l'istante $t=0 \text{ s}$ e l'istante $t=2 \text{ s}$ (si approssimi il risultato ai m/s).
 - Si calcoli la velocità istantanea di P nell'istante $t=0 \text{ s}$.
 - Si disegni la funzione $x = x(t)$ e la funzione $v = v(t)$ in due opportuni sistemi di riferimento.

QUESITI DI MATEMATICA

1. (ispirato a un problema assegnato alle maturità nelle scuole europee nel 2001)

Si considerino le funzioni f e g definite su \mathbb{R} da

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x} \quad \text{di rispettivi grafici } F \text{ e } G.$$

Si calcoli l'area $A(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, della parte di piano limitata da F , G e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = \alpha$. Infine si calcoli il $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

2. Si consideri l'equazione $e^{1+x} + 3x^2 - 3 = 0$ e si stabilisca, con adeguate motivazioni, se ammette soluzioni nell'intervallo $[-1; 1]$. In caso affermativo si determini il numero delle soluzioni.

3. Si consideri la superficie sferica S di centro $C(2; -1; 3)$ e raggio $r=3$. Si stabilisca se la sfera

S ha punti di intersezione con la retta di equazioni
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

In caso affermativo si calcolino le coordinate dei punti di intersezione.

4. Uno studio statistico ha stabilito che la probabilità di incidenza di una determinata malattia sul totale di una popolazione sia uguale a 0,001. È stato approntato un test diagnostico per rilevare quella malattia sugli individui della popolazione. È noto che:

- il test fornisce una risposta negativa in assenza della malattia con probabilità 0,97;
- il test fornisce una risposta positiva in presenza della malattia con probabilità 0,99.

Si estrae a caso un individuo della popolazione e lo si sottopone al test.

Qual è la probabilità che l'individuo non sia malato e la risposta del test sia positiva?

Si estrae a caso un altro individuo dalla popolazione, lo si sottopone al test e questo dà risposta positiva. Qual è la probabilità che l'individuo sia realmente malato?

Tempo assegnato: 6 ore.

È permesso l'utilizzo delle calcolatrici scientifiche e/o grafiche (non dotate di possibilità di calcolo simbolico).

Esempio di prova di Matematica-Fisica elaborato dal Gruppo promotore della petizione del 12.01.2019 contro le simulazioni pubblicate dal MIUR il 20.12.2018.