MRV ha importanti conseguenze didattiche

L'insegnante supporta l'uso di questo schema, la sua organizzazione nelle pratiche didattiche, promuovendo la transizione dal suo uso nella vita di tutti i giorni al contesto matematico.

Così facendo permette la costruzione di competenze matematiche, in cui le **conoscenze** si intrecciano con le **competenze argomentative** degli allievi in situazioni in cui **risolvono e si pongono dei problemi**.

Concludendo questa prima parte, è interessante discutere la differenza didattica e cognitiva che c'è fra un serie di problemi nati con la nostre sequenze e problemi che direttamente chiedano di trovare/dimostrare le relazioni aritmetiche o le formule algebriche che sono dietro alle nostre tabelle.

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

x•y	=	O3
1 • 7	7	$h^2 - k^2$
2 • 8	16	$h^2 - k^2$
3 • 9	27	$h^2 - k^2$
4 • 10	40	$h^2 - k^{22}$
5 • 11	55	$h^2 - k^2$

2

Le funzioni e il Cambiamento

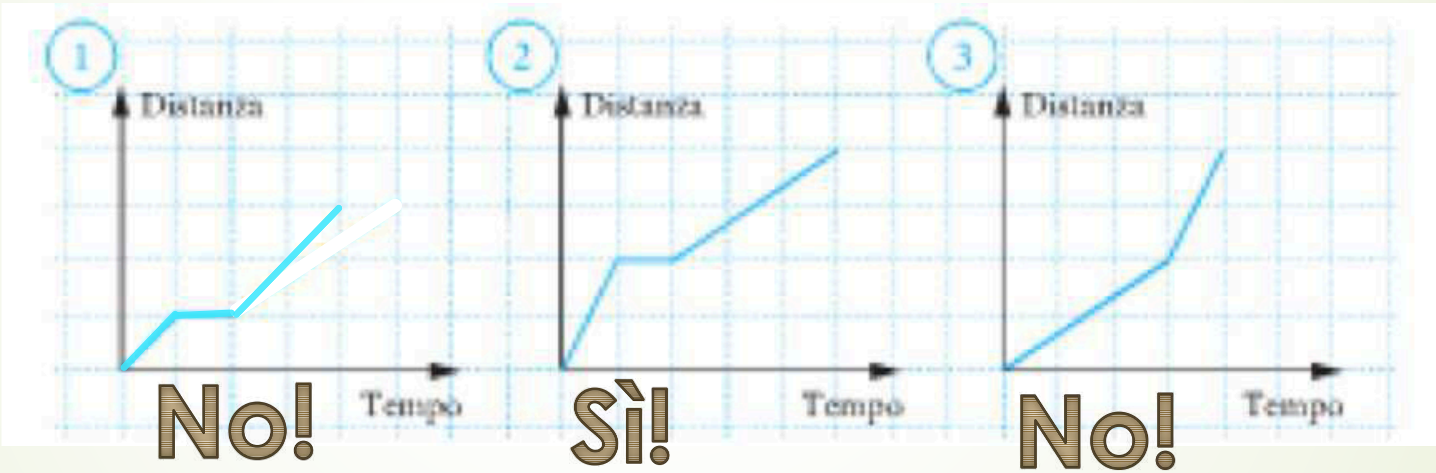
In tutte le scienze i modelli sono spesso rappresentati dalle funzioni: queste sono uno strumento particolarmente importante e diffuso.

Saperle leggere e usare fa certamente parte delle competenze del XXI secolo. Come affrontarle? Si tratta di un problema non banale e spesso sottovalutato.

Un esempio

Scegli il grafico giusto:

Matteo si dirige a passo svelto dal gelataio, compra un gelato e poi prosegue camminando lentamente.



Un problema cognitivo e didattico

Adattato da:
C.Bertinetto, A. Metiäinen, J.Paasonen, E. Voutilainen, (2012). *Contaci*, Zanichelli

Un problema cognitivo e didattico: i grafici delle funzioni

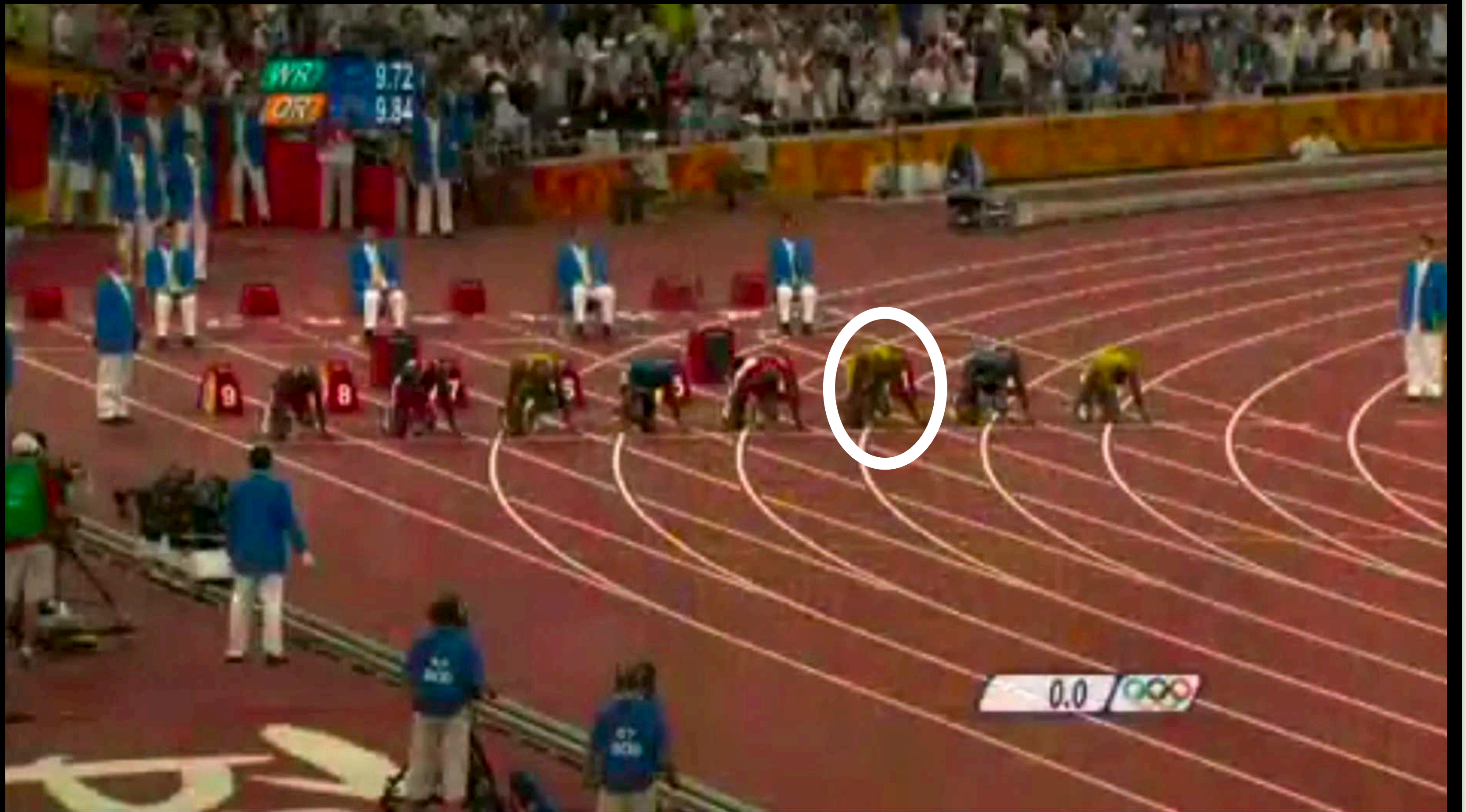
I grafici delle funzioni non sono generalmente l'immagine diretta di una certa realtà. Se si vuole ottenere una sensazione intuitiva di quello che significa "velocità" si deve guardare un corpo in movimento o, meglio, confrontare due corpi in movimento.
Ma con i diagrammi le cose sono completamente diverse poiché un diagramma, anche se espresso in termini figurativi, non è un'istanza cognitiva primaria. ***È l'espressione figurale di una struttura concettuale già elaborata, come un qualsiasi altro sistema simbolico.***

Analizziamo le difficoltà che si incontrano con un esempio più complesso (e completo) med. d’oro 100 m

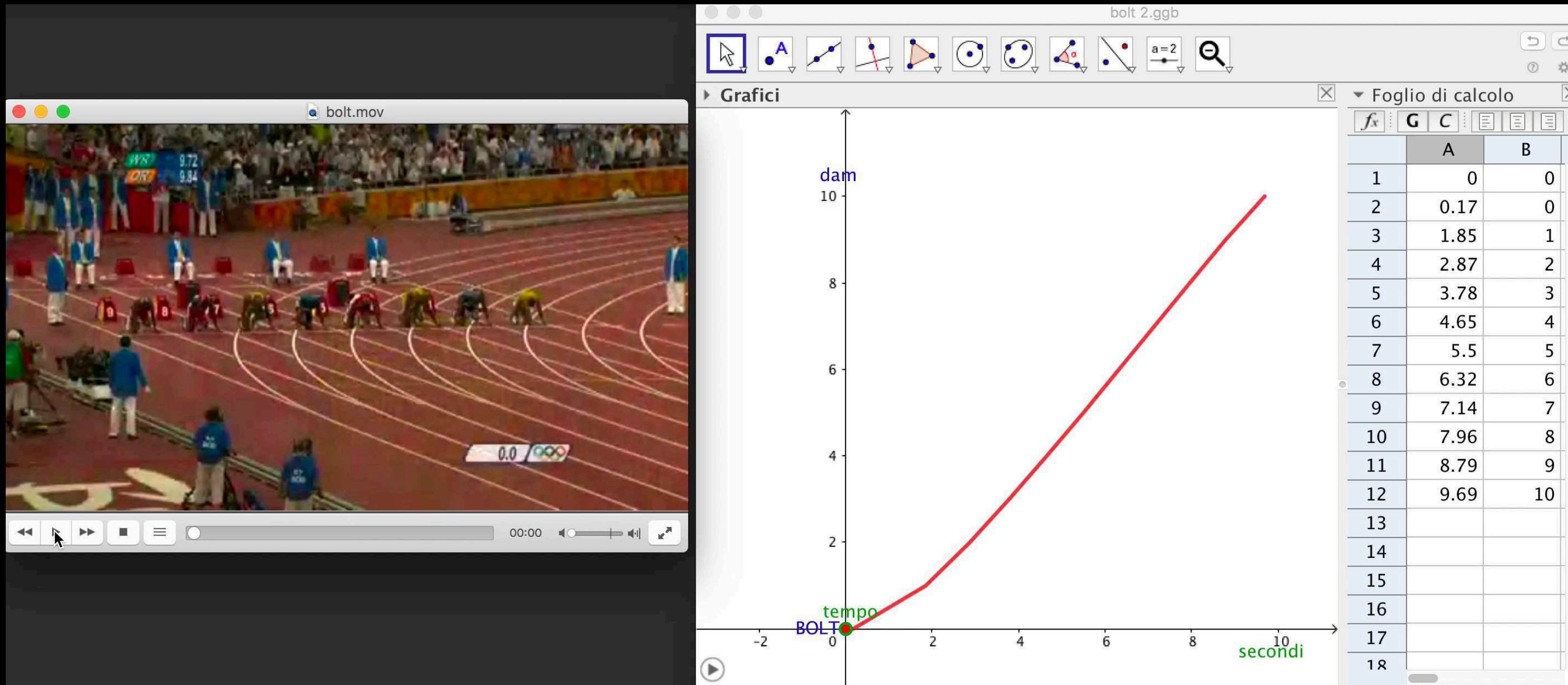
9’’ 58	2009	Berlino (M)
9’’ 63	2012	Londra (O)
9’’ 69	2008	Pechino (O)

Usain Bolt

Olimpiadi Pechino (16-08-2008)
finale 100 m (9'' 69)



Tempo (sec)	Distanza (m)
0	0
1,85	10
2,87	20
3,78	30
4.65	40
5,50	50
6,32	60
7,14	70
7,96	80
8,79	90
9,69	100

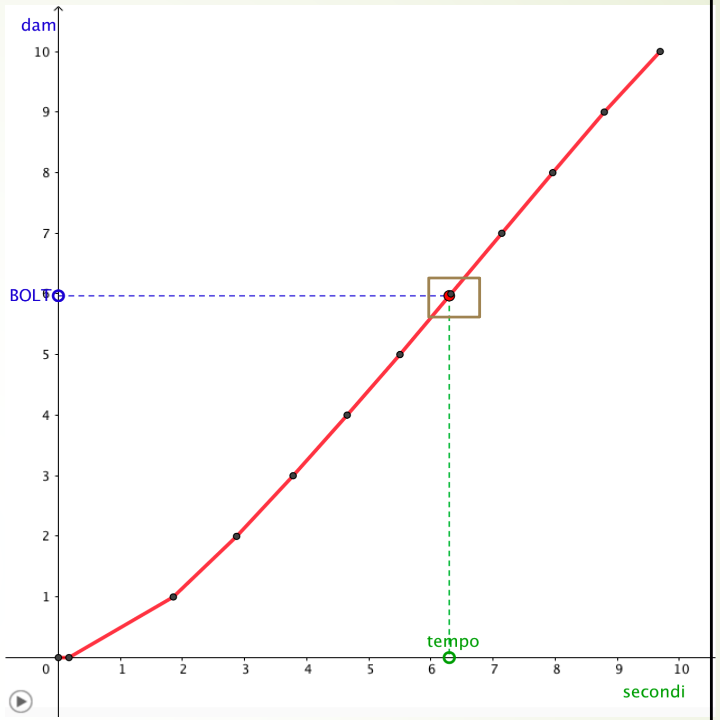

bolt.mov
00:00
bolt 2.ggb
Grafici
Foglio di calcolo
dam
tempo
BOLT
secondi
A B
1 0 0
2 0.17 0
3 1.85 1
4 2.87 2
5 3.78 3
6 4.65 4
7 5.5 5
8 6.32 6
9 7.14 7
10 7.96 8
11 8.79 9
12 9.69 10

La corrispondenza tra il fenomeno e il modello non è acquisita direttamente come effetto di una similitudine “naturale”.

Se si considera, ad esempio, il grafico che rappresenta la relazione tra tempo e spazio nella corsa di U. Bolt non esiste una somiglianza diretta e sensoriale tra la corsa e la forma del grafico.

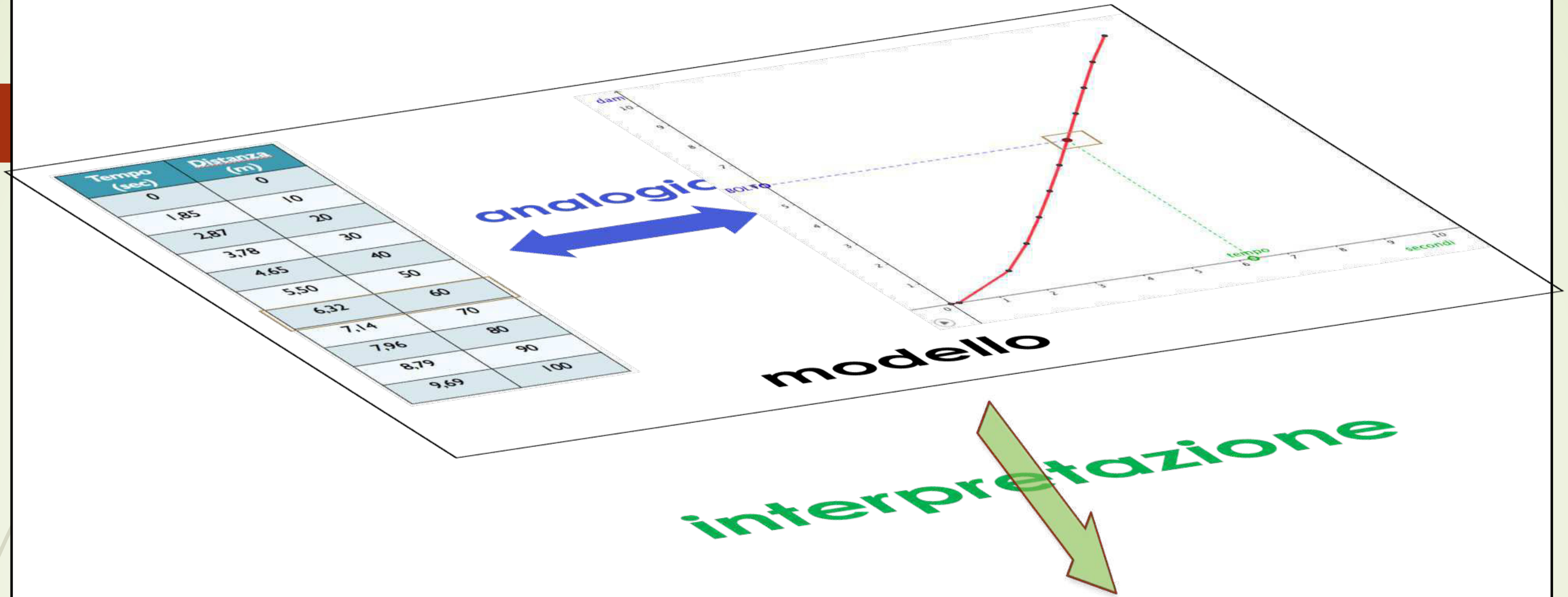
Tempo (sec)	Distanza (m)
0	0
1,85	10
2,87	20
3,78	30
4.65	40
5,50	50
6,32	60
7,14	70
7,96	80
8,79	90
9,69	100

analogia



modello

L'analogia è piuttosto tra l'espressione numerica del rispettivo fenomeno e la sua rappresentazione grafica (che è spaziale).

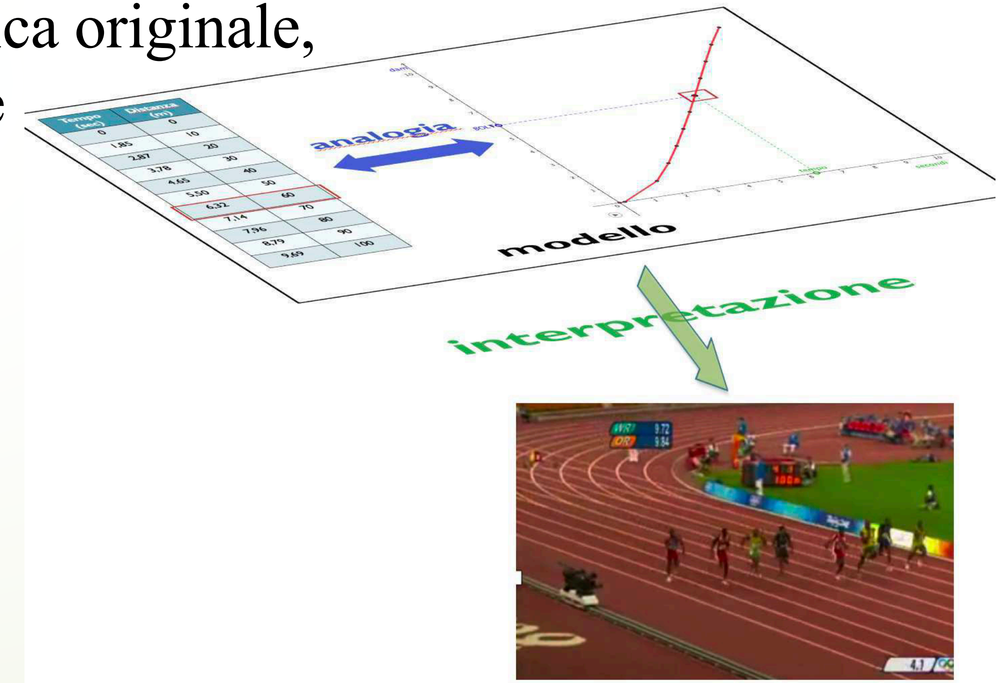


C'è un salto cognitivo ed epistemico tra i due (modello / fenomeno). Questo pone un problema didattico: come affrontare questo salto in classe?

Il problema didattico :

Come superare il salto (epistemico e cognitivo) in modo il più possibile naturale da un punto di vista cognitivo?

L'obiettivo è che il grafico diventi per gli allievi un dispositivo **intuitivo**: cioè che riescano a **fondere**, **interiorizzare** e **automatizzare** il sistema delle convenzioni relative alla realtà fenomenologica originale,
al sistema concettuale mediatore
(la funzione)
e alla rappresentazione grafica.



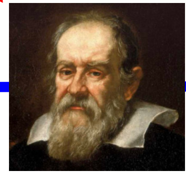
Una possibile soluzione al problema didattico

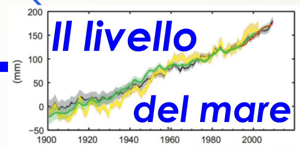
L'*apprendistato* all'interpretazione dei grafici di funzione in vari *campi di esperienza* in cui si esperiscano significativi fenomeni di *cambiamento*.

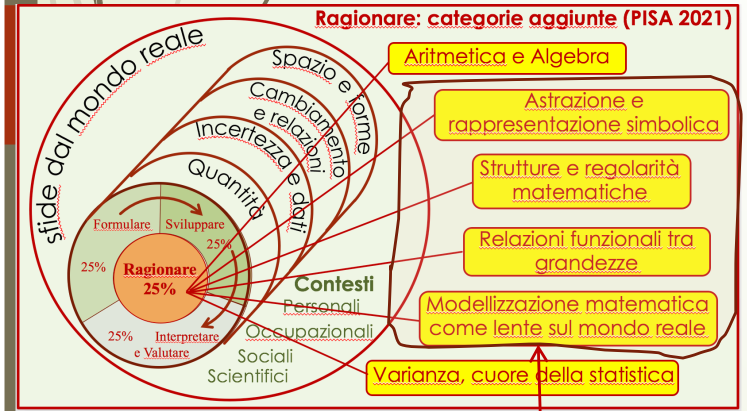
AREA DISCIPLINARE

AREA INTER-DISCIPLINARE

PASSATO PRESENTE FUTURO







Il cambiamento: una radice cognitiva per la matematica e la scienza

Alcuni nodi concettuali:

- I numeri
- Lo spazio
- Relazioni: linguaggio algebrico
- Funzioni: la matematica del cambiamento
  → modelli
- La matematica dell'incerto

Macrocompetenze:

Risolvere/Porre problemi
Argomentare/Dimostrare

Il correlativo **culturale** del cambiamento è che esso è esprimibile/rappresentabile quantitativamente e non solo qualitativamente (nascita della scienza moderna).

Il correlativo **cognitivo** del cambiamento è l'attenzione a ciò che cambia e come cambia e a ciò che rimane invariante in una situazione.

Il correlativo **epistemologico** del cambiamento è l'attenzione non solo ai valori quantitativi osservati nei fenomeni (**relazioni/funzioni**) ma anche alle loro differenze e al modo di rappresentarle e manipolarle per ragionarci.

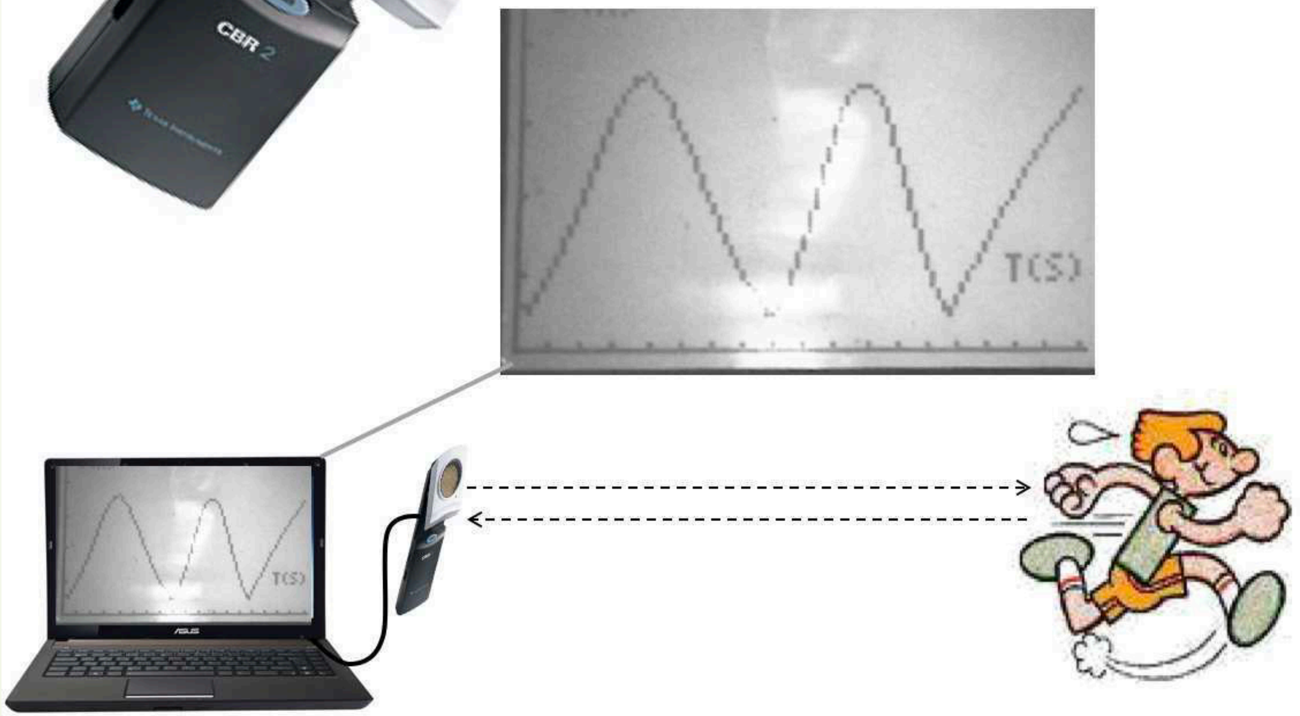
Il correlativo **didattico** del cambiamento è la sua rappresentabilità con strumenti (in particolare con le **ICT**).

Esempi

- Rappresentare il movimento
- Crescita (decrescita) in situazioni varie:
    - Temperatura
    - Matematica
    - Prezzi
    - Piante
    - Persone
    - …
- Narrativi e loro rappresentazioni grafiche

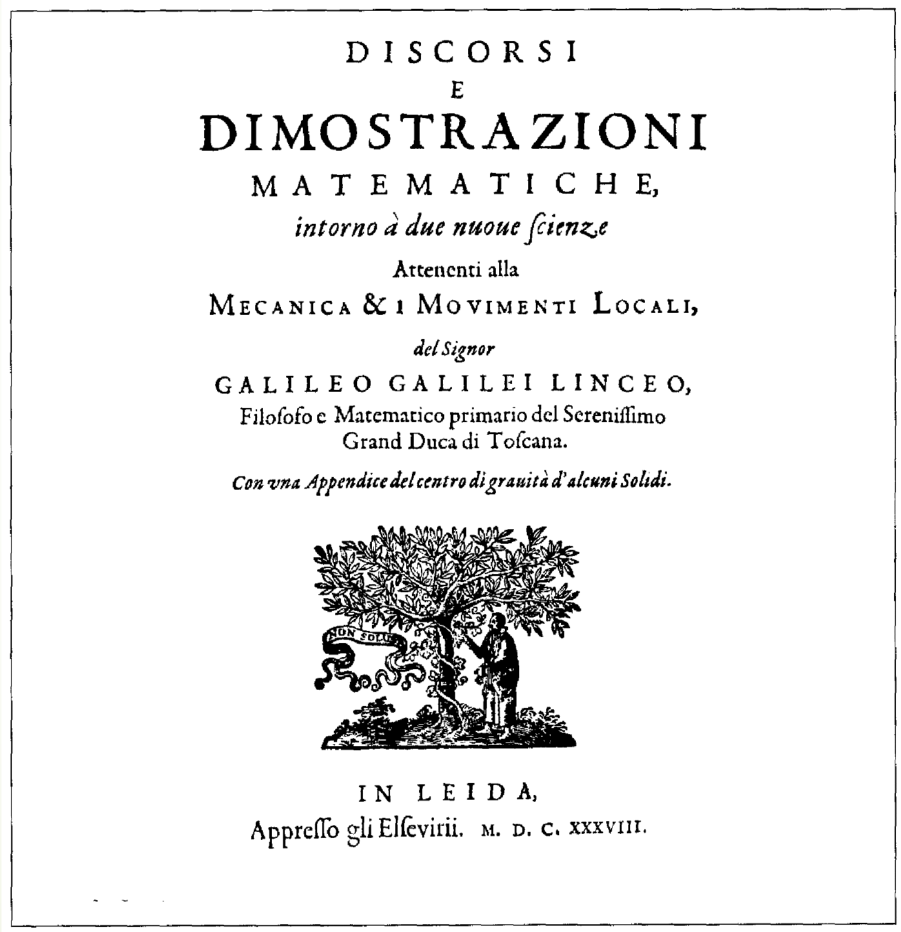
Il CBR

(rivelatore sonico di movimento)



Classe II, insegnante: K. Savioli, Ricercatrice: F. Ferrara

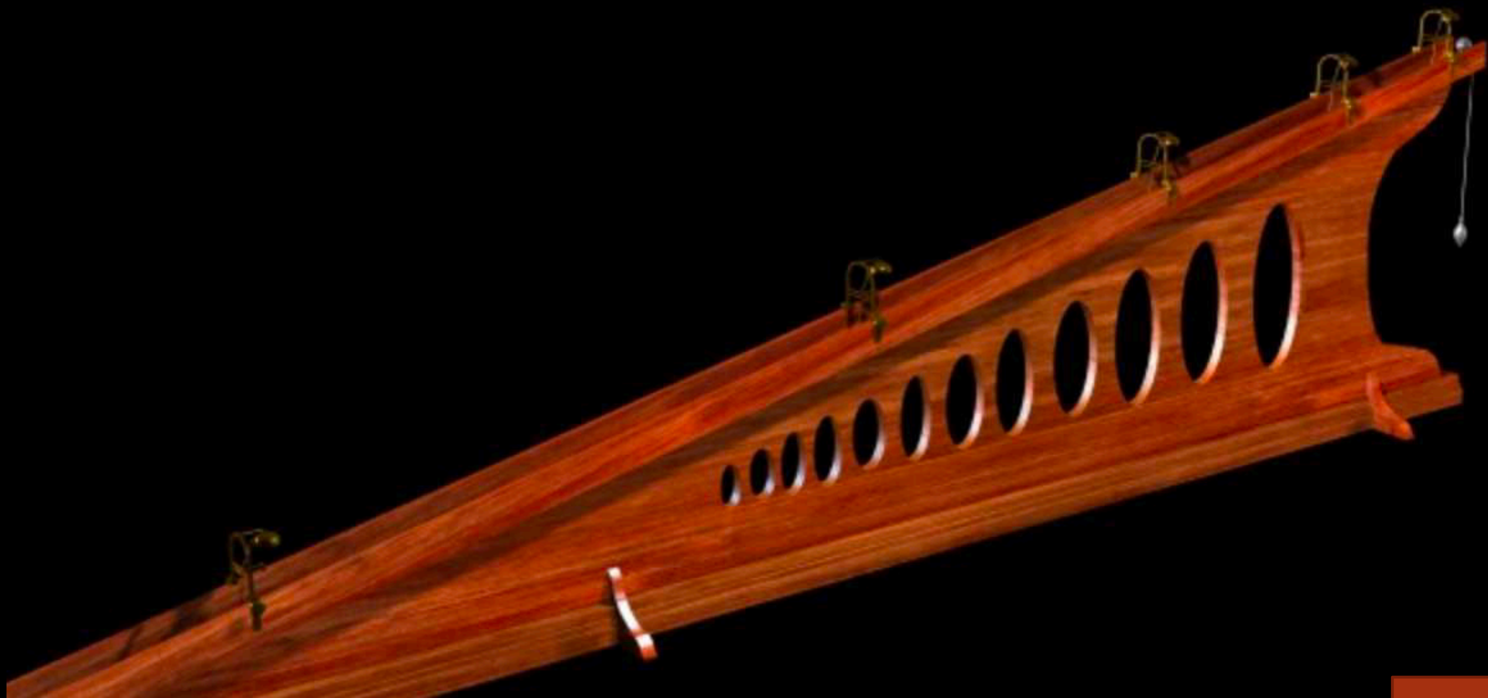
Il primo esperimento scientifico moderno (1604)



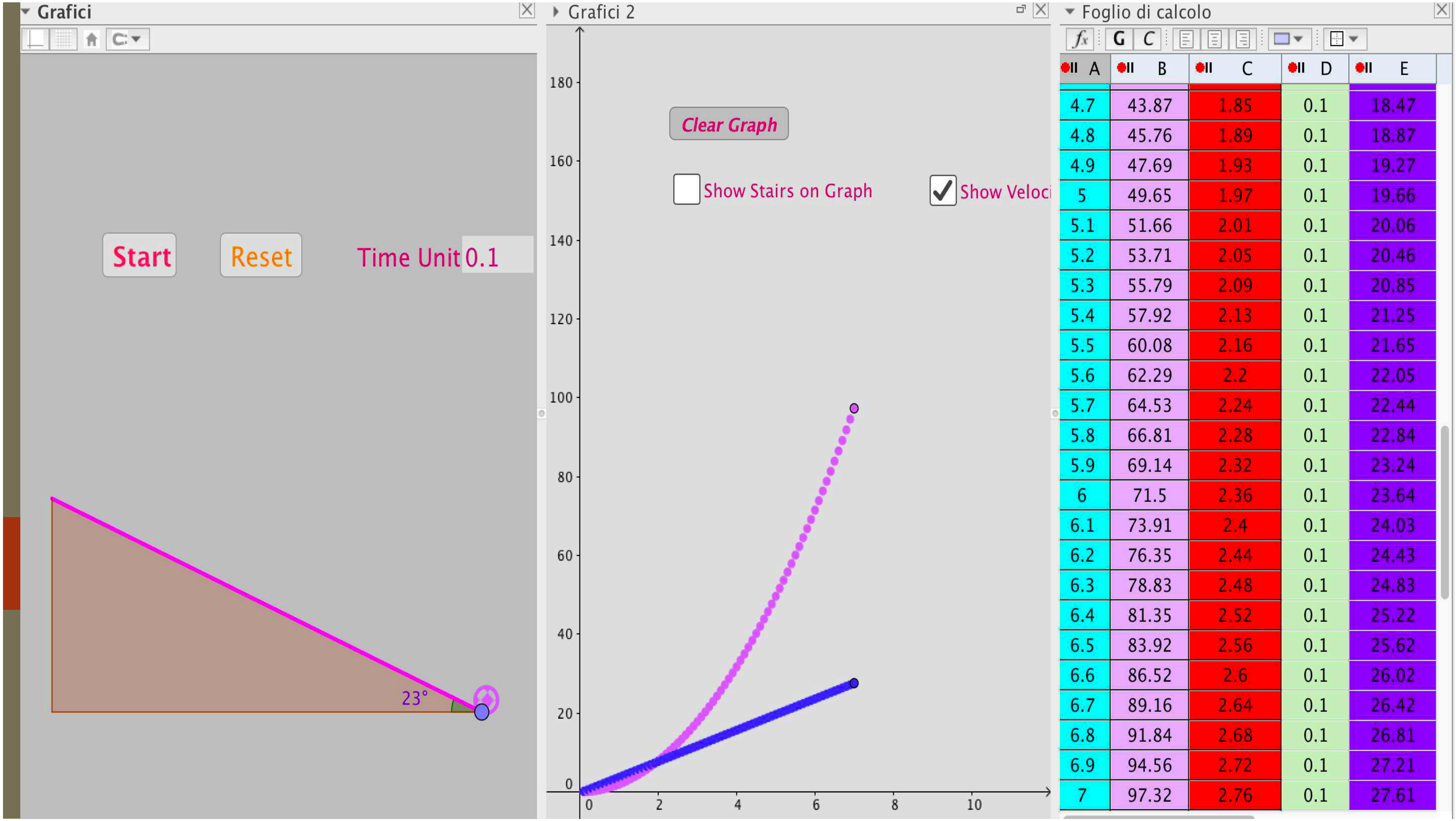
DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

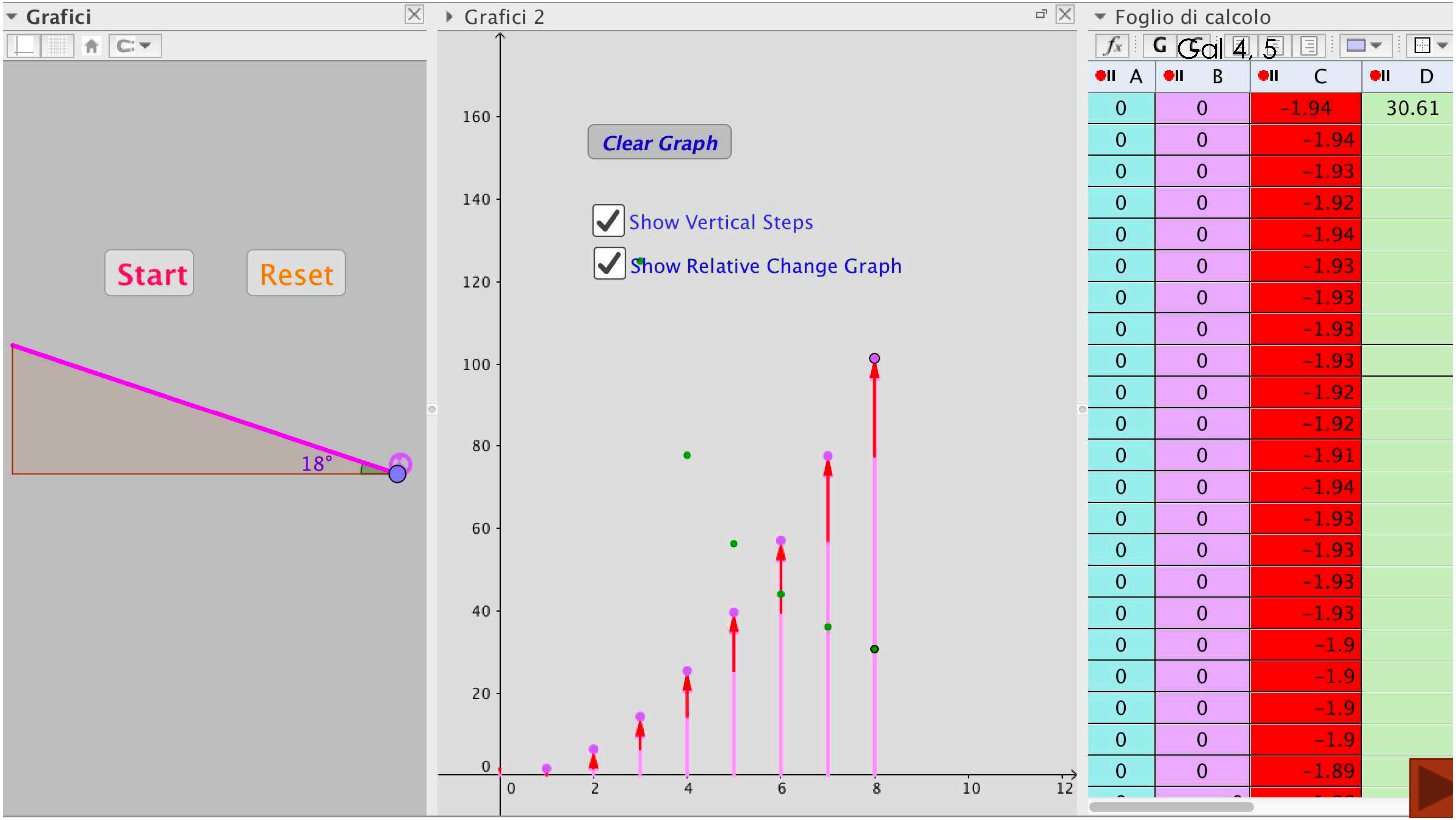
Sensate esperienze
e dimostrazioni matematiche



http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html



A	B	C	D	E
4.7	43.87	1.85	0.1	18.47
4.8	45.76	1.89	0.1	18.87
4.9	47.69	1.93	0.1	19.27
5	49.65	1.97	0.1	19.66
5.1	51.66	2.01	0.1	20.06
5.2	53.71	2.05	0.1	20.46
5.3	55.79	2.09	0.1	20.85
5.4	57.92	2.13	0.1	21.25
5.5	60.08	2.16	0.1	21.65
5.6	62.29	2.2	0.1	22.05
5.7	64.53	2.24	0.1	22.44
5.8	66.81	2.28	0.1	22.84
5.9	69.14	2.32	0.1	23.24
6	71.5	2.36	0.1	23.64
6.1	73.91	2.4	0.1	24.03
6.2	76.35	2.44	0.1	24.43
6.3	78.83	2.48	0.1	24.83
6.4	81.35	2.52	0.1	25.22
6.5	83.92	2.56	0.1	25.62
6.6	86.52	2.6	0.1	26.02
6.7	89.16	2.64	0.1	26.42
6.8	91.84	2.68	0.1	26.81
6.9	94.56	2.72	0.1	27.21
7	97.32	2.76	0.1	27.61


Grafici
Start
Reset
18°
Grafici 2
Clear Graph
Show Vertical Steps
Show Relative Change Graph
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
10
12
Foglio di calcolo
Cal 4, 5
A
B
C
D
0 0 -1.94 30.61
0 0 -1.94
0 0 -1.93
0 0 -1.92
0 0 -1.94
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.92
0 0 -1.92
0 0 -1.91
0 0 -1.94
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.93
0 0 -1.9
0 0 -1.9
0 0 -1.9
0 0 -1.9
0 0 -1.89

Approfondiamo il cambiamento

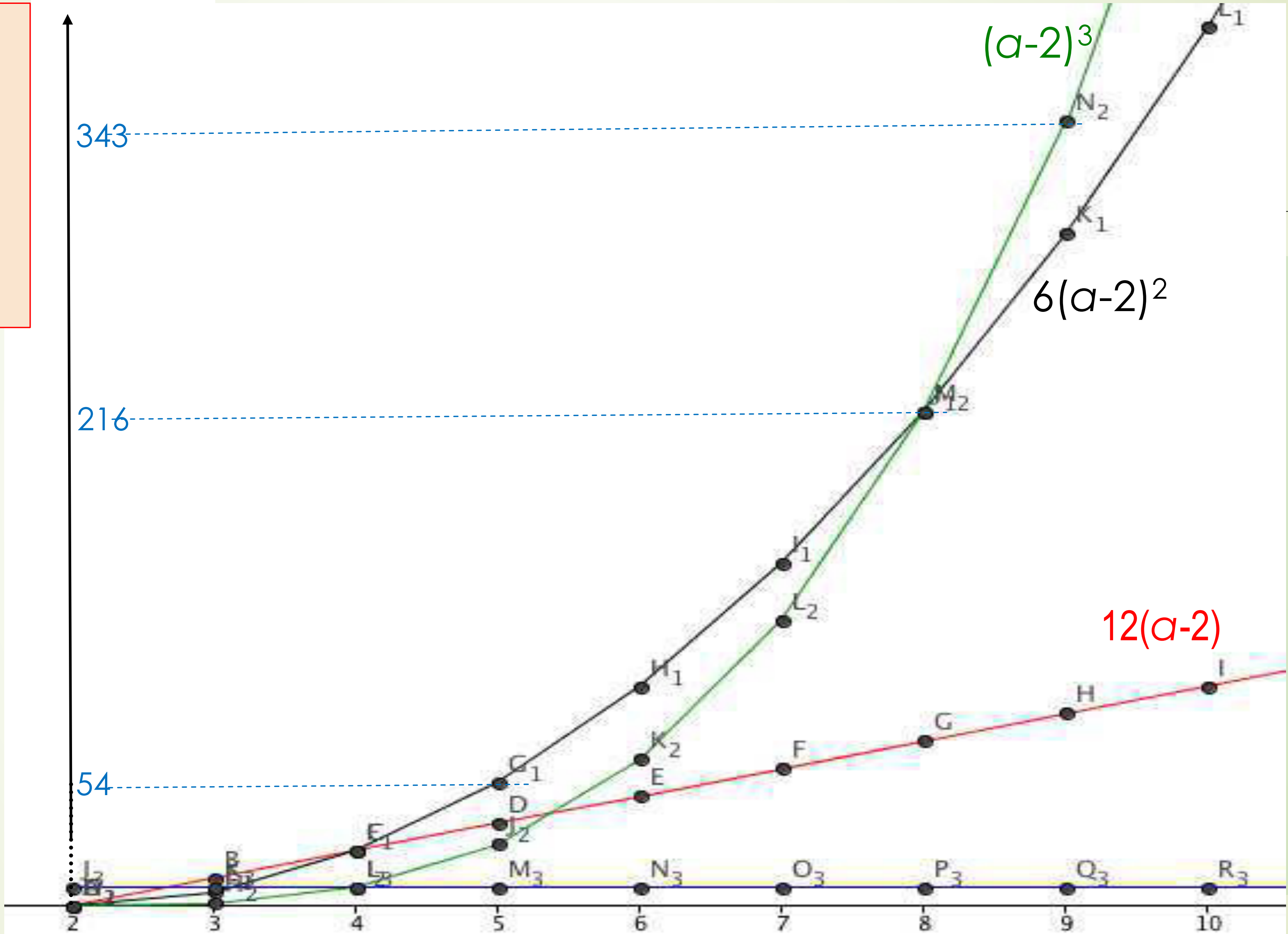
Il correlativo matematico del cambiamento è l'attenzione non solo ai valori quantitativi ma anche e soprattutto alle loro ***differenze*** *e al modo di rappresentarle e manipolarle per ragionarci.*

LE DIFFERENZE FINITE:

a) Uno strumento potente che permette di preparare il calcolo differenziale fin dai primi anni.

b) Uno strumento facilmente implementabile con i software didattici.

Discuti analogie e differenze fra le due situazioni



Differenze: una misura del cambiamento

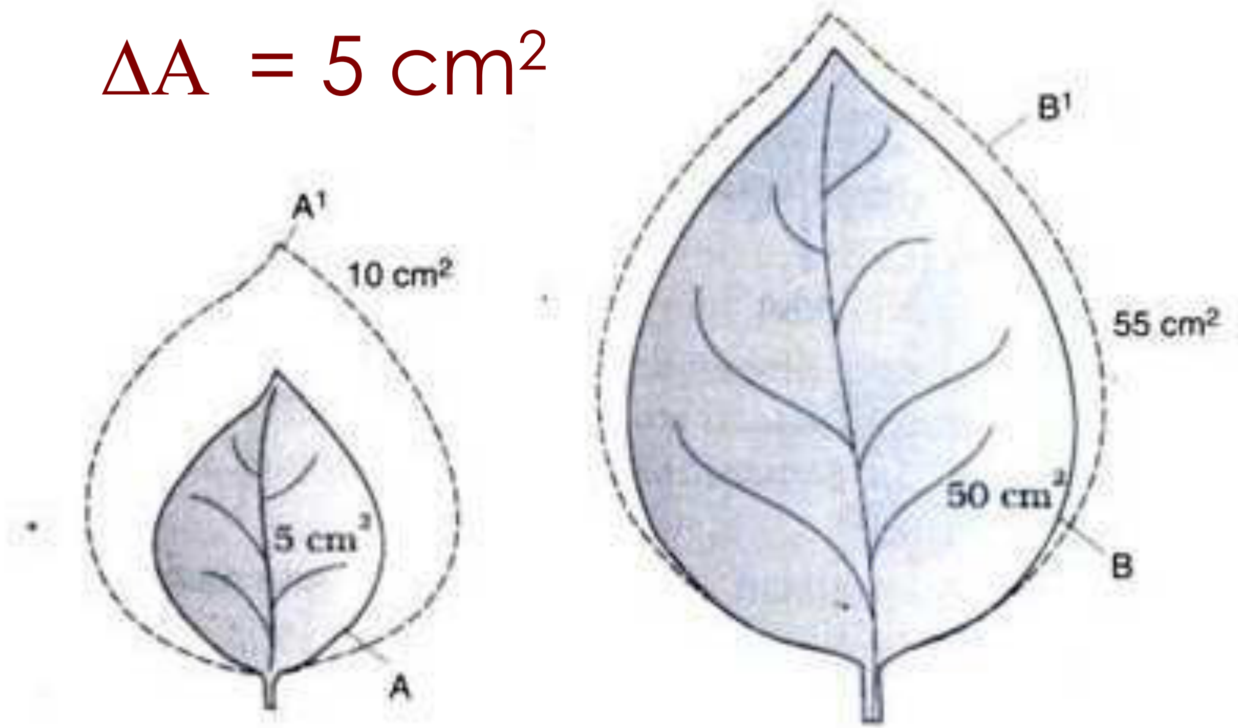
a	$4(a-2)$	a	a^2	a	4	ΔB	ΔD
A	B	C	D	E	F	G	H
2	0	2	0	2	4	4	1
3	4	3	1	3	4	4	3
4	8	4	4	4	4	4	5
5	12	5	9	5	4	4	7
6	16	6	16	6	4	4	9
7	20	7	25	7	4	4	11
8	24	8	36	8	4	4	13
9	28	9	49	9	4	4	15
10	32	10	64	10	4	4	17
11	36	11	81	11	4	4	19
12	40	12	100	12	4	4	21
13	44	13	121	13	4	4	23
14	48	14	144	14	4	4	25
15	52	15	169	15	4	4	27
16	56	16	196	16	4	4	29
17	60	17	225	17	4	4	31

Differenze: una misura del cambiamento

a	12(a-2)	a	$6(a-2)^2$	a	$(a-2)^3$	a		Δ1B	Δ1D	Δ2D	Δ1F	Δ2F	Δ3F
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
2	0	2	0	2	0	2	8	12	6	12	1	6	6
3	12	3	6	3	1	3	8	12	18	12	7	12	6
4	24	4	24	4	8	4	8	12	30	12	19	18	6
5	36	5	54	5	27	5	8	12	42	12	37	24	6
6	48	6	96	6	64	6	8	12	54	12	61	30	6
7	60	7	150	7	125	7	8	12	66	12	91	36	6
8	72	8	216	8	216	8	8	12	78	12	127	42	6
9	84	9	294	9	343	9	8	12	90	12	169	48	6
10	96	10	384	10	512	10	8	12	102	12	217	54	6
11	108	11	486	11	729	11	8	12	114	12	271	60	6
12	120	12	600	12	1000	12	8	12	126	12	331	66	6
13	132	13	726	13	1331	13	8	12	138	12	397	72	6
14	144	14	864	14	1728	14	8	12	150	12	469	78	6
15	156	15	1014	15	2197	15	8	12	162	12	547	84	6
16	168	16	1176	16	2744	16	8	12	174	12	631	90	6
17	180	17	1350	17	3375	17	8	12	186	12	721	96	6
18	192	18	1536	18	4096	18	8	12	198	12	817	102	6
19	204	19	1734	19	4913	19	8	12	210	12	919	108	6
20	216	20	1944	20	5832	20	8	12	222	12	1027	114	6
21	228	21	2166	21	6859	21	8	12	234	12	1141	120	6
22	240	22	2400	22	8000	22	8	12	246	12	1261	126	6
23	252	23	2646	23	9261	23	8	12	258	12	1387	132	6
24	264	24	2904	24	10648	24	8	12	270	12	1519	138	6
25	276	25	3174	25	12167	25	8	12	282	12	1657	144	6
26	288	26	3456	26	13824	26	8	12	294	12	1801	150	
27	300	27	3750	27	15625	27	8	12	306		1951		

Un'idea più fine del cambiamento

$\Delta A = 5\ cm^2$

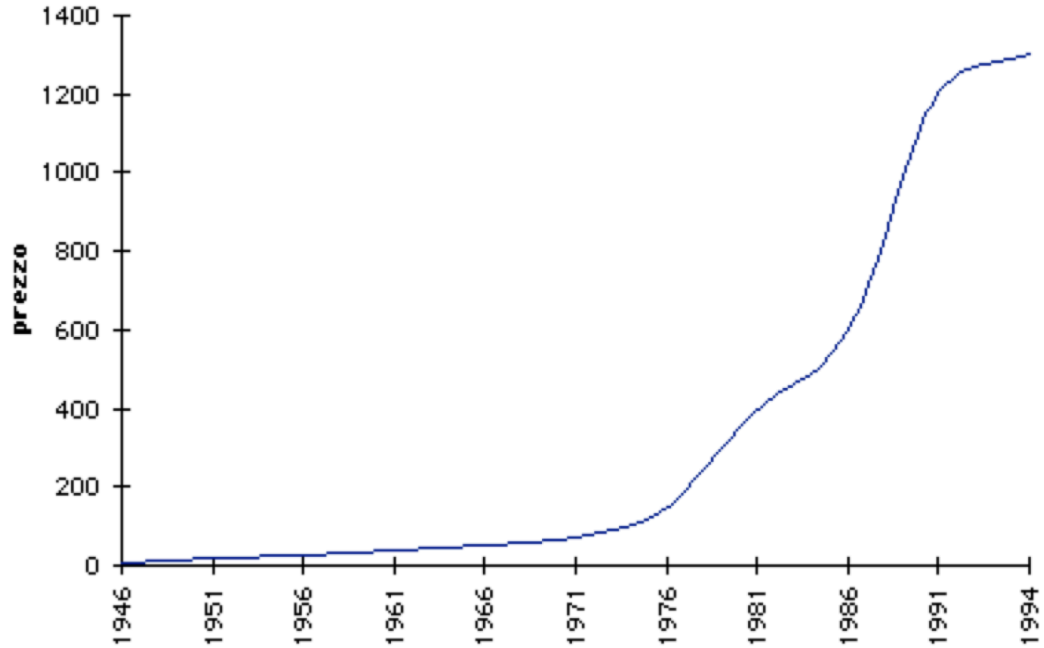


Il cambiamento relativo $\Delta_r A = \Delta A / A$

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 5\ cm^2$ 100%

$\Delta_r = 5\ cm^2 / 50\ cm^2$ 10%

Esempio: Il valore del denaro nel tempo

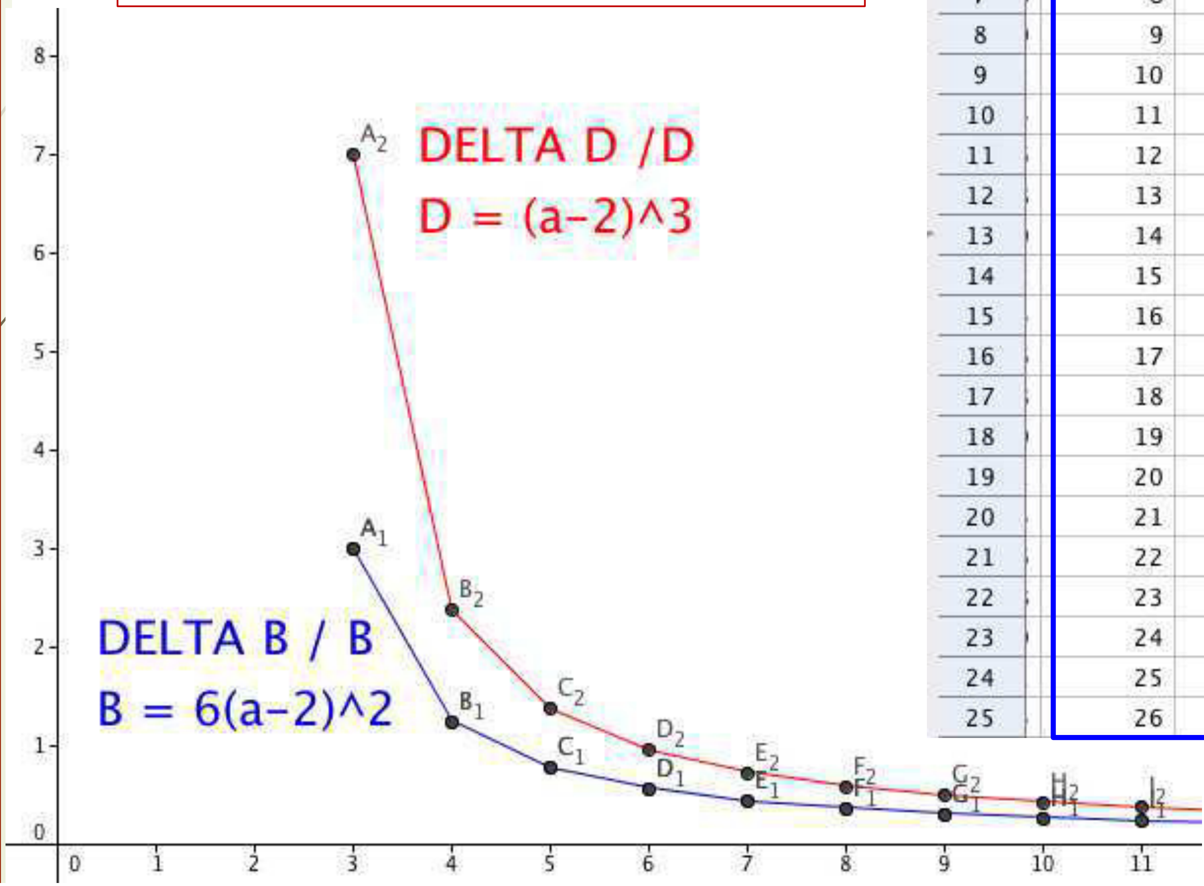


+16 5 15 10 20 80 250 200 600 100

4	20	25	40	50	70	150	400	600	120 0	130 0

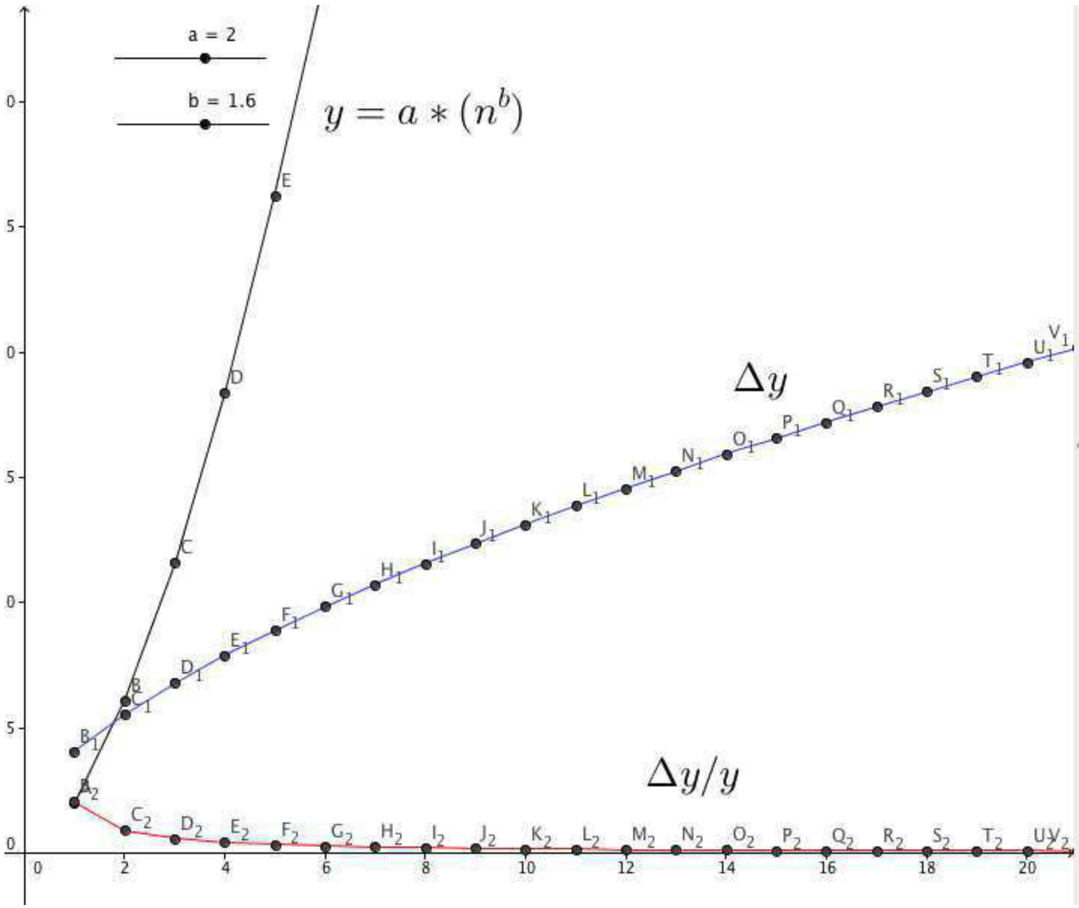
x 5 1,25 1,6 1,25 1,4 2,14 2,66 1,5 2 1,08

Esempio
Cubi e differenze relative



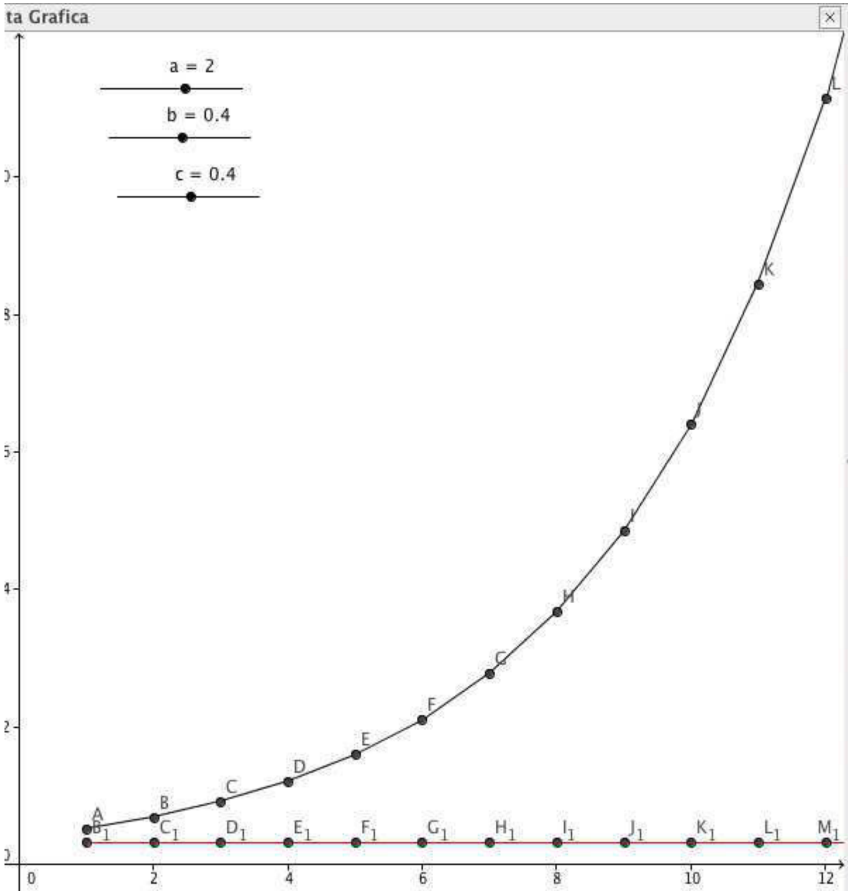
	ΔB/B		I	J	ΔD/D	
1	2		2	1	2	
2	3	3	3	7	3	7
3	4	1.25	4	19	4	2.38
4	5	0.78	5	37	5	1.37
5	6	0.56	6	61	6	0.95
6	7	0.44	7	91	7	0.73
7	8	0.36	8	127	8	0.59
8	9	0.31	9	169	9	0.49
9	10	0.27	10	217	10	0.42
10	11	0.23	11	271	11	0.37
11	12	0.21	12	331	12	0.33
12	13	0.19	13	397	13	0.3
13	14	0.17	14	469	14	0.27
14	15	0.16	15	547	15	0.25
15	16	0.15	16	631	16	0.23
16	17	0.14	17	721	17	0.21
17	18	0.13	18	817	18	0.2
18	19	0.12	19	919	19	0.19
19	20	0.11	20	1027	20	0.18
20	21	0.11	21	1141	21	0.17
21	22	0.1	22	1261	22	0.16
22	23	0.1	23	1387	23	0.15
23	24	0.09	24	1519	24	0.14
24	25	0.09	25	1657	25	0.14
25	26	0.09	26	1801		

Diff relative: polinomi



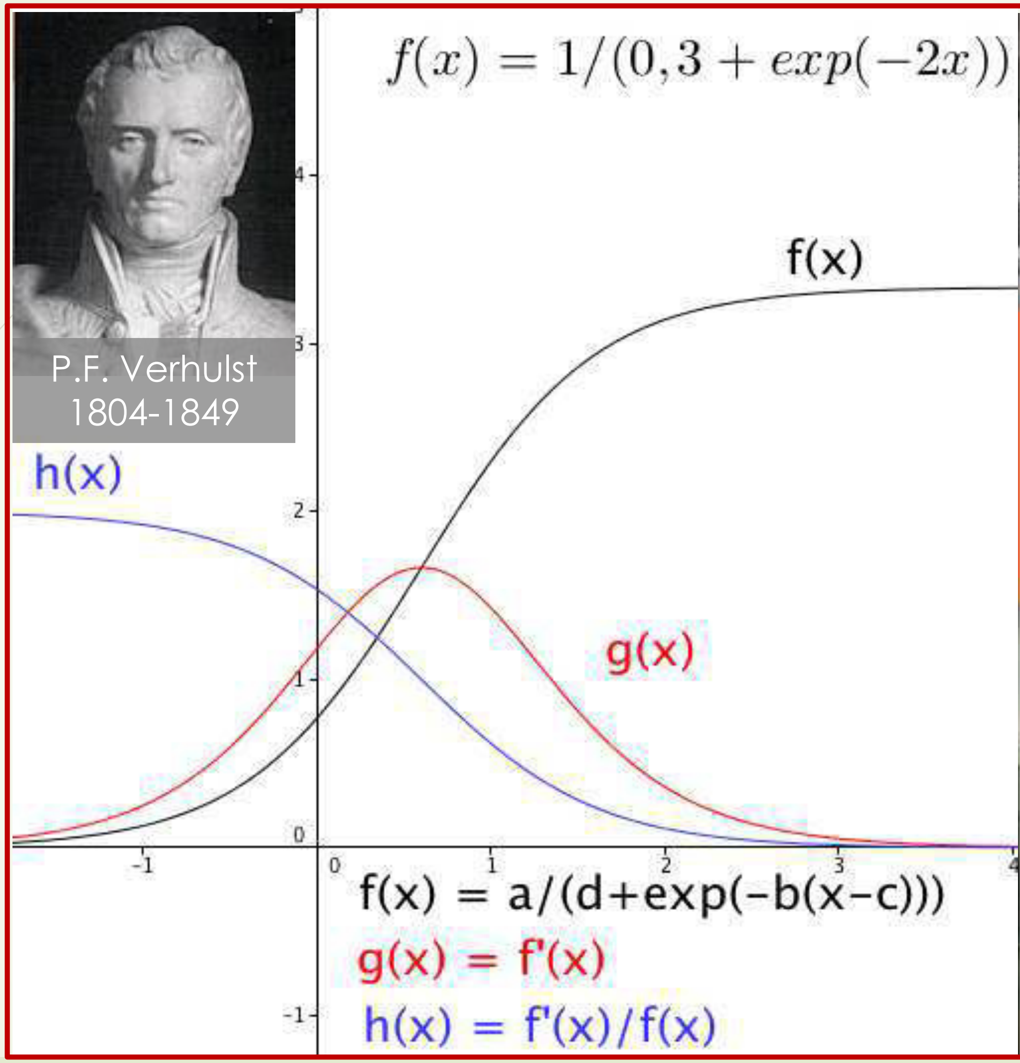
	A	B	C	D	E	F
1	n	a*n^b	n	DELTA B	n	DELTA B /B
2	1	2	1	4.06	1	2.03
3	2	6.06	2	5.54	2	0.91
4	3	11.6	3	6.78	3	0.58
5	4	18.38	4	7.89	4	0.43
6	5	26.27	5	8.9	5	0.34
7	6	35.16	6	9.84	6	0.28
8	7	45	7	10.72	7	0.24
9	8	55.72	8	11.55	8	0.21
10	9	67.27	9	12.35	9	0.18
11	10	79.62	10	13.12	10	0.16
12	11	92.74	11	13.85	11	0.15
13	12	106.59	12	14.56	12	0.14
14	13	121.15	13	15.25	13	0.13
15	14	136.41	14	15.92	14	0.12
16	15	152.33	15	16.57	15	0.11
17	16	168.9	16	17.2	16	0.1
18	17	186.1	17	17.82	17	0.1
19	18	203.92	18	18.43	18	0.09
20	19	222.35	19	19.02	19	0.09
21	20	241.37	20	19.6	20	0.08
22	21	260.96	21	20.17	21	0.08
23	22	281.13	22	20.72	22	0.07
24	23	301.85	23	21.27	23	0.07
25	24	323.12	24	21.81	24	0.07
26	25	344.93	25		25	

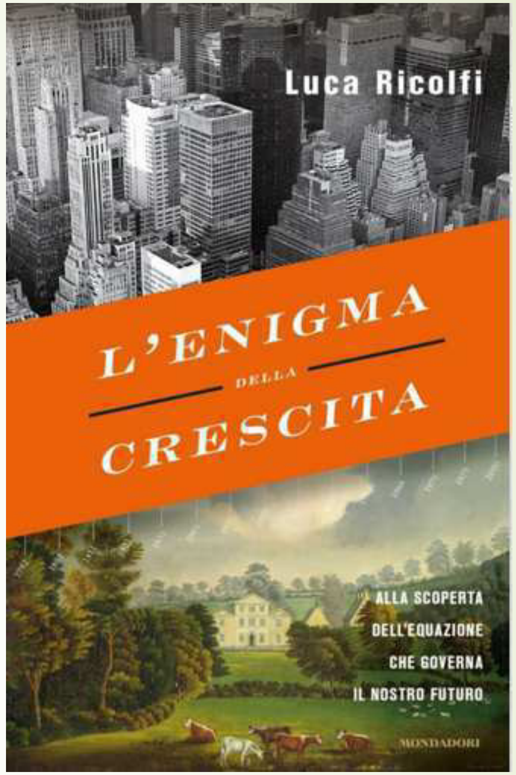
Diff relative: esponenziali



Vista Foglio di calcolo

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a^n	a^(bn)	n	c*a^(b*n)	DELTA E	n	DELTA E/E
2	1	2	1.32	1	0.53	0.17	1	0.32
3	2	4	1.74	2	0.7	0.22	2	0.32
4	3	8	2.3	3	0.92	0.29	3	0.32
5	4	16	3.03	4	1.21	0.39	4	0.32
6	5	32	4	5	1.6	0.51	5	0.32
7	6	64	5.28	6	2.11	0.67	6	0.32
8	7	128	6.96	7	2.79	0.89	7	0.32
9	8	256	9.19	8	3.68	1.17	8	0.32
10	9	512	12.13	9	4.85	1.55	9	0.32
11	10	1024	16	10	6.4	2.04	10	0.32
12	11	2048	21.11	11	8.44	2.7	11	0.32
13	12	4096	27.86	12	11.14	3.56	12	0.32
14	13	8192	36.76	13	14.7	4.7	13	0.32
15	14	16384	48.5	14	19.4	6.2	14	0.32
16	15	32768	64	15	25.6	8.18	15	0.32
17	16	65536	84.45	16	33.78	10.79	16	0.32
18	17	131072	111.43	17	44.57	14.24	17	0.32
19	18	262144	147.03	18	58.81	18.79	18	0.32
20	19	524288	194.01	19	77.6	24.8	19	0.32
21	20	1048576	256	20	102.4	32.72	20	0.32
22	21	2097152	337.79	21	135.12	43.17	21	0.32
23	22	4194304	445.72	22	178.29	56.96	22	0.32
24	23	8388608	588.13	23	235.25	75.17	23	0.32
25	24	167772...	776.05	24	310.42	99.18	24	0.32
26	25	335544...	1024	25	409.6			





Bricolage di funzioni

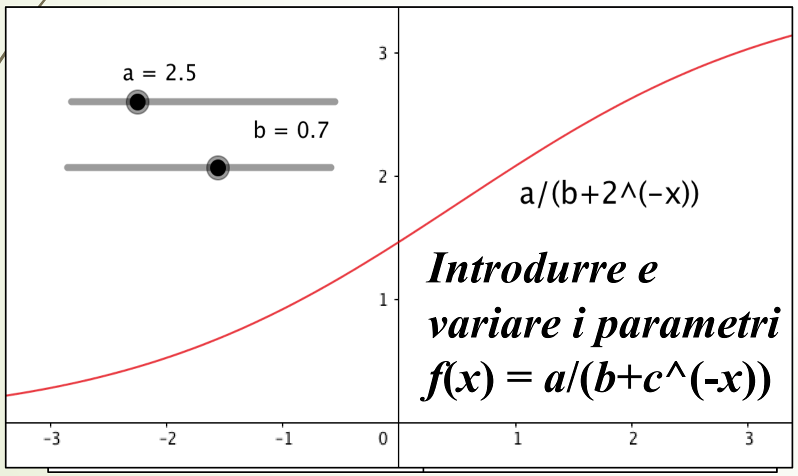
Fenomeni di crescita in biologia ed economia: ragionare sul cambiamento come educazione alla razionalità

“Bricolage” delle funzioni: la curva logistica

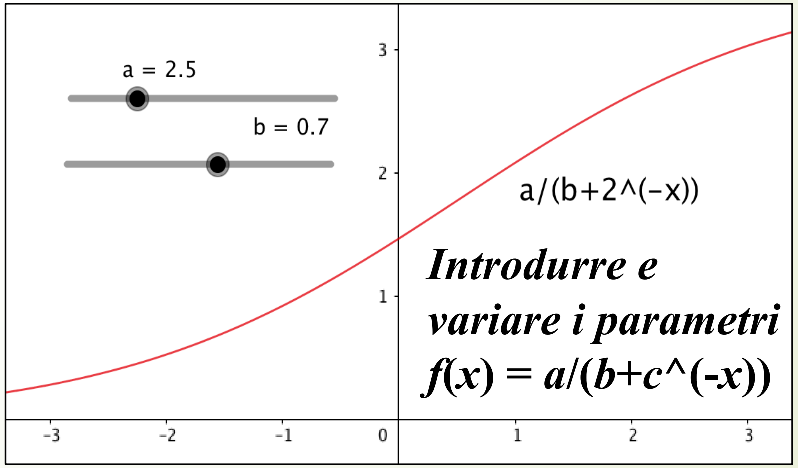
Passo 1. Vedere l’effetto che fa:

$x \rightarrow 1/x$; x^2 $\rightarrow$ $1/x$^2; $1+x \rightarrow 1/(1+x)$; $1+x$^2 $\rightarrow$ $1/(1+x^2)$;
$f(x) \rightarrow$ f($-x$)]; (introdurre dei parametri nelle formule).

Passo 2.
Verso una curva logistica
$2^x \rightarrow 1/(1+2^x)$



Passo 3.
Una curva logistica
$1/(1+2^x) \rightarrow 1/(1+2^{-x})$

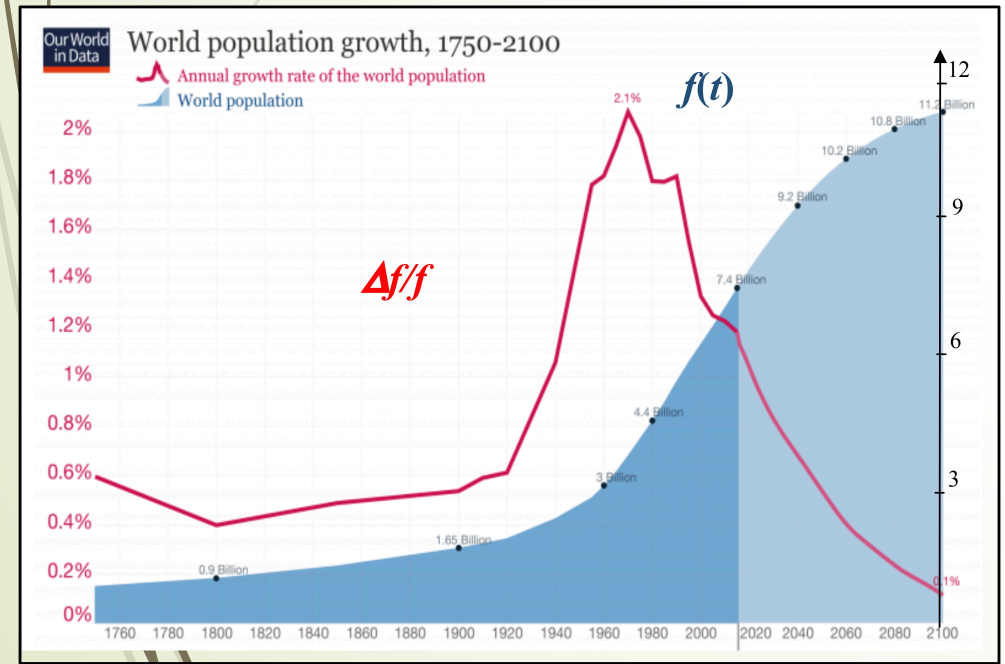


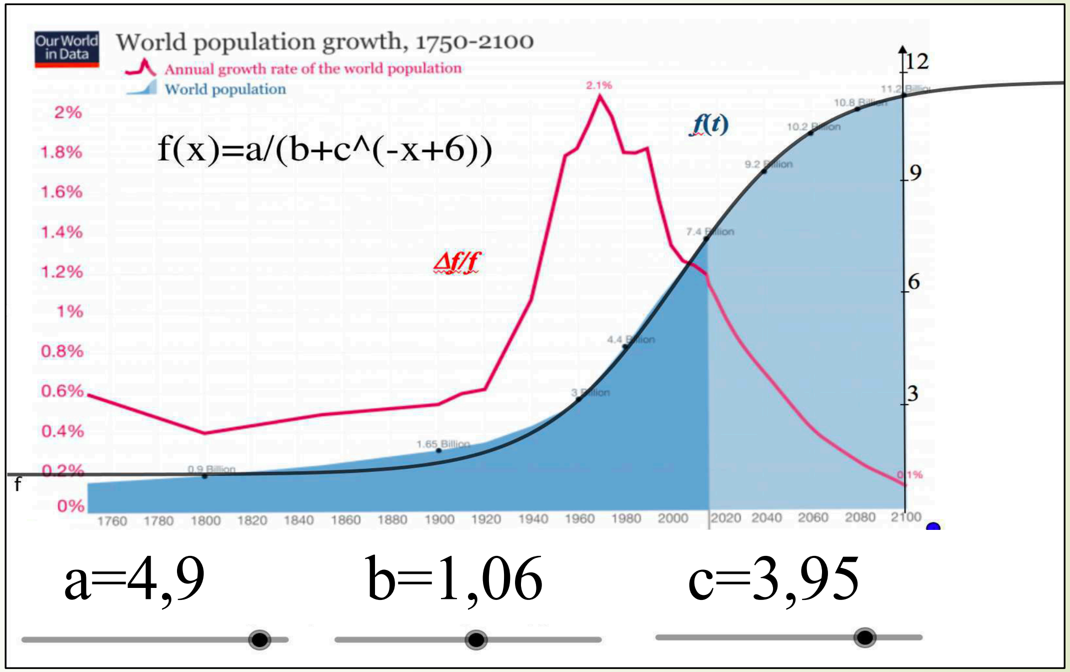
"Bricolage" delle funzioni: la curva logistica

Passo 1. Vedere l'effetto che fa:

$x \rightarrow 1/x$; $x^2 \rightarrow 1/x^2$; $1+x \rightarrow 1/(1+x)$; $1+x^2 \rightarrow 1/(1+x^2)$; $f(x) \rightarrow f(-x)$]; (introdurre dei parametri nelle formule).

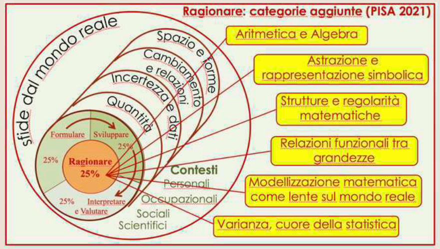
Passo 4. Approssimare





Conclusioni

ΠΑΙΔΕΙΑ 2.0



Metodologia → 1 → **La Ricerca Variata**

Contenuti → 2 → **Le Funzioni e il Cambiamento**

Nella mia presentazione ho cercato di illustrare i seguenti punti:

1. Occorre un progetto educativo che tenga conto del modo in cui sta cambiando la società e si opponga al 'puntillismo' sottolineato da Baumann.
2. La necessità di creare una continuità tra passato, presente e futuro → la Paideia 2.0: metodi e contenuti.

3. Il MRV come metodo della Paideia 2.0: esso coinvolge gli studenti come attori del processo di apprendimento, in cui sono spinti a considerare un argomento da più punti di vista, quindi a comprenderlo in modo più profondo.
4. Un esempio di contenuti: le funzioni come rappresentazioni specifiche nelle attività di matematizzazione (modellizzazione) e quale strumento chiave nella concettualizzazione in matematica.

"Il 65% dei bambini che iniziano le elementari farà un lavoro che oggi non esiste. E allora, che cosa deve insegnare la scuola oggi?"

(Business Insider Italia, 4/6/2017)

Grazie!

« Un consiglio: non fossilizzatevi su un mestiere in particolare, ma scegliete un corso di studi che vi insegni a cavarvela in situazioni diverse e complesse. Provate per esempio con la matematica. È un passepartout per le professioni del futuro. Già perché web company, società finanziarie, banche e imprese dell'alta tecnologia cercano chi sa maneggiare bene i numeri».

(*Le mille opportunità di un matematico*,
Intervista a A. Figalli, TuttoScienze, 5-9-18)