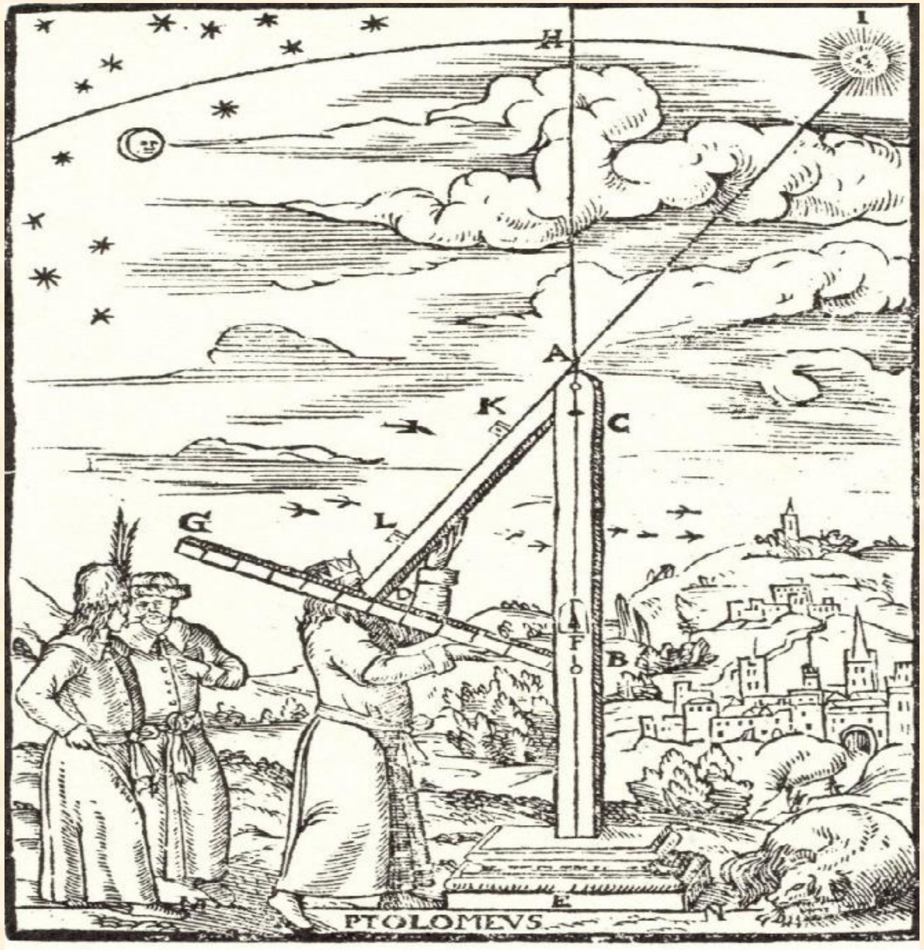
REGIONE
TOSCANA

Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana nell'ambito dell'azione regionale di sistema

Laboratori del Sapere Scientifico

Dallo gnomone al teodolite

Un percorso nella storia della trigonometria attraverso i suoi strumenti



a.s. 2014/15

Docenti: Cecilia Magni,Guglielmo Iacomelli

Liceo “B. Varchi” Montevarchi (AR)

AMBITO DISCIPLINARE: MATEMATICA

Livello scolare di riferimento:Scuola secondaria di secondo grado – triennio

Breve riassunto del percorso

Questo percorso è stato realizzato e sperimentato in alcune classi quarte del nostro istituto (liceo scientifico di ordinamento, liceo delle scienze applicate e liceo classico).

Dopo una breve introduzione dell'insegnante, gli studenti hanno formato dei gruppi di lavoro per ricercare notizie sugli strumenti usati nel corso dei secoli per misurare distanze e altezze (gnomone, triquetrum, quadrato geometrico, quadrante, bastone di Giacobbe, teodolite).

Gli studenti hanno analizzato brani originali in cui vengono descritti gli strumenti e spiegati i metodi di misura e sono stati effettivamente costruiti un triquetrum e un bastone di Giacobbe.

Collocazione del percorso nel curricolo verticale

Questo percorso didattico permette di riprendere nella classe quarta gli argomenti della trigonometria (funzioni goniometriche, risoluzione del triangolo rettangolo) già affrontati nella classe seconda dando spazio ad un’impostazione storico-culturale e nello stesso tempo mettendo in luce il legame tra parte teorica e strumentale nello sviluppo di questa disciplina.

Obiettivi essenziali di apprendimento

Gli obiettivi di apprendimento sono i seguenti:

comprendere come la trigonometria si sia sviluppata nel tempo e come questa evoluzione possa essere analizzata attraverso lo studio dei suoi strumenti di misura;

comprendere lo stretto legame esistente tra concetto e strumento;
apprezzare la lettura di “brani originali” in cui vengono spiegati procedimenti di misura trigonometrici.

Elementi salienti dell’approccio metodologico

Gli elementi fondamentali del nostro approccio metodologico possono essere così riassunti:

la scelta del lavoro per gruppi per favorire la collaborazione e lo sviluppo della capacità di organizzarsi e suddividere i compiti;

l’attenzione all’aspetto storico nello sviluppo della matematica e la ricerca di brani originali;

il privilegiare l’aspetto “strumentale” e di misurazione rispetto ad una impostazione solo teorica e concettuale della trigonometria.

Materiali e strumenti impiegati

Materiali
Brani originali tratti da:

Tolomeo,"*Almagesto*"(testo in greco);
Cristofano di Gherardo di Dino " *Pratica della geometria*" (rifacimento in volgare dell'opera di Leonardo Pisano), 1443;
Cosimo Bartoli "*Del modo di misurare le distantie, le superfici, i corpi, le province, le prospettive e tutte le altre cose terrene che possono occorrere a gli huomini, secondo le vere regole di Euclide et de gli altri più lodati scrittori*" Pratica Geometria (Venezia 1564)

Strumenti

uso dello gnomone per alcune misure;

costruzione del "triquetrum" e del "bastone di Giacobbe";

uso del teodolite

Ambiente in cui è stato sviluppato il percorso

Il percorso è stato sviluppato:

nell’aula di informatica per effettuare la ricerca su Internet dei brani originali riguardanti gli strumenti ed i metodi di misura;

nell’aula scolastica (dotata di LIM) per descrivere i vari strumenti e relazionare da parte dei vari gruppi di lavoro;

all’esterno (resede scolastico) per effettuare alcune misure con gli strumenti costruiti

Tempo impiegato

2 ore per la messa a punto preliminare nel gruppo LSS;

8 ore per la progettazione specifica e dettagliata nelle classi;

10 ore di tempo scuola di sviluppo del percorso;

2 ore per uscite esterne;

12 ore per la documentazione

Descrizione del percorso didattico

L'insegnante descrive brevemente gli strumenti utilizzati per misurare distanze e altezze che si sono susseguiti nel corso dei secoli: gnomone, triquetrum, quadrato geometrico, quadrante, bastone di Giacobbe, teodolite.

Gli studenti si dividono in gruppi di lavoro e ciascun gruppo sceglie uno strumento da studiare: si ricercano informazioni sullo strumento e sulla sua utilizzazione (lavorando sia in classe che a casa) ed il lavoro (dopo una revisione da parte dell'insegnante) viene presentato al resto della classe.

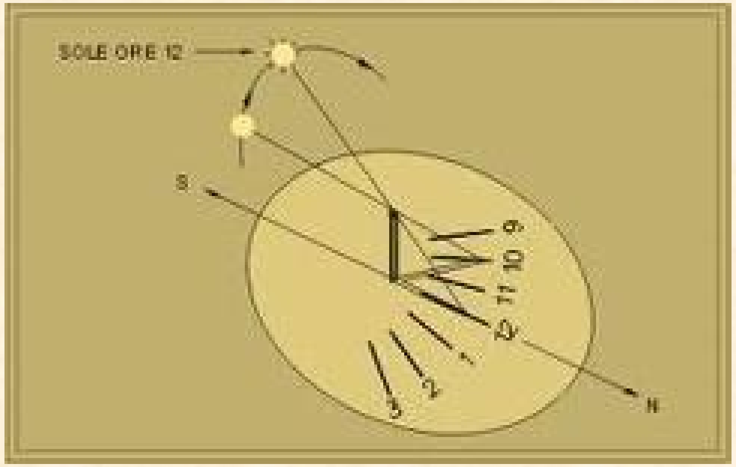
Due gruppi sono riusciti a realizzare il triquetrum e il bastone di Giacobbe. Asta, triquetrum e bastone di Giacobbe sono stati usati per la "verifica" in cui l'insegnante ha chiesto ai vari gruppi di utilizzarli per misurare l'altezza della nostra scuola.

Si presentano di seguito i lavori finali prodotti dai vari gruppi .

Gnomone

Lo gnomone è costituito da un palo conficcato verticalmente o orizzontalmente.

Il suo nome deriva dal greco **γνώμων** che significa "*che permette di conoscere*": l'ombra dello gnomone prodotta dal Sole cambia a seconda dell'ora e del periodo dell'anno e quindi lo gnomone permette di conoscere l'ora e fu utilizzato come orologio solare.

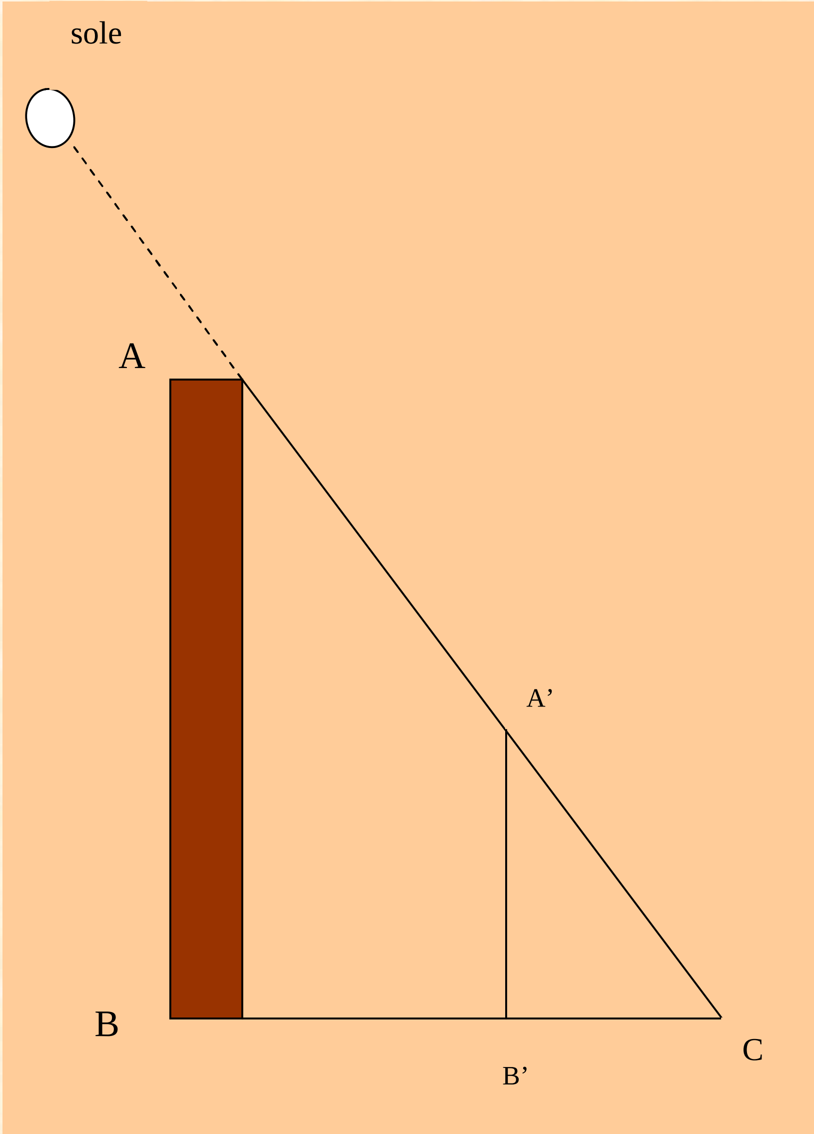


Noi ci siamo però concentrati sulle **misure che possono essere effettuate usando lo gnomone come semplice "asta".**

L’altezza di una torre

La misura B’C dell’**ombra** dell’asta A’B’, confrontata con la lunghezza A’B’ dell’asta, può essere utilizzata per effettuare la misura dell’altezza AB di una torre, conoscendo BC e basandosi sulla <u>similitudine dei triangoli</u>.

AB : BC =A’B’ : B’C



Misure “a vista”

Nel medioevo l’asta fu utilizzata soprattutto per misure “a vista” cioè “**traguardando l’estremità**” dell’asta.

Cristofano di Gherardo di Dino nel suo manoscritto del 1443 ***Pratica della geometria*** (rifacimento in volgare dell’opera di Leonardo Pisano) espone diversi metodi per misurare l’altezza di una torre utilizzando un’asta**.**

Primo metodo

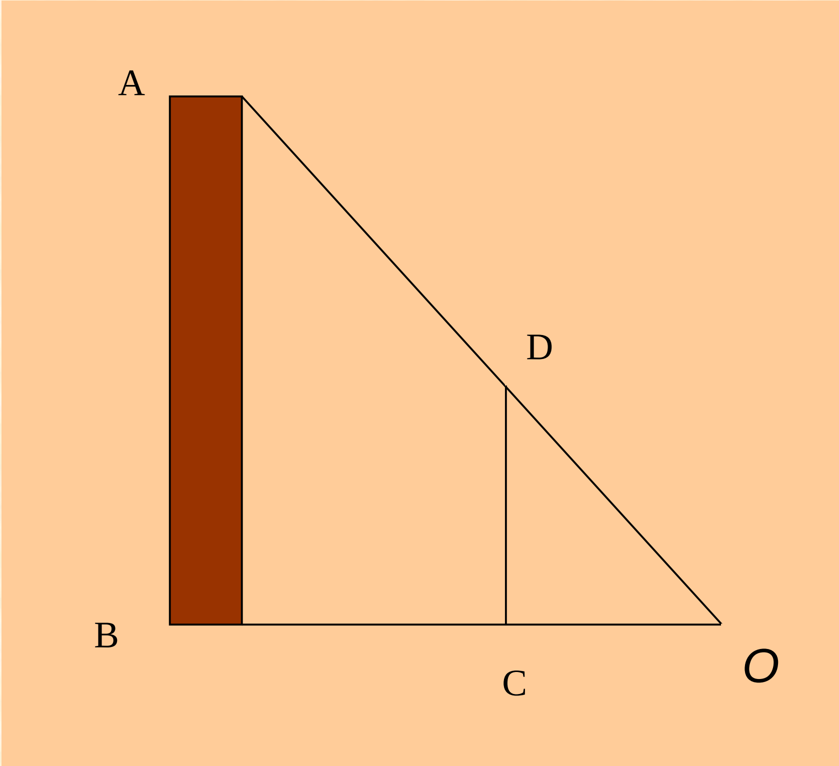
(stendendosi a terra)

“Se vuoi sapere l’altezza di una torre prendi un’asta di altezza pari all’altezza dei tuoi occhi da terra. Distenditi a terra con i piedi verso la torre tenendo l’asta verticale tra i talloni. Spostati poi avvicinandoti o allontanandoti dalla torre fino a vedere la sommità della torre coincidere con l’estremità dell’asta. “

Ricordiamo che l’asta DC è lunga quanto la persona CO che compie la misurazione e quindi DCO è un triangolo rettangolo isoscele.

Se l’occhio è in O e l’osservatore è disteso (CO) per la similitudine dei triangoli ABO e DCO si ha che anche l’altezza della torre AB è uguale alla distanza BO dalla torre.

Quindi senza nessun calcolo si determina l’altezza della torre.



Secondo metodo

(senza distendersi a terra)

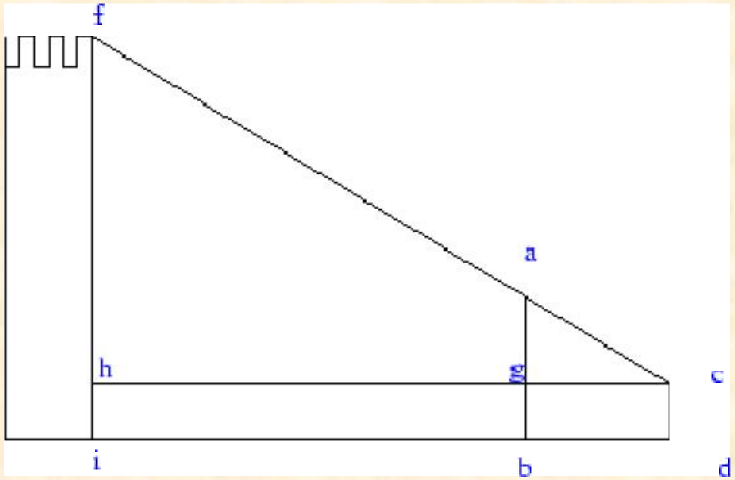
Se vuoi sapere l'altessa d'alcuna torre, pone una asta ricta in del piano dinanti a te di ver la torre, et sia più lungha che tu si' come vedi in questa prezente fighura; et sia l'asta ab et tu sia cd . Et or righuarda movendoti, là e qua in dietro e innansi, sicchè tu veggi per lo a la sommità della torre, cioè lo punto f .

- Piantiamo sul terreno l'asta di misurazione ab : sia cd l'altezza dell'osservatore che arretra in modo di poter traguardare da c la cima della torre f e supponiamo di poter misurare id.

- Per la similitudine dei triangoli abbiamo:

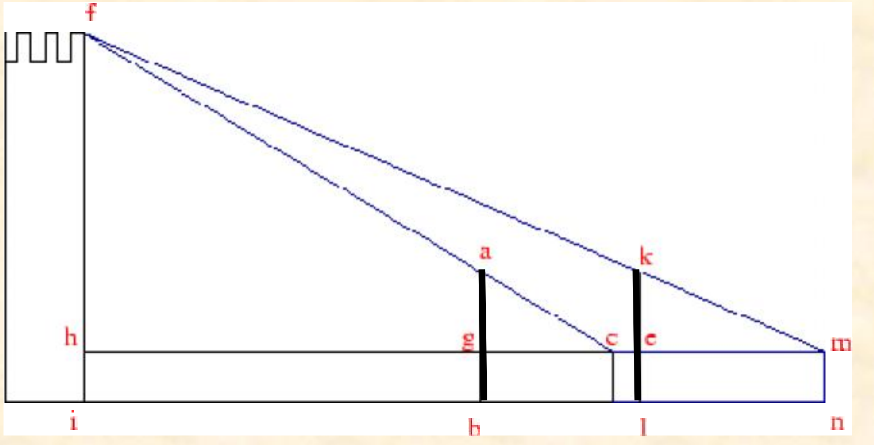
$$fh : hc = ag : gc$$

e quindi si può ricavare fh e sommando cd si trova l'altezza della torre.



Terzo metodo (se non possiamo avvicinarci alla torre)

"*Et se avessj fiumo, overo alcuno altro impedimento sicché non potessi andare alla radice della torre, unde per soctigliessa te la convengha trovare. Perciò piglia lo cioè l'asta overo un'altra simile et torna in dirieto con essa 30 govitj overo quanto ti piace, et polla ricta come di prima; et ora righuarda sicché in diricto tu vegghj per lo m lo k in fine allo f che è la somità della torre.*"



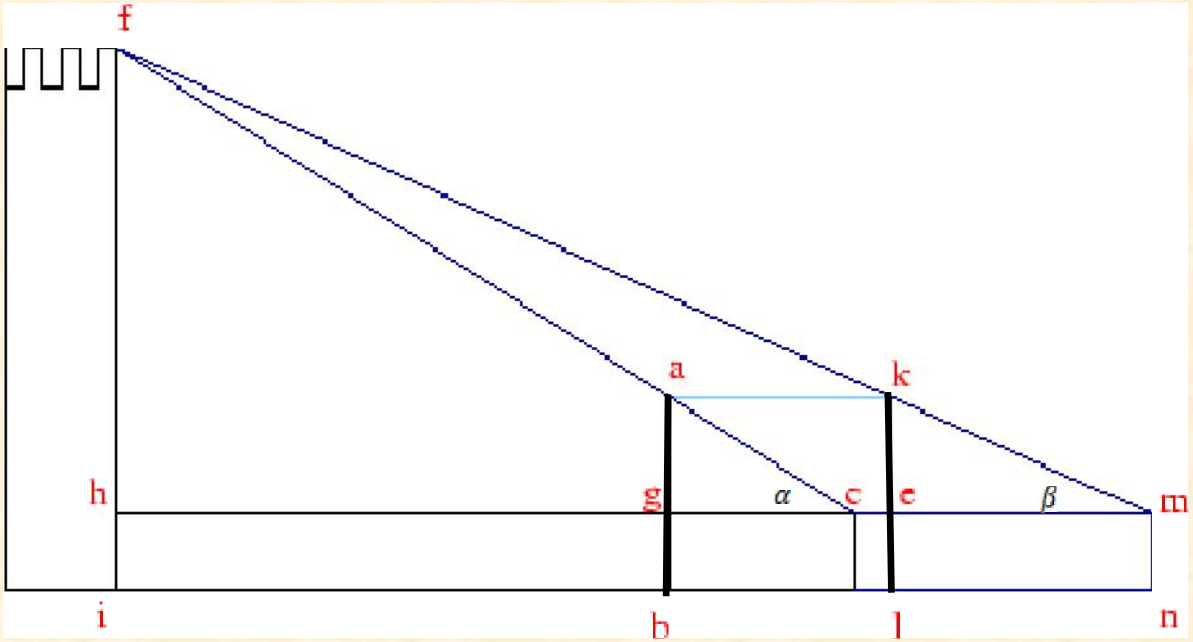
Dalle relazioni che esprimono hm e hc ricaviamo per differenza cm(che rappresenta la lunghezza di cui siamo arretrati) che conosciamo e quindi troviamo fh che sommato a mn dà l'altezza della torre.

$$hm = \frac{em}{ga} hf \qquad hc = \frac{cg}{ga} hf$$

$$cm = hm - hc$$

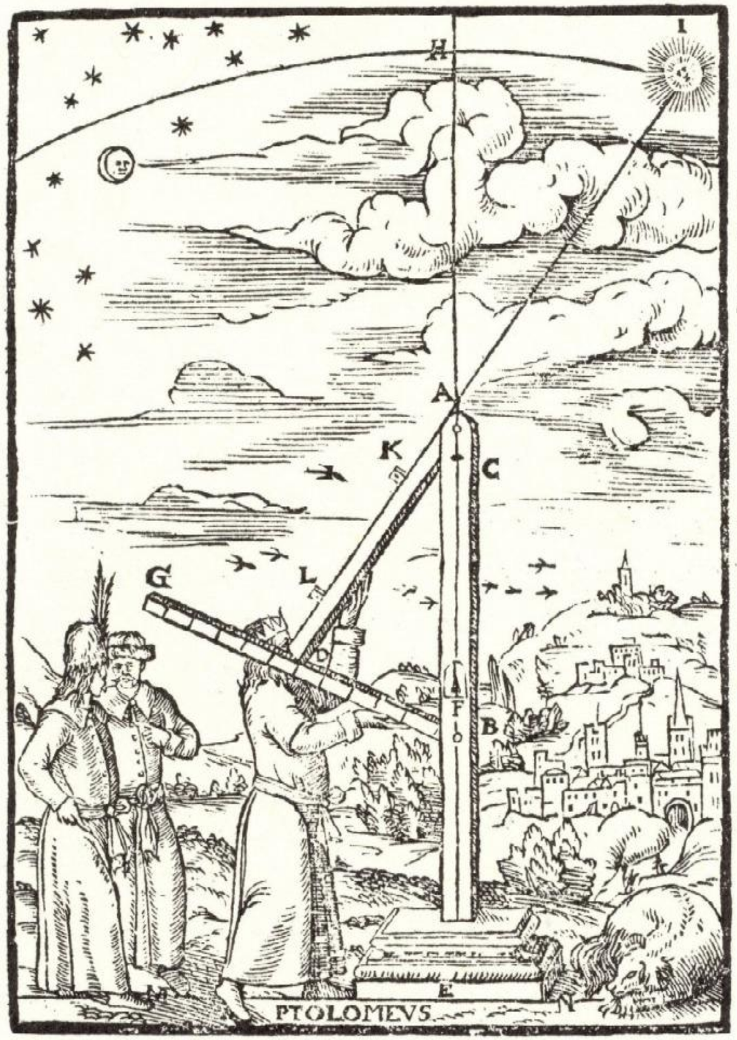
•

Esercizio: possiamo esprimere questa relazione utilizzando le cotangenti degli angoli in figura.



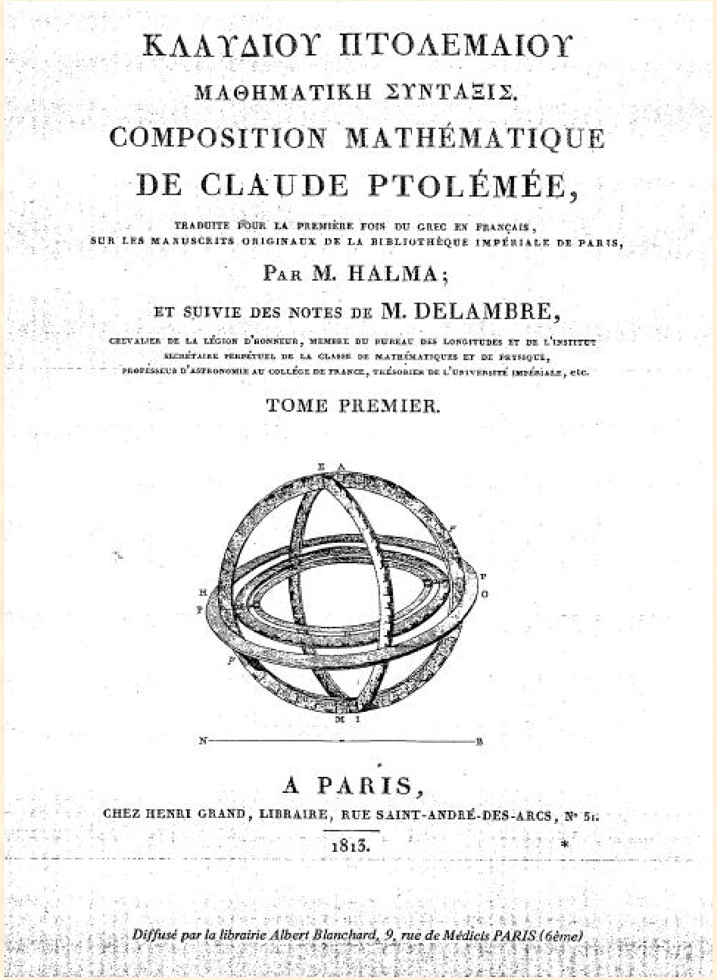
$$h_f = \frac{cm}{\frac{em}{ga} - \frac{cg}{ga}} = \frac{cm}{cotg\beta - cotg\alpha}$$

Triquetrum



*It is made of 3. pea-
ces, beyng 4. ſquare:
As in the Picture
where A. F. is the
firſt peace or rule.
A.D. The ſeconde.
G.D. the third rule.
E. The Foote of the
ſtaffe.
C.F. The Plumrule.
C.B. The ioyntes, in
which the ſecond &
third Rulers are mo-
ued.
K.L. The ſighte ho-
les.
I. The Sonne.
H. The Zenit, or ver
ticall pointe.
M. N. The Noone-
ſtead Lyne.*

Da "The Cosmographical Glasse"
William Cuningham, 1559



ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΤΑΞΙΣ.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE

DE CLAUDE PTOLÉMÉE,

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS,
SUR LES MANUSCRITS ORIGINAUX DE LA BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE DE PARIS,

PAR M. HALMA;

ET SUIVIE DES NOTES DE M. DELAMBRE,

CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, MEMBRE DU BUREAU DES LONGITUDES ET DE L'INSTITUT
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ET DE PHYSIQUE,
PROFESSEUR D'ASTRONOMIE AU COLLÉGE DE FRANCE, TRÉSORIER DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE, etc.

TOME PREMIER.

A PARIS,

CHEZ HENRI GRAND, LIBRAIRE, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS, Nº 51.

1813.

Diffusé par la librairie Albert Blanchard, 9, rue de Médicis PARIS (6ème)

Triquetrum (triangolo) è il nome latino di uno strumento descritto in dettaglio nell'Almagesto di Tolomeo: Tolomeo lo descrive come strumento per misurare l'angolo tra la verticale e la direzione di vista della Luna.

Il titolo originale greco di questa opera è mathematikè syntaxis(composizione matematica) titolo spesso preceduto dal superlativo megistè (la più grande, la migliore).

Gli Arabi, con l'aggiunta dell'articolo Al, tradussero l'opera con il titolo Al-magistè che nelle traduzioni latine medievali divenne Almagestum.

Il XII capitolo del V libro dell’Almagesto è interamente dedicato alla descrizione di questo strumento ed al metodo di misura della parallasse lunare.

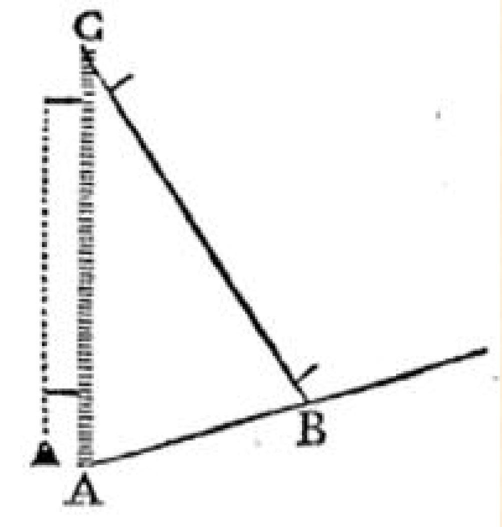
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΒ.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΟΡΓΑΝΟΥ ΠΑΡΑΛΛΑΚΤΙΚΟΥ.

ΗΜΕΙΣ δὲ ἵνα μηδὲν τῶν ἀδήλων εἰς τὴν τοιαύτην ἐπίσκεψιν παραλαμβάνωμεν, κατεσκευάσαμεν ὄργανον δι᾽ οὗ δυνηθείημεν ἄν, ὡς ἔνι μάλιστα, ἀκριβῶς τηρῆσαι πόσον καὶ ἀπὸ πηλίκης τοῦ κατὰ κορυφὴν ἀποστάσεως ἡ σελήνη παραλλάσσει, ὡς ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν πόλων τοῦ ὁρίζοντος καὶ αὐτῆς γραφομένου μεγίστου κύκλου.

Noi dunque, per non lasciare alcuna incertezza nel soggetto che andiamo indagando, abbiamo costruito uno strumento per mezzo del quale potremmo essere in grado di osservare con la massima esattezza quanto di ciascuna distanza al vertice la luna si discosta dalla parallasse, (misurandola) sul cerchio massimo tracciato per i poli dell’orizzonte e per la luna stessa.

Ecco lo strumento costruito seguendo le indicazioni di Tolomeo.



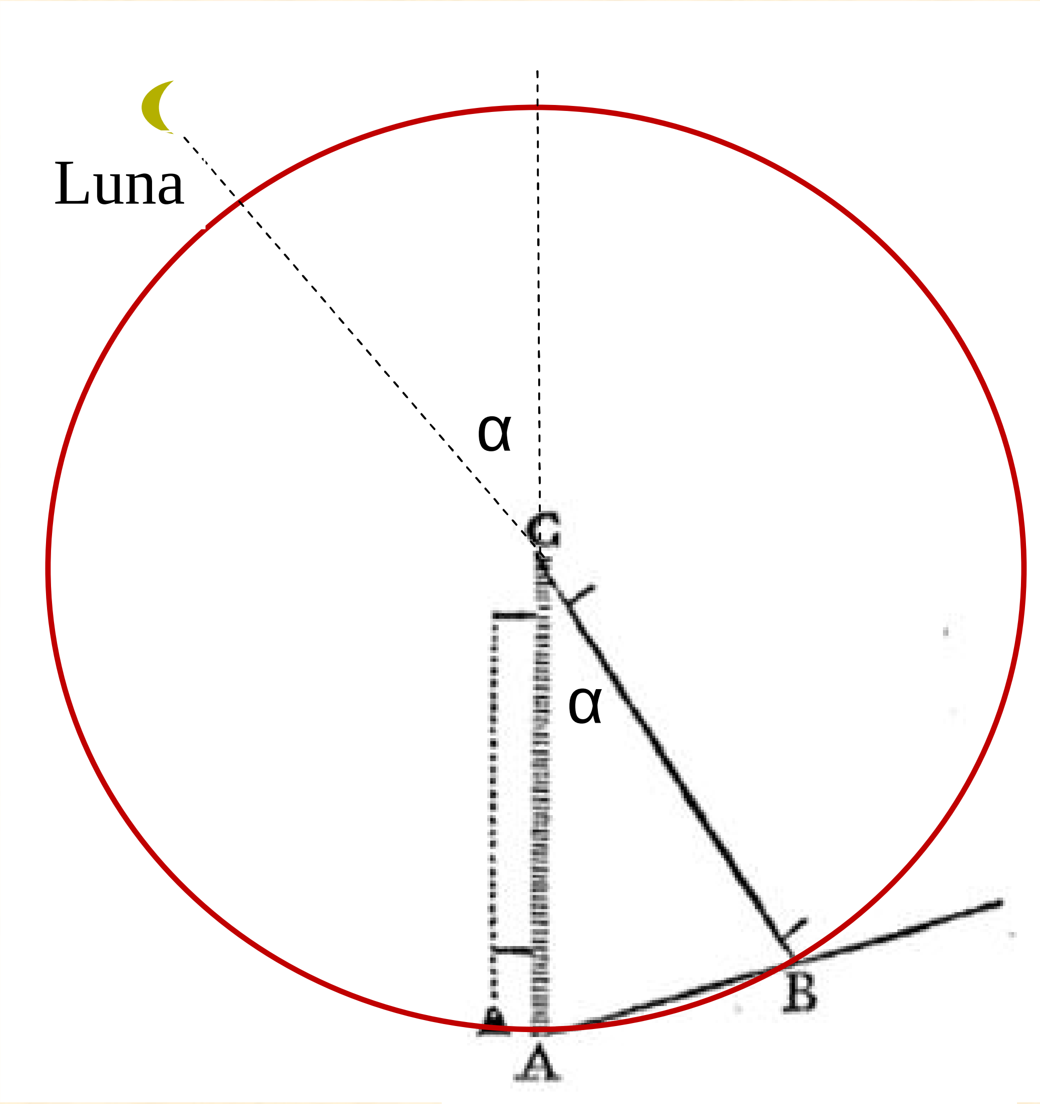
- Asta AC fissa e mantenuta in posizione verticale mediante un filo a piombo;
- Asta BC mobile intorno ad un perno in C;
- su BC ci sono due “alette” (prismi) forate al centro per “mirare” la Luna;
- AC e BC hanno uguale lunghezza;
- AB asta sottile mobile intorno ad perno in A.

Osservazioni

-AB è una corda della circonferenza con centro in C;

-AC viene diviso in 60 parti uguali (quindi il diametro in 120 parti) e la lunghezza del segmento AB espressa in parti è la funzione goniometrica usata dai greci chiamata corda di α.

Questo strumento misura quindi la funzione goniometrica corda(α).



Per collegare l’angolo α in gradi sessagesimali alla rispettiva corda Tolomeo compila la tavola delle corde, di cui riportiamo solo la parte corrispondente agli angoli da 45° a 63°

40 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

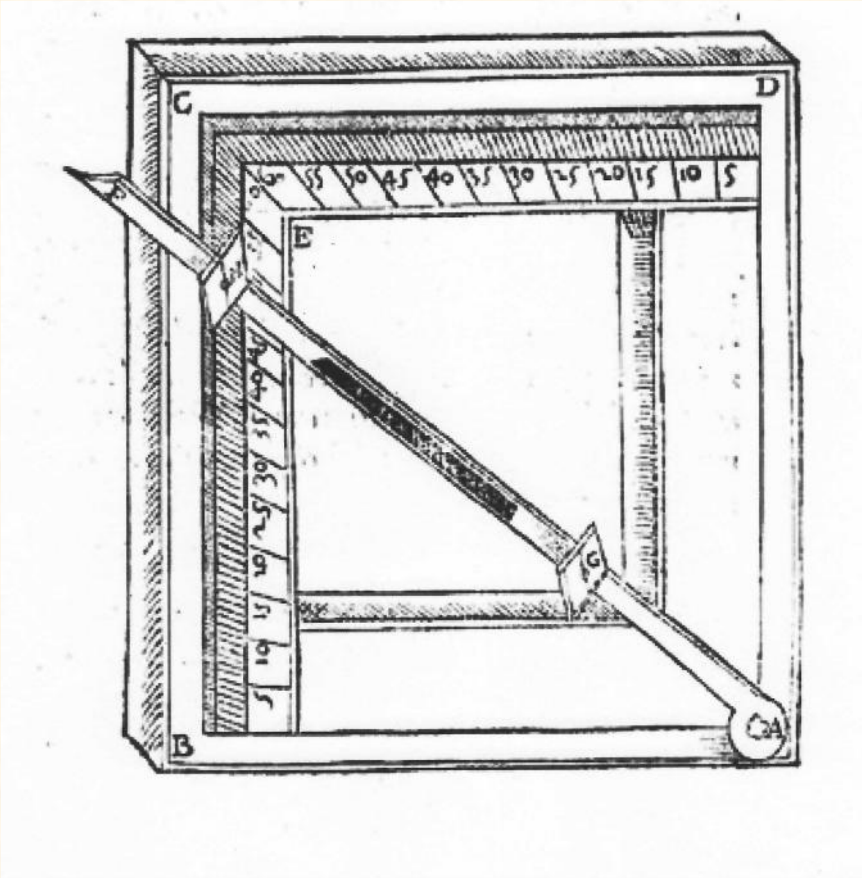
TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

Arcs		Cordes			Trentièmes des différences			
Degrés	Min.	Part. du diam.	Prim.	Second.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
45	30	46	21	19	0	0	57	54
46	0	46	53	16	0	0	57	47
46	30	47	22	9	0	0	57	41
47	0	47	51	0	0	0	57	34
47	30	48	19	47	0	0	57	27
48	0	48	48	30	0	0	57	21
48	30	49	17	11	0	0	57	14
49	0	49	45	48	0	0	57	7
49	30	50	14	21	0	0	57	0
50	0	50	42	51	0	0	56	53
50	30	51	11	18	0	0	56	46
51	0	51	39	41	0	0	56	39
51	30	52	8	0	0	0	56	32
52	0	52	36	16	0	0	56	26
52	30	53	4	29	0	0	56	18
53	0	53	32	38	0	0	56	10
53	30	54	0	43	0	0	56	3
54	0	54	28	44	0	0	55	55
54	30	54	56	42	0	0	55	48
55	0	55	24	36	0	0	55	40
55	30	55	52	26	0	0	55	33
56	0	56	20	12	0	0	55	25
56	30	56	47	54	0	0	55	17
57	0	57	15	33	0	0	55	9
57	30	57	43	7	0	0	55	1
58	0	58	10	38	0	0	54	53
58	30	58	38	5	0	0	54	45
59	0	59	5	27	0	0	54	37
59	30	59	32	45	0	0	54	29
60	0	60	0	0	0	0	54	21
60	30	60	27	11	0	0	54	12
61	0	60	54	17	0	0	54	4
61	30	61	21	19	0	0	53	56
62	0	61	48	17	0	0	53	47
62	30	62	15	10	0	0	53	39
63	0	62	42	0	0	0	53	30

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Περιφερειῶν		Εὐθειῶν			Ἑξηκοστῶν			
Μοιρῶν		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
με	∠''	μϛ	κα	ιθ	ō	ō	νζ	νδ
μϛ	ō	μϛ	νγ	ιϛ	ō	ō	νζ	μζ
μϛ	∠''	μζ	κβ	θ	ō	ō	νζ	μα
μζ	ō	μζ	να	ō	ō	ō	νζ	λδ
μζ	∠''	μη	ιθ	μζ	ō	ō	νζ	κζ
μη	ō	μη	μη	λ	ō	ō	νζ	κα
μη	∠''	μθ	ιζ	ια	ō	ō	νζ	ιδ
μθ	ō	μθ	με	μη	ō	ō	νζ	ζ
μθ	∠''	ν	ιδ	κα	ō	ō	νζ	ō
ν	ō	ν	μβ	να	ō	ō	νϛ	νγ
ν	∠''	να	ια	ιη	ō	ō	νϛ	μϛ
να	ō	να	λθ	μα	ō	ō	νϛ	λθ
να	∠''	νβ	η	ō	ō	ō	νϛ	λβ
νβ	ō	νβ	λϛ	ιϛ	ō	ō	νϛ	κϛ
νβ	∠''	νγ	δ	κθ	ō	ō	νϛ	ιη
νγ	ō	νγ	λβ	λη	ō	ō	νϛ	ι
νγ	∠''	νδ	ō	μγ	ō	ō	νϛ	γ
νδ	ō	νδ	κη	μδ	ō	ō	νε	νε
νδ	∠''	νδ	νϛ	μβ	ō	ō	νε	μη
νε	ō	νε	κδ	λϛ	ō	ō	νε	μ
νε	∠''	νε	νβ	κϛ	ō	ō	νε	λγ
νϛ	ō	νϛ	κ	ιβ	ō	ō	νε	κε
νϛ	∠''	νϛ	μζ	νδ	ō	ō	νε	ιζ
νζ	ō	νζ	ιε	λγ	ō	ō	νε	θ
νζ	∠''	νζ	μγ	ζ	ō	ō	νε	α
νη	ō	νη	ι	λη	ō	ō	νδ	νγ
νη	∠''	νη	λη	ε	ō	ō	νδ	με
νθ	ō	νθ	ε	κζ	ō	ō	νδ	λζ
νθ	∠''	νθ	λβ	με	ō	ō	νδ	κθ
ξ	ō	ξ	ō	ō	ō	ō	νδ	κα
ξ	∠''	ξ	κζ	ια	ō	ō	νδ	ιβ
ξα	ō	ξ	νδ	ιζ	ō	ō	νδ	δ
ξα	∠''	ξα	κα	ιθ	ō	ō	νγ	νϛ
ξβ	ō	ξα	μη	ιζ	ō	ō	νγ	μζ
ξβ	∠''	ξβ	ιε	ι	ō	ō	νγ	λθ
ξγ	ō	ξβ	μβ	ō	ō	ō	νγ	λ

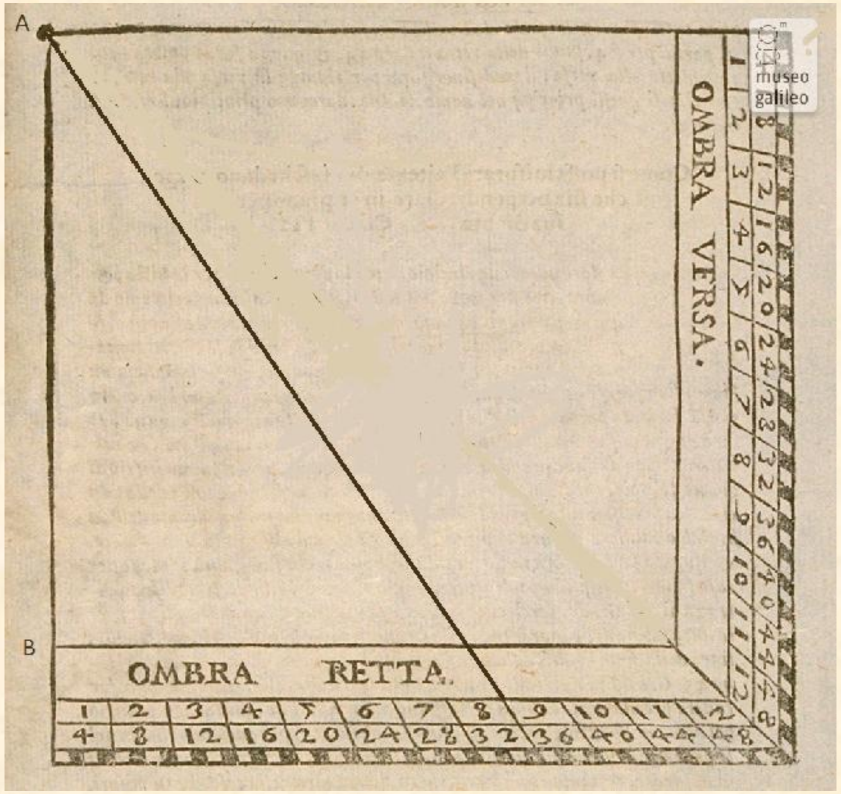
Quadrato geometrico

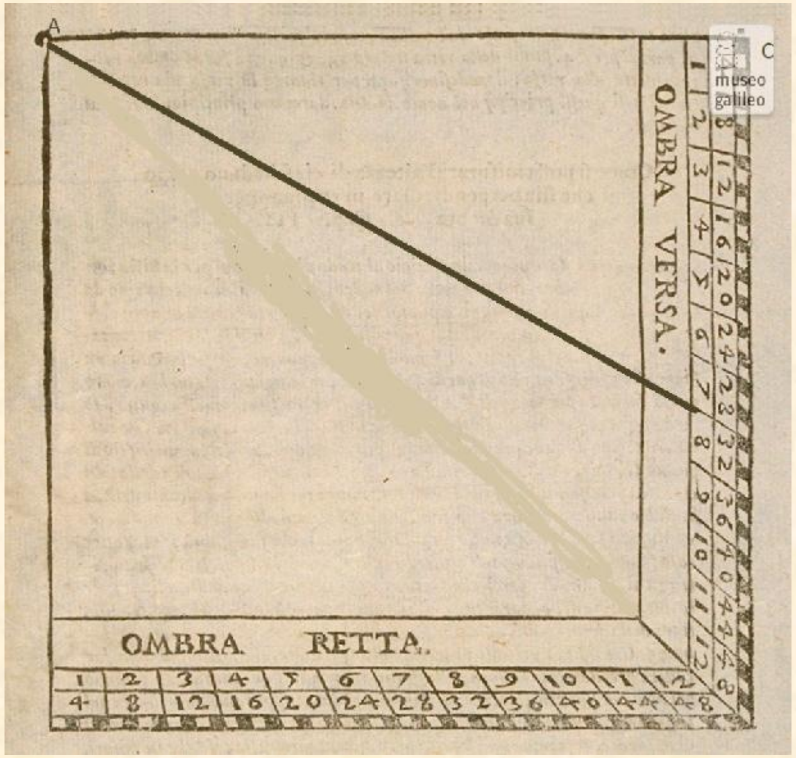


Lo strumento è costituito da quattro regoli di legno disposti secondi i lati di un quadrato.

In uno dei vertici, dove l'osservatore pone l'occhio, è incernierata l'**alidada** o asse di osservazione, o linea di mira, dotata di traguardi, che ruota movendosi sopra due lati del quadrato,convenientemente graduati.

Il quadrato geometrico era chiamato anche "**quadrato delle ombre**" o instrumentum gnomonicum.
L' alidada (linda) simula il raggio del Sole:
se la linda interseca il lato orizzontale si individua **l'ombra retta** (ombra gettata dal lato verticale AB del quadrato come se fosse uno gnomone);
se invece la linda interseca il lato verticale si ottiene **l'ombra versa** (ombra gettata dal lato orizzontale AC del quadrato come se fosse uno gnomone)



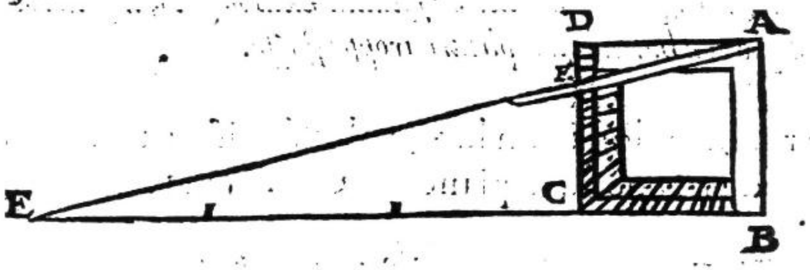


Vediamo alcune misure presentate da Cosimo Bartoli con il quadrato geometrico chiamato da lui "quadrante" geometrico.

“*Come si misurino le distantie a piano di linee diritte con il quadrante geometrico*”

Come ſi miſurino le diſtantie a piano di linee diritte con il quadrante geometrico. . Cap. III.

SE CI *ſarà propoſta una linea diritta da miſurarſi, che ſia eſſenzialmēte, o pure immaginata per il lungo, o per il largo, o per il trauerſo della campagna, come per modo di eſſempio ſarebbe la* B E. *Biſogna collocare il quadrante di maniera, che uno de ſuoi lati ſpartito, cioè il lato lato* B C *uenga ſopra il piano per lo lungo; & al diritto della propoſtaci linea* B E *& che il* B *ſia a punto al principio della linea che ſi harà da miſurare; & l'una, & l'altra faccia del quadrante* A B, *&* C D, *ſtia a piombo ſopra il piano. Pongaſi dipoi l'occhio al punto* A *& abbaſſiſi, o alziſi la linda talmente, che paſſando la ueduta per amendue le mire arriui alla fine della propoſtaci linea* E. *Fatto queſto notiſi doue la linda* A F *batta nel lato* C D: *che per modo di eſſempio diremo che batta nel punto* F. *Se la interſecatione* D F *ſarà* 15. *di quelle parti uguali, che tutta la* C D *uguale ad eſſa* A D, *è* 60. *perche* 60. *corriſponde per quattro tanti al* 15. *La propoſtaci linea* B E *ſarà lunga per quattro uolte eſſo lato* A B. *Adunque ſe il lato* A B *ſarà un braccio; la propoſtaci linea* B E *ſarà quattro braccia ſimili.*



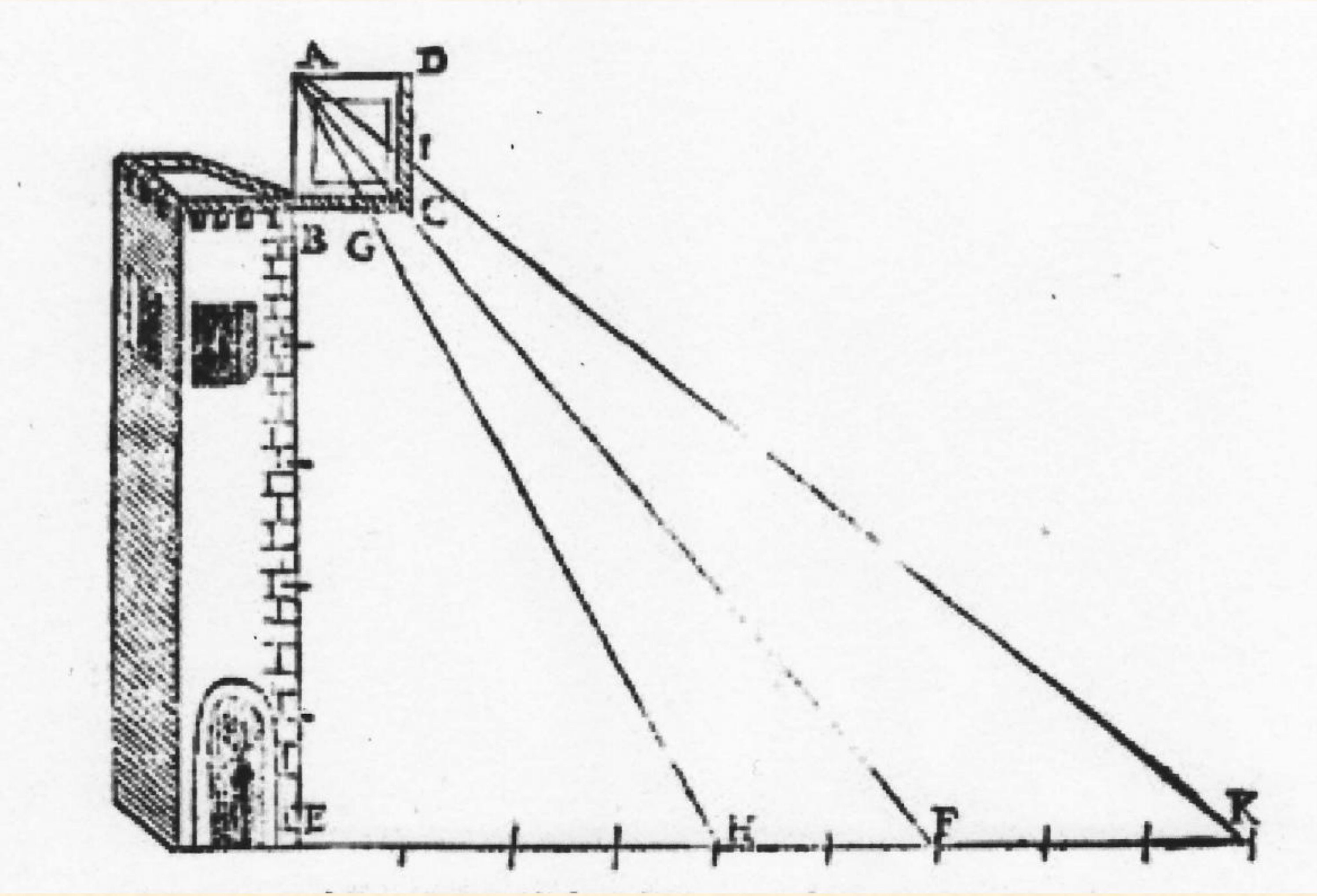
Dalla similitudine tra i triangoli
ADF e ABE
si ricava

AB:EB = DF:AD

e quindi si determina BE

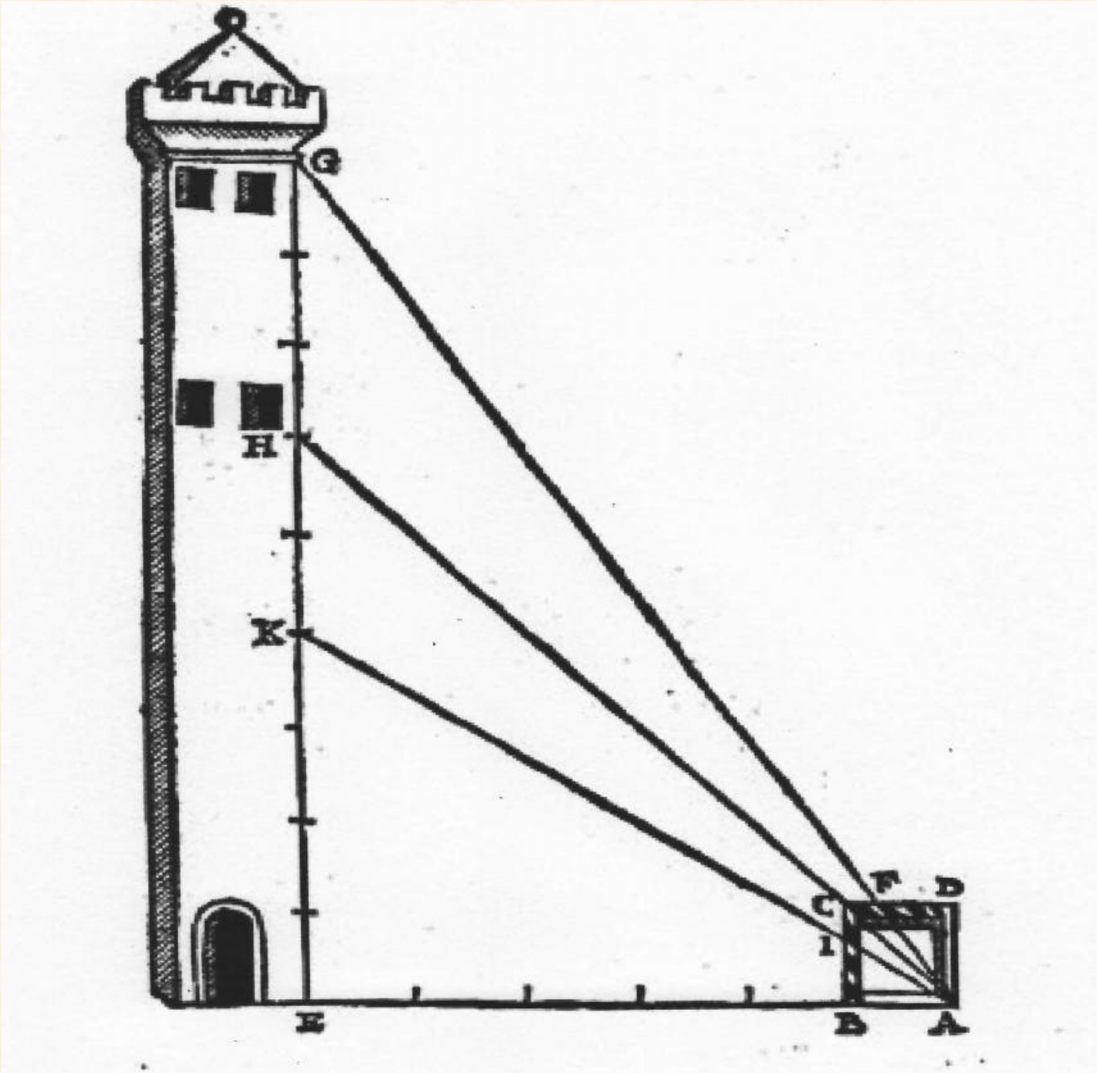
"Come ritrovandosi in un luogo alto si misuri una linea diritta posta in piano"

Si può misurare l'altezza della torre BE e quindi per la similitudine tra AEH e ABG si determina EH



"Come le linee rilevate ad angolo retto di sopra il piano del terreno si possino misurare"

Questa volta si misura EA e quindi per la similitudine tra AEK e ABI si determina EK

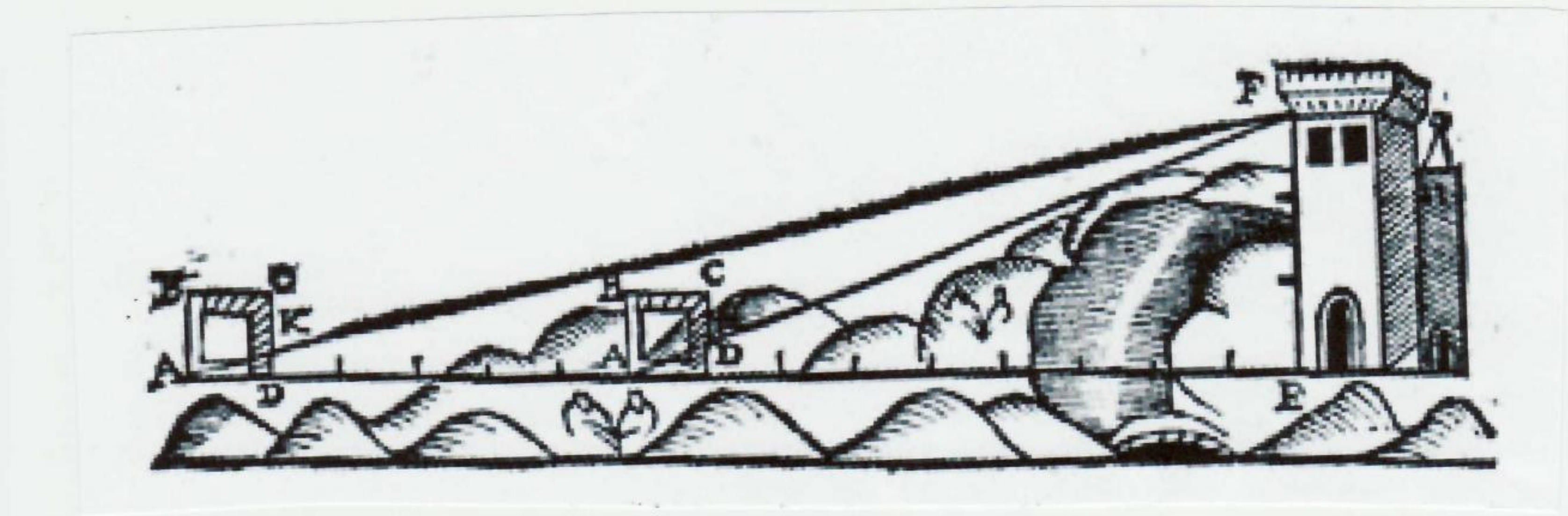


"Come si misurino col quadrante geometrico le altezze alle quali non ci si possa accostare"

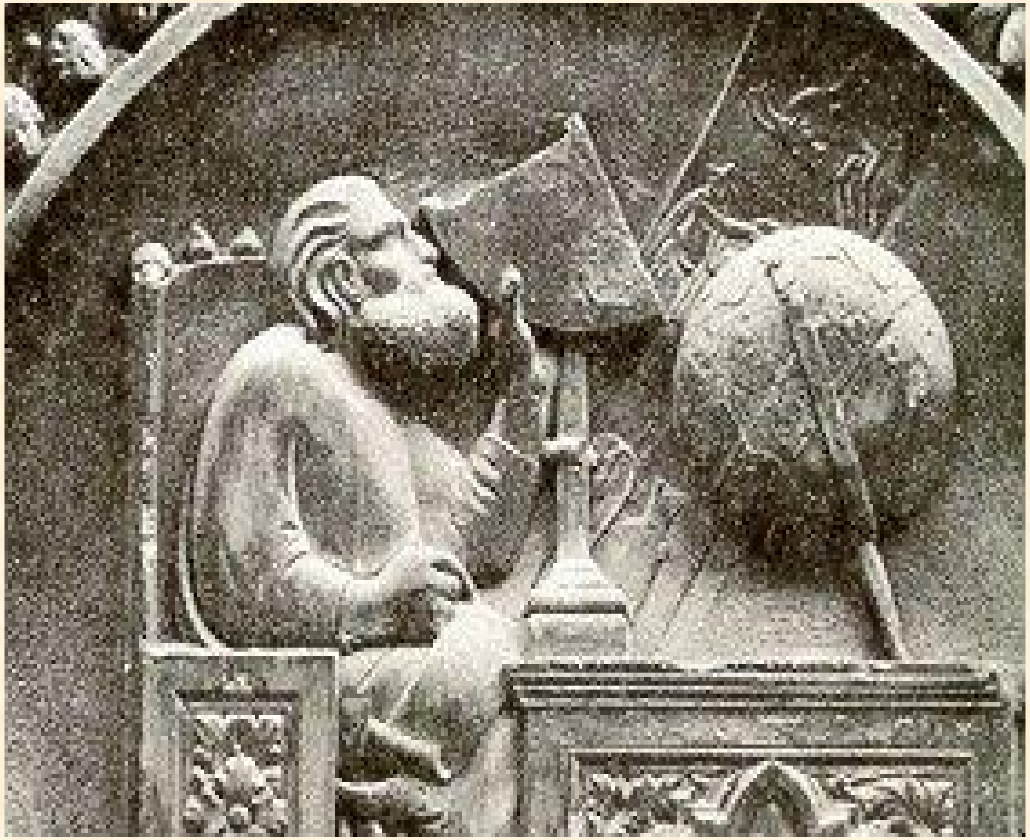
Il procedimento descritto dal Bartoli è il seguente:

- determinare il rapporto tra la lunghezza del lato del quadrato con il segmento DK individuato dalla linda (linea di mira) prima in una posizione A e poi in un' altra A' (i due numeri trovati rappresentano le cotangenti dell'angolo formato dalla linea orizzontale con la linea di mira);
- calcolare l'altezza della torre EF facendo il rapporto tra la distanza AA' e la differenza dei due numeri (cotangenti) precedentemente trovati.

La spiegazione è identica al caso dell'asta.



Quadrante



Bassorilievo di Andrea Pisano
sul Campanile di Giotto (Firenze)

L'origine del quadrante viene fatta risalire ai Caldei ed ai Babilonesi.

Tolomeo nel II secolo d. C. conosceva già questo strumento e prima di lui ne avevano fatto uso Ipparco di Nicea ed Eratostene.

Per i naviganti il quadrante era uno strumento indispensabile perché con il quadrante misuravano l'altezza degli astri e potevano di conseguenza fare il punto del luogo in cui si trovavano.

Cristoforo Colombo lo adoperò durante la prima attraversata verso le Indie.

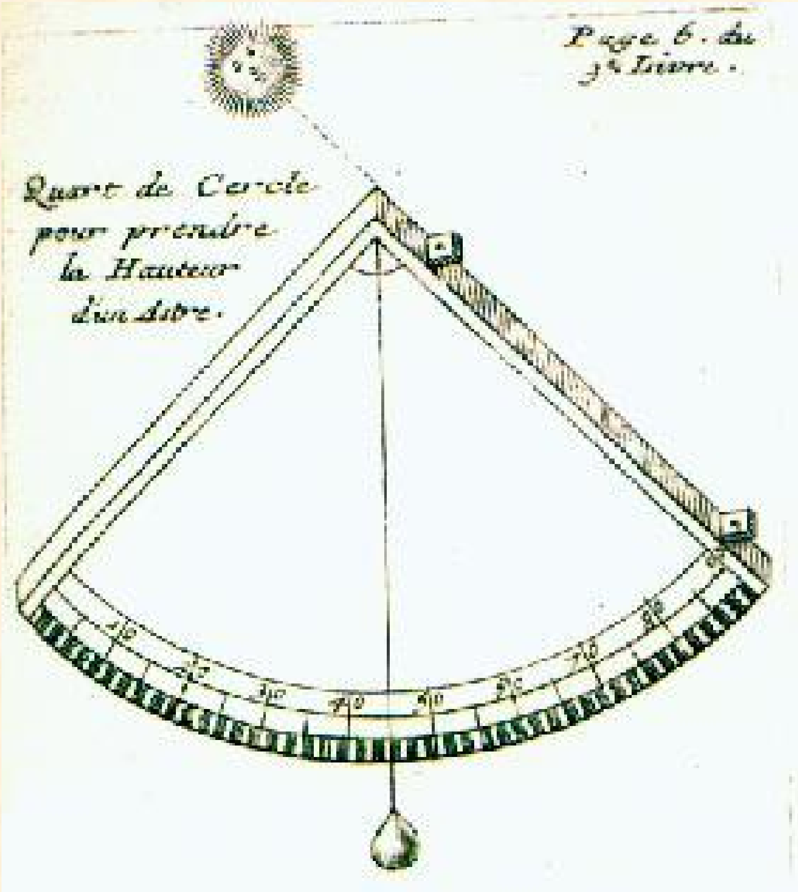
Quadrante fisso

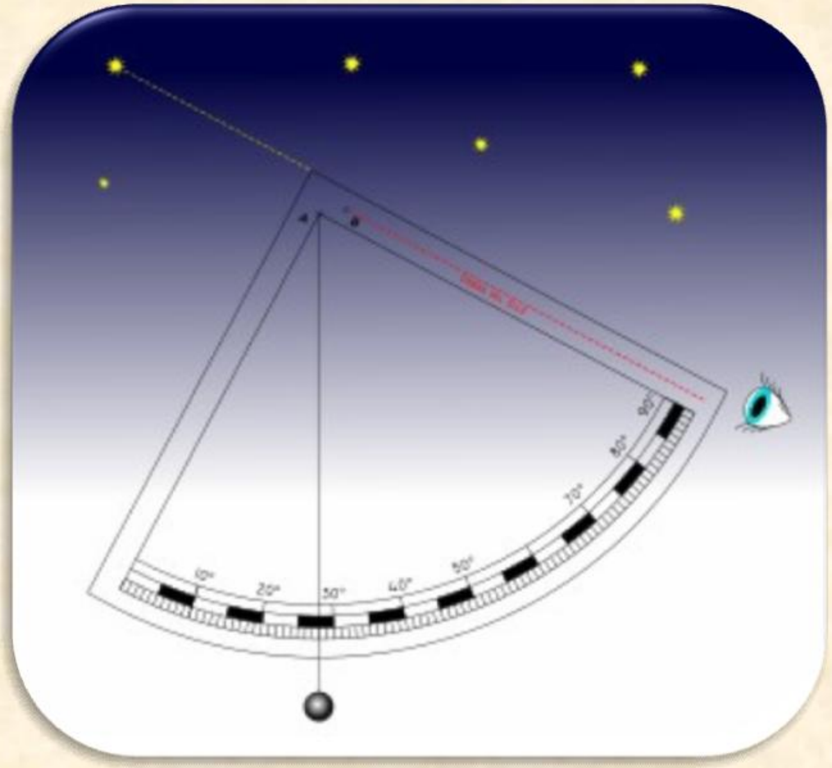
Lo strumento viene fissato in modo che uno dei due lati risulti perfettamente verticale e l’altro perfettamente orizzontale, grazie ad un filo a piombo o ad una livella; un’asta rotante dotata di due mirini consente di traguardare un certo astro e leggerne il valore angolare sull’apposita scala.

Quadrante mobile

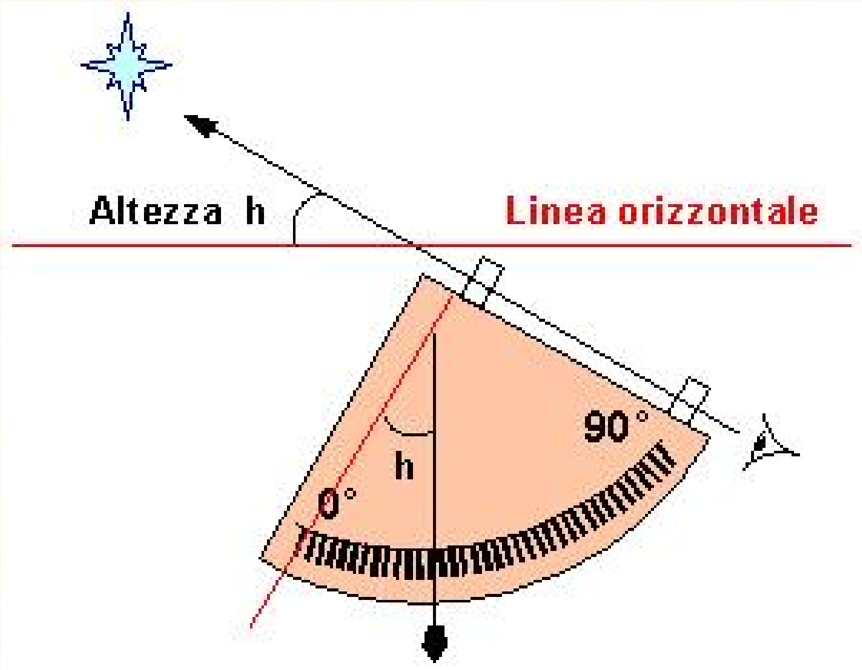
Lo strumento può ruotare in modo che con uno dei suoi due lati sia possibile traguardare l’astro, e quindi leggere l’angolo **rispetto ad un filo a piombo, utilizzato come "lancetta" di misurazione**.

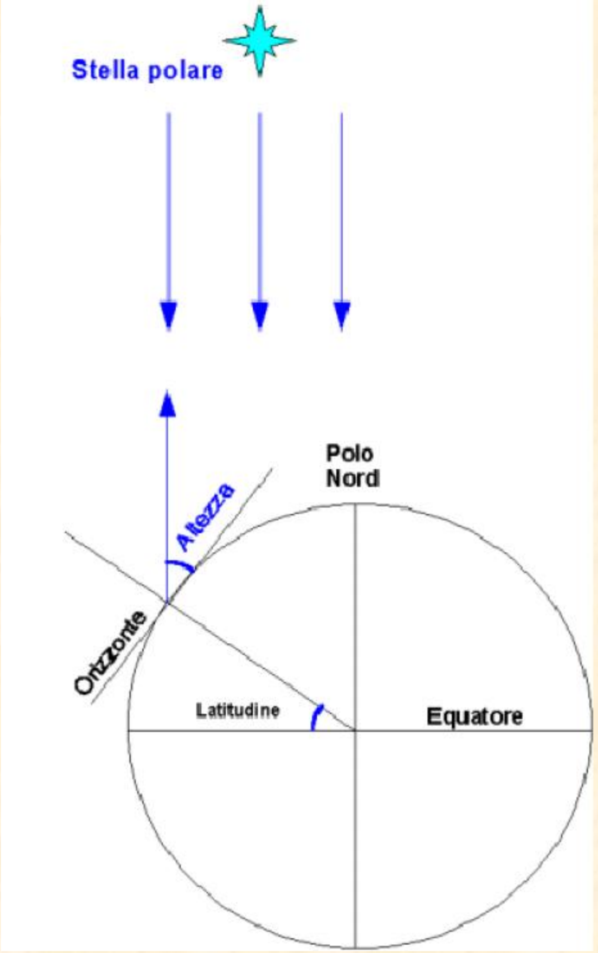
Uso astronomico del quadrante mobile





Misura della latitudine
misurando l'altezza della stella polare sull'orizzonte

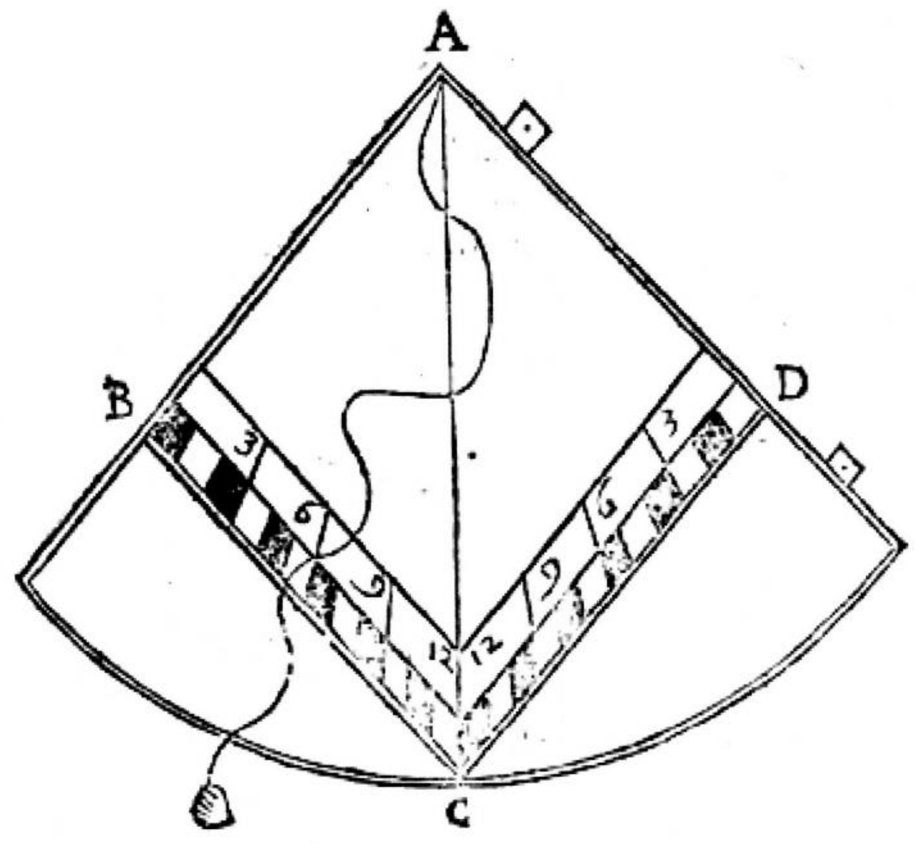




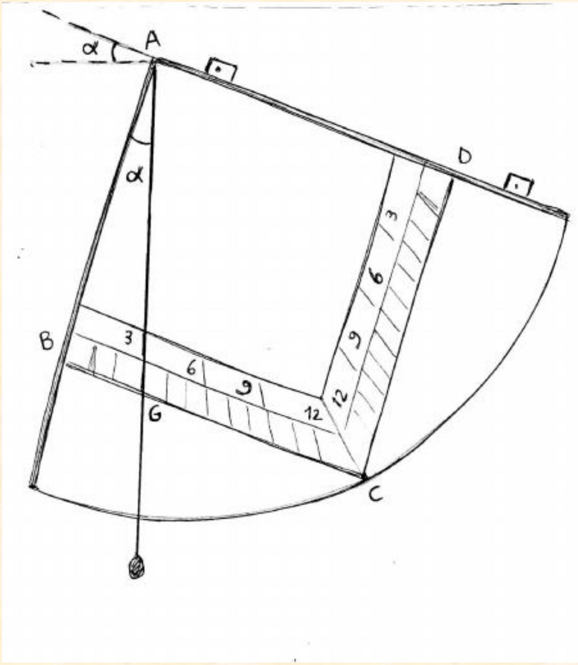
Quadrante per misurazioni topografiche

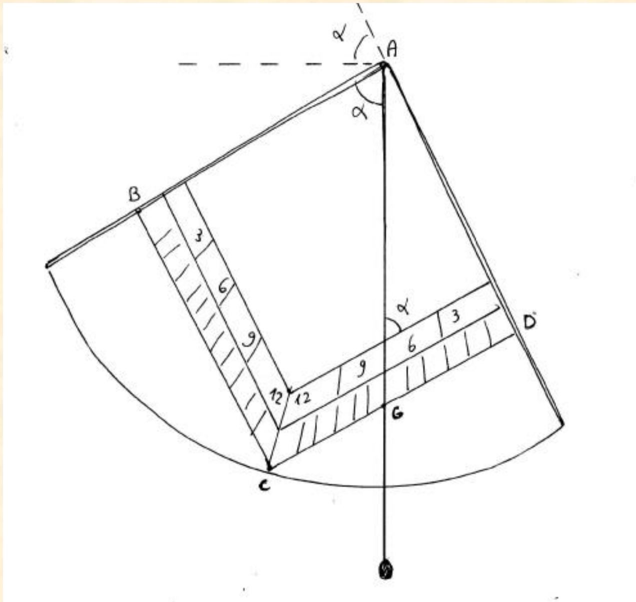
Ecco il quadrante che troviamo descritto nell'opera di Cosimo Bartoli "*Del modo di misurare le distantie….".*

che lui chiama quadrante di cerchio.



In questo quadrante non sono indicati gli angoli, ma è presente un quadrato inscritto e il rapporto tra la parte intersecata dal filo a piombo e il lato del quadrato rappresenta **tgα o cotgα** a seconda che venga intersecato il lato BC o il lato DC (α = angolo formato dalla linea di mira con l'orizzontale).

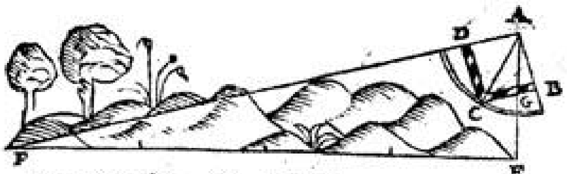




Misure con il quadrante nel testo di Cosimo Bartoli

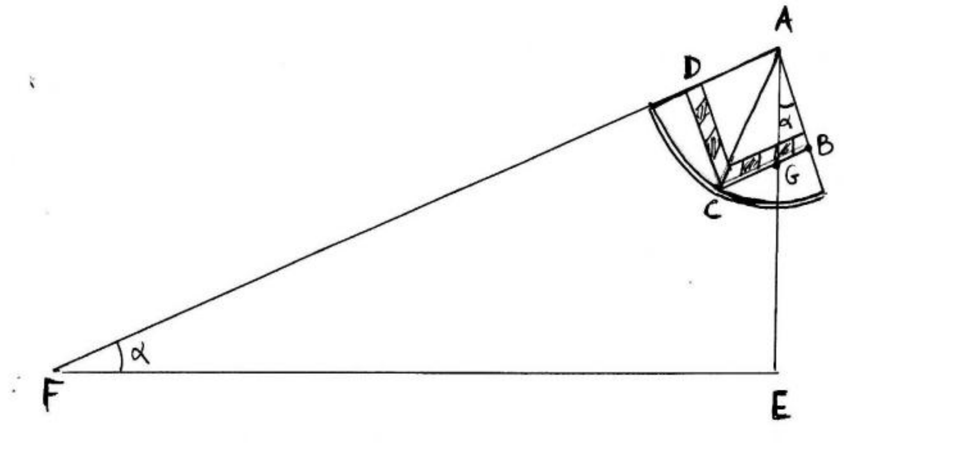
LIBRO

Se ci sarà propostа una linea, che la vogliamo misurare cõ questo quadrante, faremo in questo modo. Sia la propostaci linea E F, rizzeremo da una delle teste propostеci, una asta a piombo di una determinata, & a noi nota altezza, o misura, cioè alla E, & sia A E, al termine di sopra della quale asta accomodisi lo angolo del quadrante A, alzisi dipoi, o abbassisi il quadrante, lasciato andare il filo col piombo libero, doue ei uuole, fino a tanto, che la ueduta dell'occhio, passando per amendue le mire, arriui allo altro termine della propostaci linea, cioè allo F. Fatto questo considerisi; doue batta il filo nel lato B C, conciosia che il piu delle uolte batterà in esso. Et dicasi, che batta nel punto G, dicesi che in quella proportione, che corrisponderà il lato del quadrante A B alla parte B G, corrisponderà ancora la E F alla lunghezza dell'asta. Talche se B G, sarà tre di quelle stesse parti, che tutto il lato del quadrante è dodici, la E F sarà ancor essa per quattro uolte la lunghezza dell'asta, talche se la asta sarà tre braccia, la propostaci linea E F sarà braccia dodici, & se l'asta fussi. 4. braccia, la detta E F, sarebbe braccia. 16. simili.



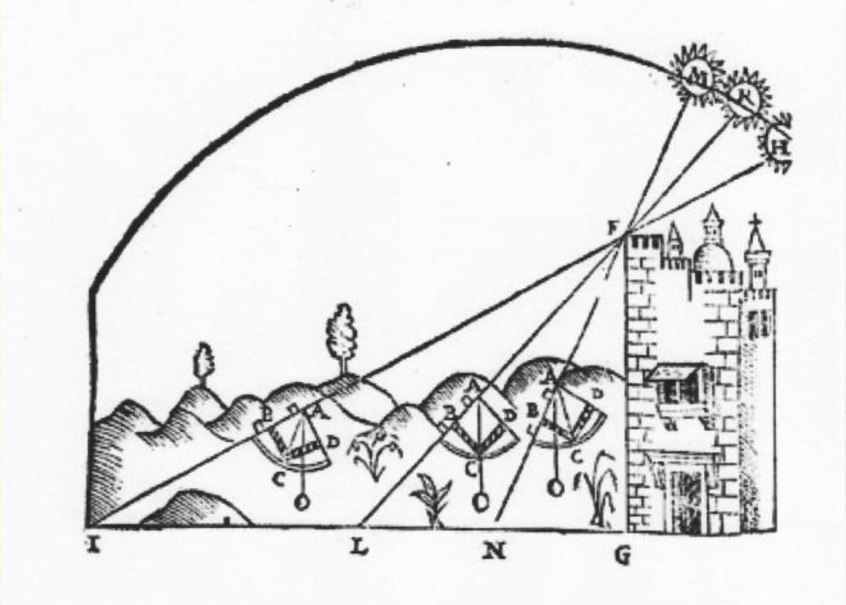
La ragione delle cose è, perche i duoi triangoli A B G, & A E F sono di angoli uguali: perciochе lo angolo A B G, & lo A E F sono uguali; perche l'uno, & l'altro è retto, & lo angolo E A F è medesimamente uguale allo angolo A G B, secondo la uentinouesima del primo di Euclide; conciosia che il filo A G attrauersa, o uogliamo dire

"Misura di una distanza in piano"



FE : AE = AB : GB

Altezze delle torri, o edificij, con le ombre e con il quadrante



. . . Dirizzisi a raggi del Sole il lato sinistro di detto quadrante, et alzisi, o abbassisi il lato destro, oue sono le mire (lasciando sempre andare libero il piombo col filo doue ei vuole) tanto che il raggio del Sole passando per l'una, et l'altra mira ci dia il punto doue batte il filo.

. . . . Come se per modo di esempio il filo intraprendessi sei parti, & la propostaci altezza da misurarsi fusse G F, et la sua ombra terminata da raggi del Sole fusse G I. Conciosia che il 12. ha proportione di dupla al 6. cioè di l'un due, a corrispondenza l'ombra G I sarà per duoi uolte la propostaci altezza G F. Misurisi adunque l'ombra G I, la quale sia per modo di dire 20. passi, già sapremo tre cose manifeste, di modo che mediante la regola delle quattro proportionali, multiplicando la ombra per le parti comprese dal filo, et diuiso poi il multiplicato, per il lato del medesimo quadrante, la parte di detta diuisione ci darà la propostaci altezza; & lo esempio è, che si multiplichi li 20. passi della ombra per le sei parti comprese dal filo, & si parta poi il 120. che ce ne verrà per il 12. che sono le diuisioni di tutto il lato del quadrante, & ce ne uerrà 10. per ilche si dirà con verità, che la propostaci altezza G F sarà 10. passi.

Tavola delle ombre

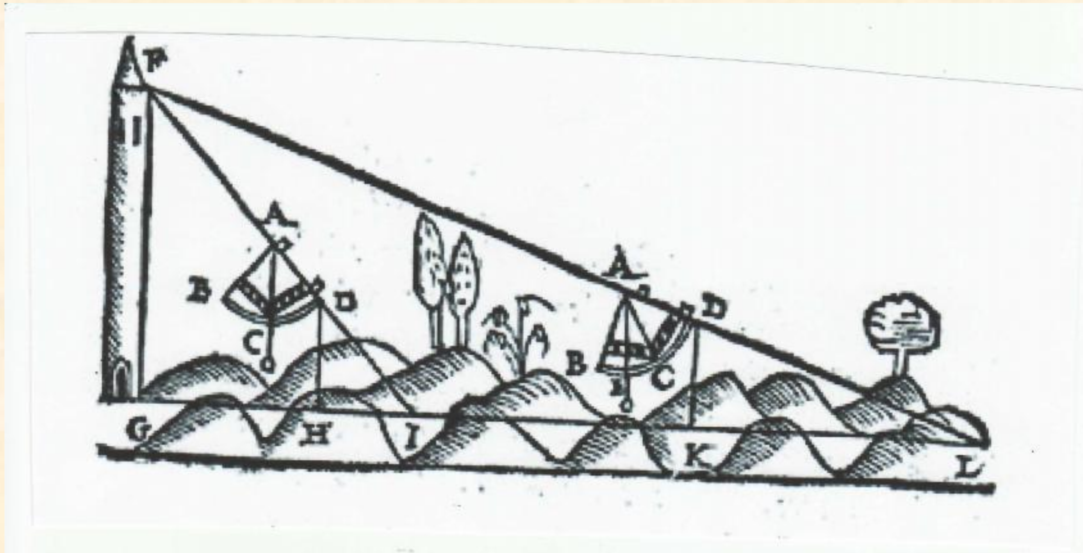
Tavola dell'una ombra & dell'altra, cioè della retta, & della uersa, di quanti diti, & minuti, corrispondono di essa, a ciascun grado & minuto del Sole, o della Luna.

Altezza		Parti della scala intersegate		Altezza		Parti della scala intersegate	
Gradi	Min.	Diti	Min.	Gradi	Min.	Diti	Min.
1	12	0	15	27	35	6	15
2	25	0	30	28	29	6	30
3	38	0	45	29	24	6	45
4	50	1	0	30	18	7	0
6	0	1	15	31	9	7	15
7	12	1	30	32	0	7	30
8	21	1	45	32	51	7	45
9	31	2	0	33	43	8	0
10	42	2	15	34	30	8	15
11	53	2	30	35	18	8	30
13	0	2	45	36	6	8	45
14	8	3	0	36	54	9	0
15	14	3	15	37	37	9	15
16	19	3	30	38	56	9	30
17	23	3	45	39	5	9	45
18	26	4	0	39	49	10	0
19	28	4	15	40	30	10	15
20	30	4	30	41	10	10	30
21	32	4	45	41	51	10	45
22	34	5	0	42	31	11	0
23	33	5	15	43	8	11	15
21	33	5	30	43	47	11	30
25	33	5	45	44	24	11	45
26	33	6	0	45	0	12	0

Particolarmente interessante è la **tavola delle ombre** che Cosimo Bartoli inserisce subito dopo aver trattato questo problema:

in corrispondenza dell'angolo (tra 0° e 45°) troviamo le parti intersecate sul lato del quadrato geometrico (diviso in 12 parti) e quindi per esempio osserviamo che all'angolo di 45° corrisponde 12 (per avere il corrispondente valore della tangente basta dividere per 12).

"Come si misurino col quadrante di cerchio le altezze alle quali non ci si possa accostare"



Si tratta di un metodo simile a quello già visto per l'asta: la prima posizione è scelta in modo che cotgα=1 (α = BAC) mentre nella seconda posizione del quadrante si ha BE = 4 (AB = 12) e quindi cotgβ =3 (β =BAE).

Poiché in generale si ha

GF = IL / (cotgβ-cotgα)

in questo caso particolare avremo GF = IL / 2

Bastone di Giacobbe

Il bastone di Giacobbe, noto anche con il nome di ***baculum*** fu molto conosciuto fin dai tempi antichi.

Sembra che fosse diffuso tra gli Egizi, gli Ebrei e gli Arabi.

Il nome “bastone di Giacobbe” deriva dal famoso astronomo ebreo **Jacob** ben Machir (nato a Marsiglia nel 1236).

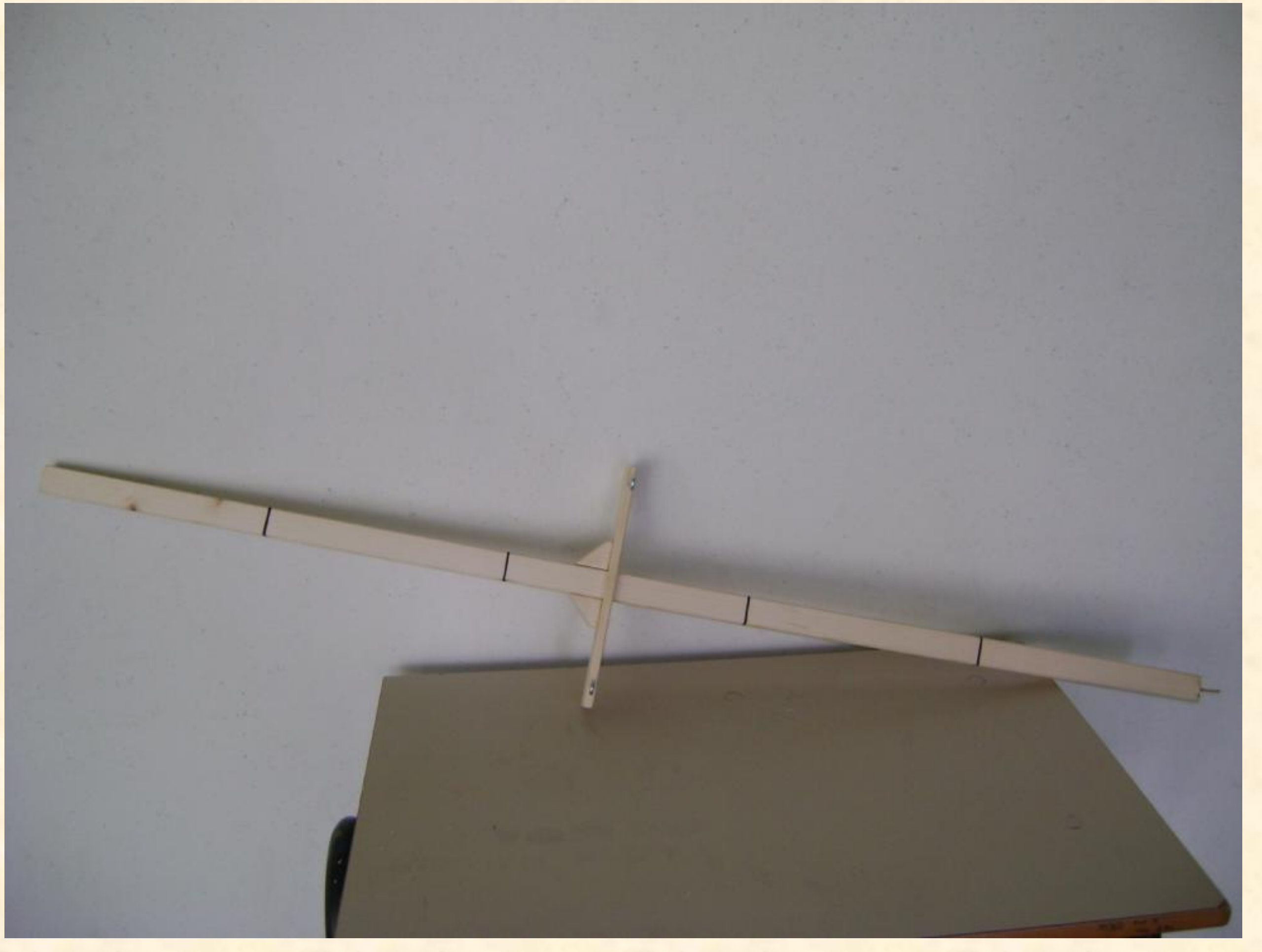
Come si possa fare uno altro instrumento da potere mi-
surare le distantie cosi adiacere come ritte,
alle quali non si possa accostare.

Cap. VII.

PER fare il baculo, che cosi chiamano i latini questo instrumento; apparechisi un regolo quadro per tutti i uersi di legno durissimo; & atto a non si torcere, o piglisi di ottone lungo quãto ci piace; ma loderei che almanco fussi due braccia, di grossezza moderata, come ti dimostra il disegno. Diuidasi dipoi detto regolo in alcune parti uguali fra loro, dieci, otto, o sei secondo ci tornerà piu commodo, & si chiami questo regolo A B. Faccisi dipoi uno altro regolo simile; ma lungo solamente quanto una delle parti, in le quali diuidesti il primo regolo maggiore A B; & tanto largo che ui si possa fare una buca quadra, talmente nel mezo al punto E, che si possa muouere commodamente per il regolo A B, faccendo sempre angoli a squadra; & chiamisi questo regolo minore C D, come uedere si puo nel disegno.

Ecco la descrizione del bastone di Giacobbe che troviamo nel libro di Cosimo Bartoli *"Del modo di misurare le distantie, le superfici, i corpi, le province, le prospettive e tutte le altre cose terrene che possono occorrere a gli huomini, secondo le vere regole di Euclide et de gli altri più lodati scrittori"*, Venezia 1564.

Il bastone è formato da **due regoli di legno posti in croce**, di cui quello più lungo è suddiviso in genere in sei parti e scorre entro un foro di sezione quadrata praticato al centro di **quello più corto** che ha **lunghezza uguale ad una delle parti del regolo più lungo** .



Ecco il bastone di Giacobbe che abbiamo costruito

Misure astronomiche

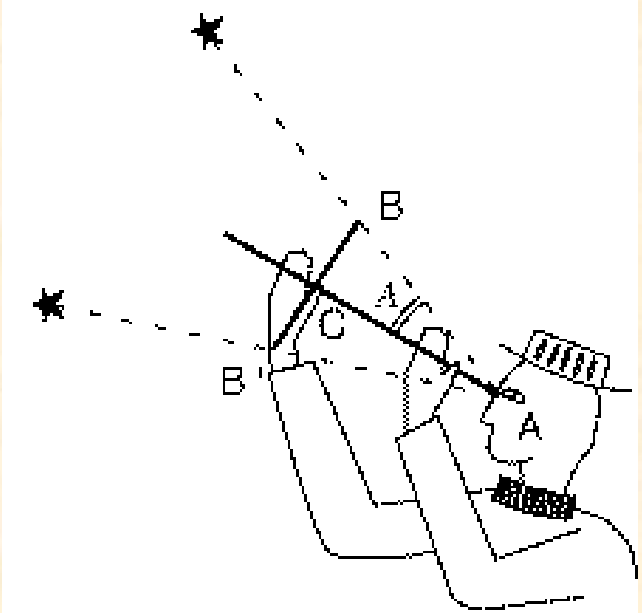
In astronomia era usato per determinare

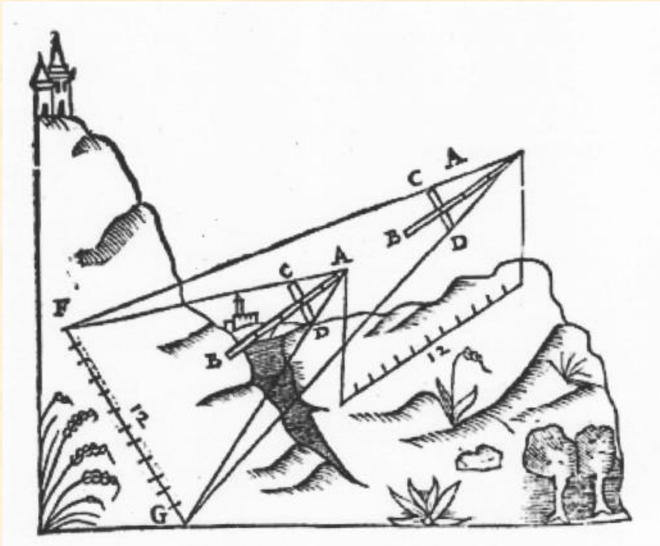
- la distanza angolare che divide due astri
- l'altezza del sole sull'orizzonte.

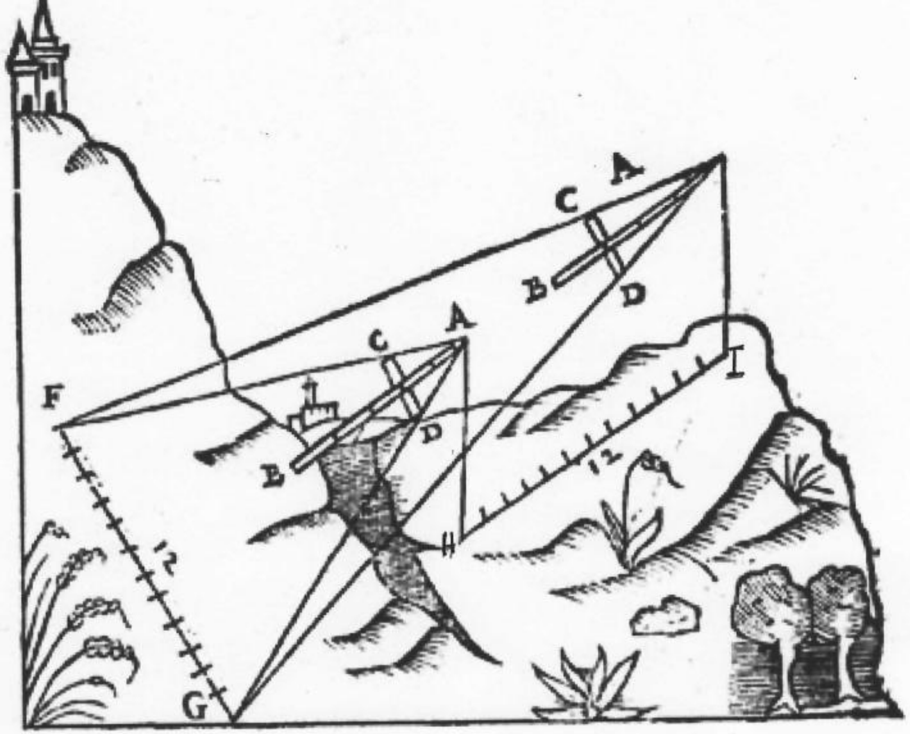
Misure terrestri

Il bastone di Giacobbe veniva usato dagli eserciti per determinare le distanze tra posizioni inaccessibili, le altezze delle mura delle fortificazioni e dei castelli, e dagli artiglieri delle navi per valutare quando le navi nemiche sarebbero arrivate a tiro dei propri cannoni.

Vediamo il procedimento descritto dal Bartoli **"**per misurare le distantie alle quali non si possa accostare".

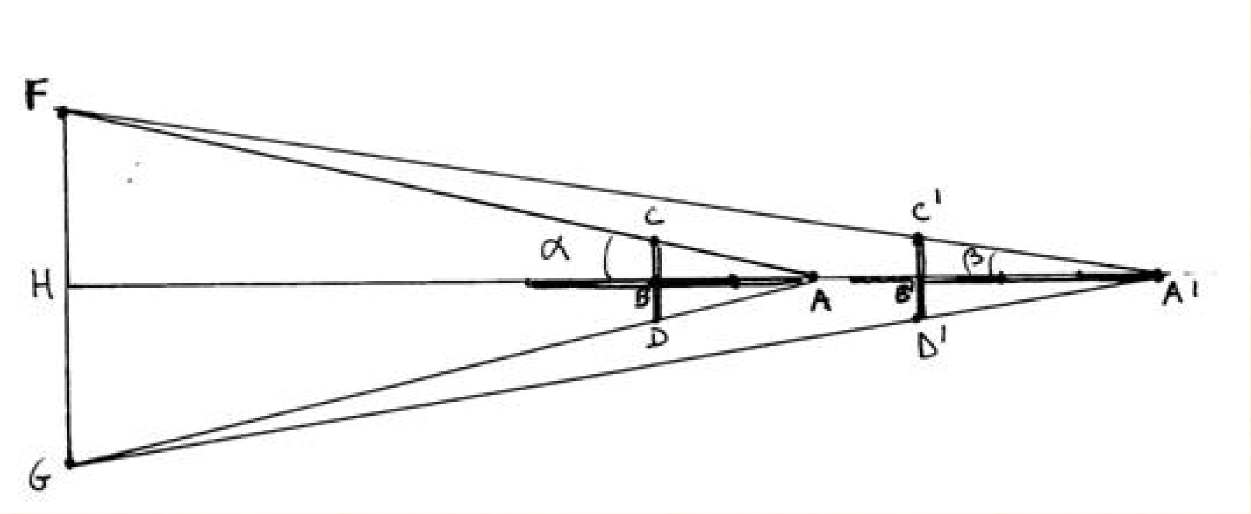






Puossi ancora, quasi nel medesimo modo misurare una linea a tra
uerso d una facciata, di una muraglia, o bastione, o trincea, alla
quale altri non si possa accostare. Conciosia che fatta la prima dili=
gentia, o operatione al punto H, di nuouo ritirandoci indietro al pun
to I, & nella prima operatione, se il trauersale sarà stato alla E,
cioè alla seconda diuisione del bastone; & nella seconda operatione
sarà alla terza diuisione. Ouero per il contrario, cioè se dato che sia=
mo stati prima alla operatione nel punto I, & il trauersale C D,
habbiamo tenuto alla terza pur diuisione; & accostandoci poi al pun
to H, habbiamo nello operare tenuto il trauersale C D alla seconda
diuisione;

Spieghiamo il procedimento: se nella posizione A, traguardando FG, il regolo scorrevole del bastone si trova nella seconda divisione del regolo lungo, dobbiamo indietreggiare fino ad una posizione A’ in cui il regolo, traguardando, si trovi alla terza divisione. In questo modo infatti dovremo misurare solo AA’, poiché risulterà FG = AA’. Infatti:



Dalla similitudine tra i triangoli abbiamo:

AB = 4BC quindi AH = 4 FH

A’B’ = 6B’C’ quindi A’H = 6 FH

Di conseguenza A’A = A’H – AH = 2 FH

ovvero la distanza di cui si arretra è uguale alla distanza cercata FG.

Osserviamo che esprimendo il rapporto AB/BC come cotg α *e il rapporto A’B’/B’C’ come cotg* β *si ottiene la relazione già vista per il problema dell’asta.*

Problema

E’ necessario che il numero delle tacche sia necessariamente prima due e poi tre per poter affermare che FG = AA’?

Non è necessario.

Basterà che se in A il regolo corto indica n divisioni si abbia che in A’ il regolo corto indichi n+1 divisioni.

Infatti ,poiché l’intero regolo corto ha la stessa lunghezza di una divisione, avremo

- AB = 2nBC quindi AH = 2n FH
- A’B’ = 2(n+1)B’C’ quindi A’H = 2(n+1) FH

- Di conseguenza A’A = A’H – AH = 2 FH

Possiamo anche esprimere queste relazioni utilizzando le cotangenti:

$$\cot g\beta=2(n+1) \text{ e } \cot g\alpha=2n$$

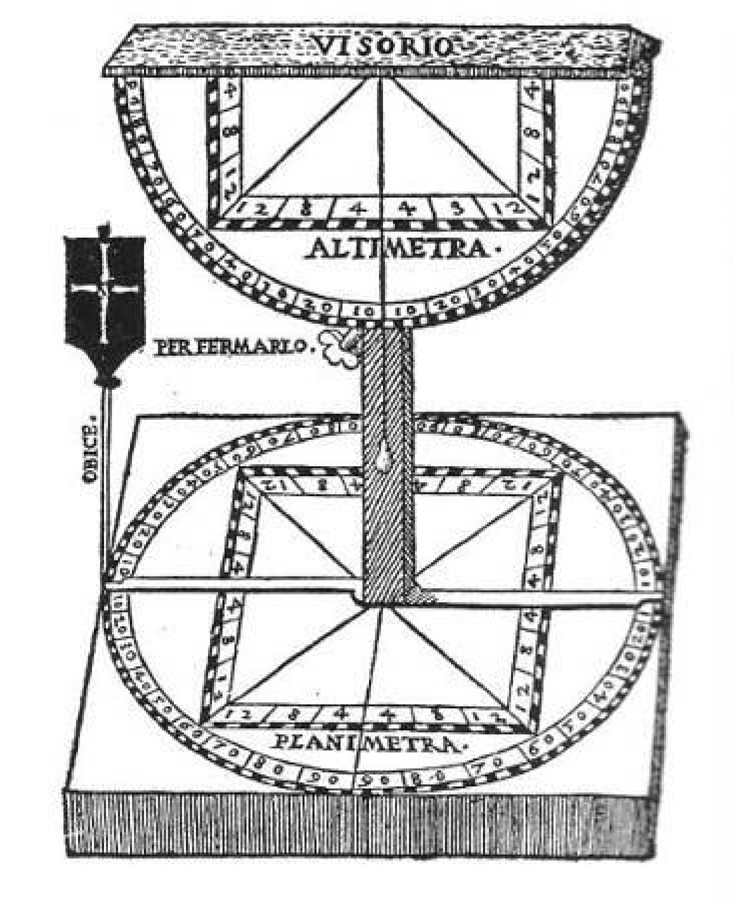
da cui $\cot g\beta-\cot g\alpha=2$ e quindi FH=AA’/2 cioè FG = AA’

Teodolite

Il nome dello strumento“teodolite” sembra provenire dalla deformazione della parola inglese “the alidad” che a sua volta derivava dalla parola araba “ **alidad: disco girevole”**.

Verso la fine del XVI secolo compare per la prima volta il nome *Theodolitus* (usato dall’inglese Leonard Digges).

Nella immagine accanto è mostrata una delle prime forme in cui compare in Italia il teodolite con il nome di *visorio.*



- Con il cerchio sul piano orizzontale (all’interno del quale abbiamo un quadrato geometrico), si misura l’angolo azimutale.

- Ruotando il semicerchio verticale si misura l’angolo zenitale.

L’evoluzione del teodolite, da queste forme iniziali, fu molto lenta ma continua.

Oggi vengono utilizzate le cosiddette stazioni totali cioè teodoliti forniti anche di un distanziometro, che è lo strumento per la misura della distanza presa come base.

Misure con il teodolite e triangolazione

Il progresso nella tecnica di misurazione delle distanze terrestri si basa sul metodo della **triangolazione**, introdotto nel 1617 dall'olandese Willebrord Snell. Questo metodo di misurazioni geodetiche e topografiche è rimasto il più accurato per più di trecento anni, fino all'introduzione delle rilevazioni da satellite.

Sappiamo che se di un triangolo sono noti la lunghezza di un lato e l'ampiezza di almeno due angoli interni, allora possiamo calcolare la lunghezza degli altri due lati. Perciò, se conosciamo tutti gli angoli di **una serie di triangoli disposti lato contro lato** e la lunghezza di uno di questi lati, possiamo determinare le lunghezze di tutti i lati.

Il lavoro del geodeta consisteva, dapprima, nell'individuare una **serie di stazioni di osservazione** sopraelevate, come punte di campanili, torri di fortezze o costruzioni appositamente costruite.

Poi, spostandosi di stazione in stazione, **misurava gli angoli individuati dai segmenti congiungenti stazioni adiacenti**.

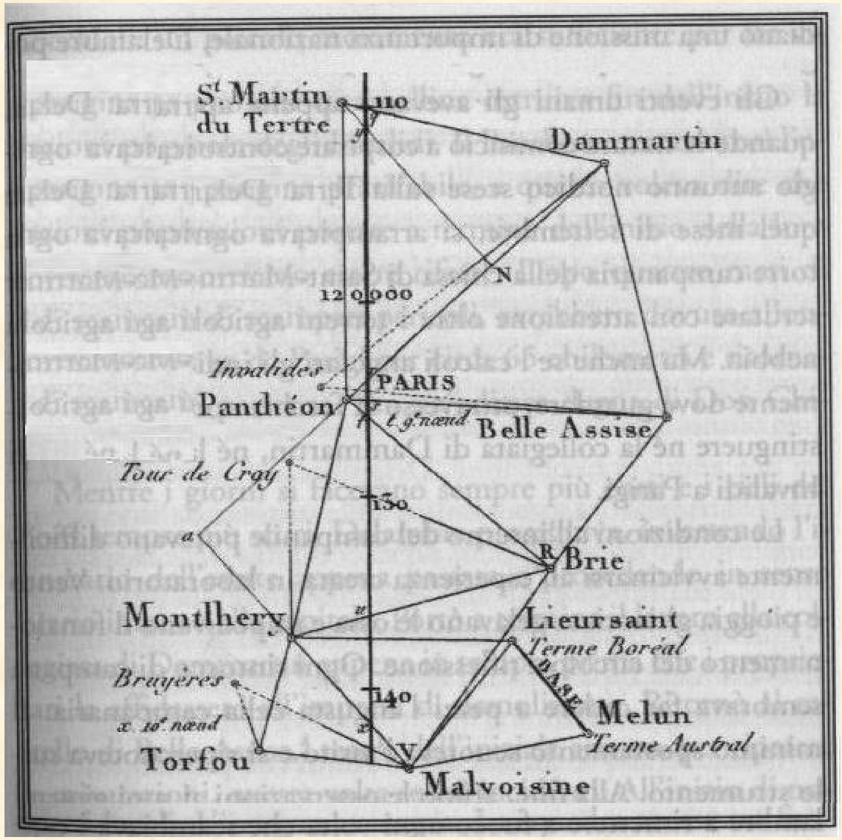
Alla fine, **misurata direttamente la distanza tra due stazioni vicine**, poteva eseguire i calcoli per determinare la distanza tra la stazione più a Nord e quella più a Sud nella serie di triangoli adiacenti.

Nel 1600 e nel 1700 furono effettuate numerose ed accurate missioni in varie parti della Terra per eseguire vaste **campagne di triangolazioni** allo scopo di determinare le dimensioni esatte della Terra, ed anche per verificare se il globo terrestre è, come aveva previsto Newton, un po' schiacciato ai poli a causa della rotazione su se stesso.

A questo proposito è interessante il fatto che una di queste campagne di misurazione della dimensione della Terra partì da Parigi nel giugno del 1792 mentre la rivoluzione stava sconvolgendo la Francia e la monarchia francese stava vivendo i suoi ultimi giorni.

Questa missione era stata organizzata per misurare con un'accuratezza mai raggiunta prima la **lunghezza dell'arco di meridiano tra Dunkerque e Barcellona**, per poi stabilire, con il metodo di Eratostene, **la dimensione della Terra**.

Questa missione era considerata dagli scienziati e dagli intellettuali dell'epoca di estrema importanza scientifica, economica e culturale, poiché su di essa si sarebbe basata la **definizione del metro**, una nuova unità di misura della lunghezza: la decimilionesima parte della lunghezza dell'arco di meridiano tra il Polo Nord e l'Equatore.

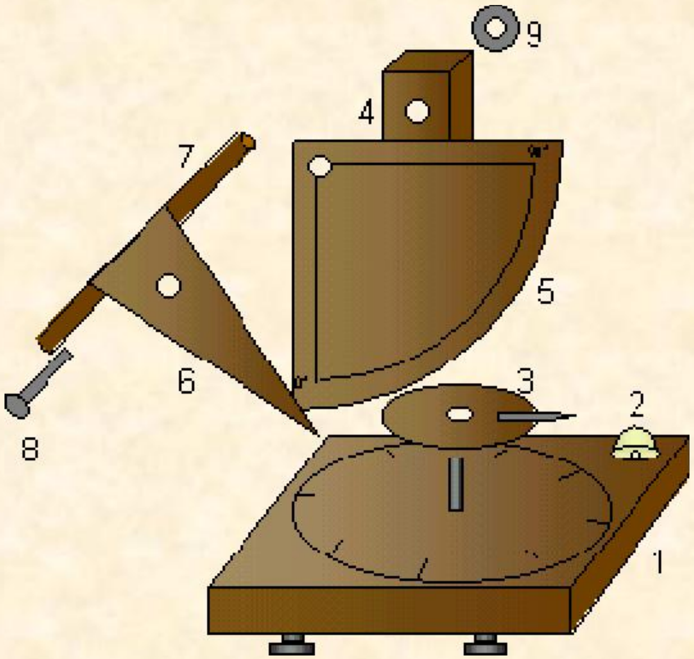


Triangolazioni eseguite nelle vicinanze di Parigi nella spedizione scientifica iniziata nel 1792 per misurare il metro, ossia la decimilionesima parte dell'arco di meridiano compreso tra il Polo Nord e l'Equatore.

Costruzione di un teodolite

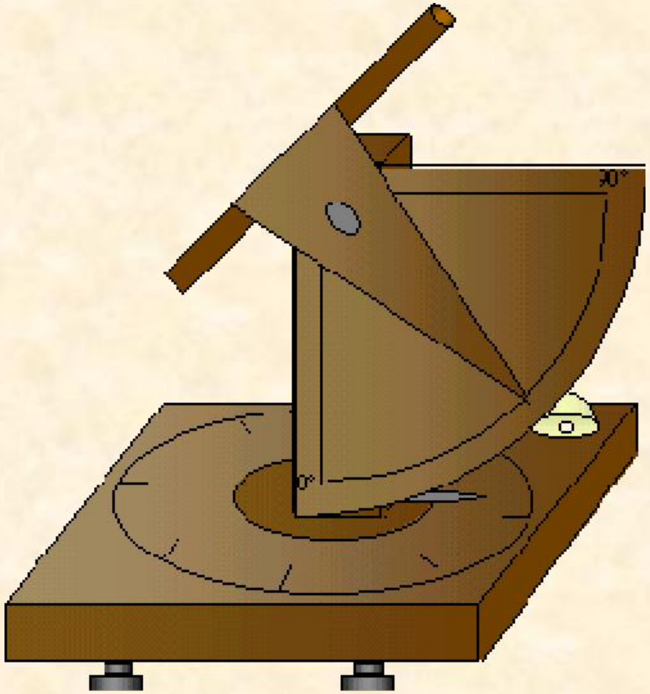
Materiale occorrente

- piedini regolabili;
- tavoletta quadrata dal lato di circa 50 cm (1);
- livella a bolla (2);
- un perno (ad esempio una vite autofilettante);
- lastra sottile di rame da cui ricavare gli indici;
- indice per la lettura dell'azimut fissato su un disco di compensato di circa 15 cm di raggio (3);
- prisma a base quadrata di legno con lato di base di circa 8 cm e altezza di circa 30 cm (4);
- quadrante di cerchio di compensato di circa 30 cm di raggio (5);
- indice a forma triangolare per la lettura dell'altezza sul quadrante (6);
- tubicino per mirare gli astri (7);
- vite (8) e dado (9) per fissare le parti come in figura.



Indicazioni per la costruzione

- Usare la tavoletta quadrata (1) come base dello strumento, fissarvi nella faccia superiore una livella a bolla (2) e in quella inferiore dei piedini regolabili per poterne controllare l'orizzontalità.
- Disegnare nella faccia superiore una circonferenza graduata e far passare al centro un perno, di cui occorrerà controllare, ad esempio con una squadretta, la perpendicolarità, e attorno a cui dovrà poter ruotare la parte superiore dello strumento.
- Fissare il quadrante (5) a una delle facce laterali) del prisma di legno (4); quindi alla base dello stesso prisma fissare il disco (3) munito di indice per la lettura dell'azimut, facendo in modo che l'indice risulti orientato parallelamente al piano del quadrante.
- Praticare un foro alla base del prisma in cui poter inserire il perno centrale della base. Ritagliare da una lastra sottile di rame una figura composta da triangolo isoscele avente la base in comune con un rettangolo: il triangolo farà da indice per il quadrante graduato e il rettangolo, avvolto attorno al tubicino, servirà per rendere solidali i due pezzi.
- Nel fissare queste parti occorrerà che l'altezza del triangolo isoscele nell'indice risulti perpendicolare alla lunghezza del tubicino e che la punta dell'indice cada sul valore 0 gradi, quando il tubicino è parallelo al piano dell'orizzonte, e sul valore di 90° nella graduazione del quadrante, quando il tubicino è lungo la verticale.



VERIFICHE DEGLI APPRENDIMENTI

Come verifica “individuale” sono state proposte “**schede di lavoro**” contenenti un brano originale o una figura in cui viene spiegato un metodo di misurazione con un dato strumento e si chiede di determinare una data distanza o altezza supponendo di aver rilevato alcune misure con quello strumento.

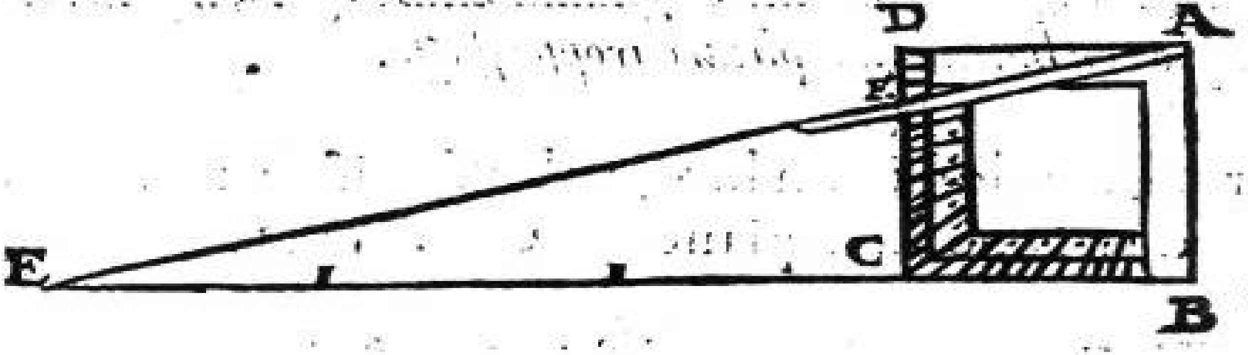
Riportiamo le SCHEDE DI LAVORO proposte agli studenti.

SCHEDA 1

“Come si misurino le distantie a piano di linee diritte con il quadrante geometrico”

Spiega il metodo descritto nel brano seguente.

lato B C uenga ſopra il piano per lo lungo; & al diritto della propoſtaci linea B E & che il B ſia a punto al principio della linea che ſi harà da miſurare; & l'una, et l'altra faccia del quadrante A B, & C D, ſtia a piombo ſopra il piano. Pongaſi dipoi l'occhio al punto A & abbaſſiſi, o alziſi la linda talmente, che paſſando la ueduta per amendue le mire arriui alla fine della propoſtaci linea E. Fatto queſto notiſi doue la linda A F batta nel lato C D: che per modo di eſſempio diremo che batta nel punto F. Se la interſecatione D F ſarà 15. di quelle parti uguali, che tutta la C D uguale ad eſſa A D, è 60. perche 60. corriſponde per quattro tanti al 15. La propoſtaci linea B E ſarà lunga per quattro uolte eſſo lato A B. Adunque ſe il lato A B ſarà un braccio; la propoſtaci linea B E ſarà quattro braccia ſimili.

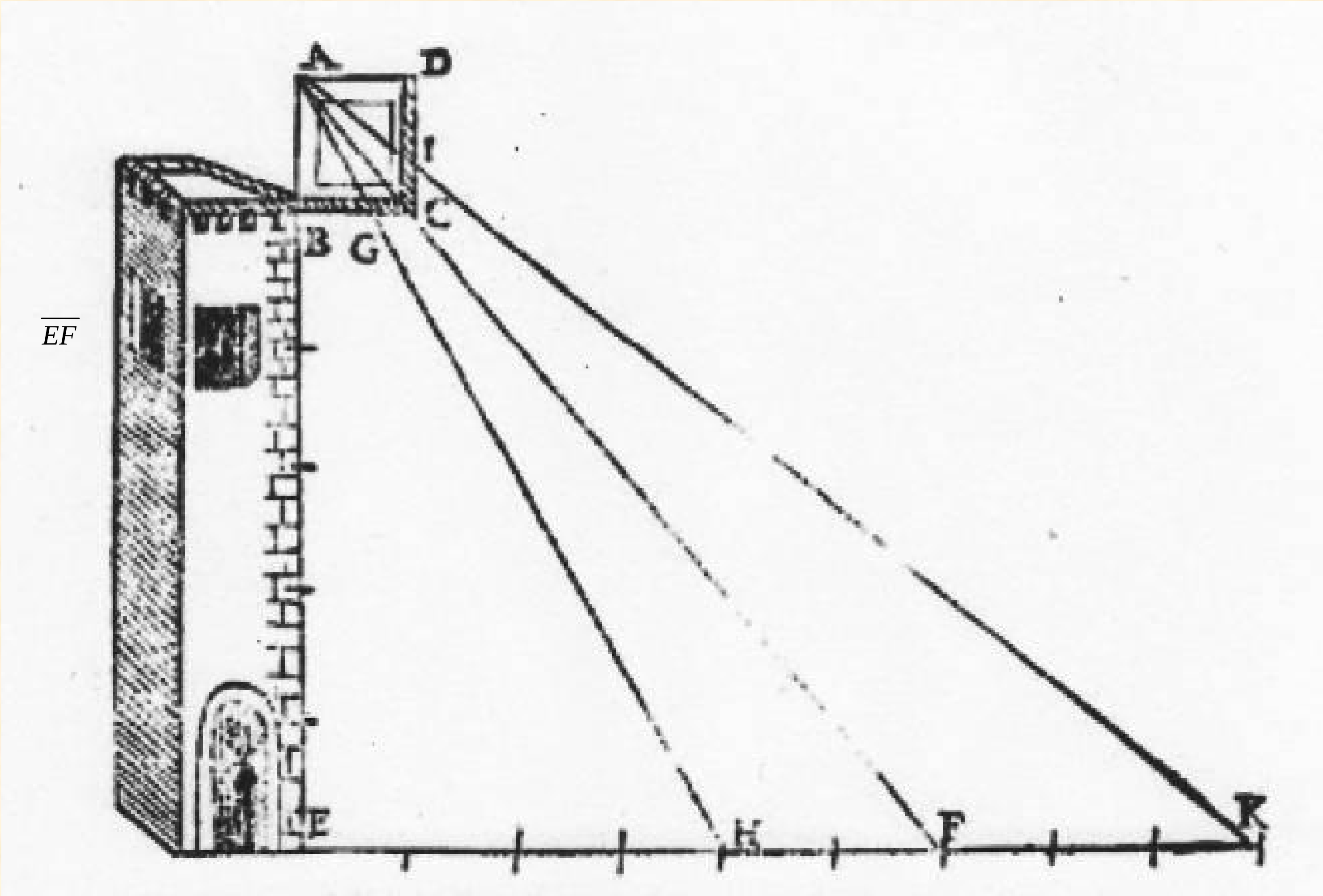


SCHEDA 2

"Come ritrovandosi in un luogo alto si misuri una linea diritta posta in piano con l'uso del quadrante geometrico"

Osserva la figura e spiega il metodo di misurazione descritto.

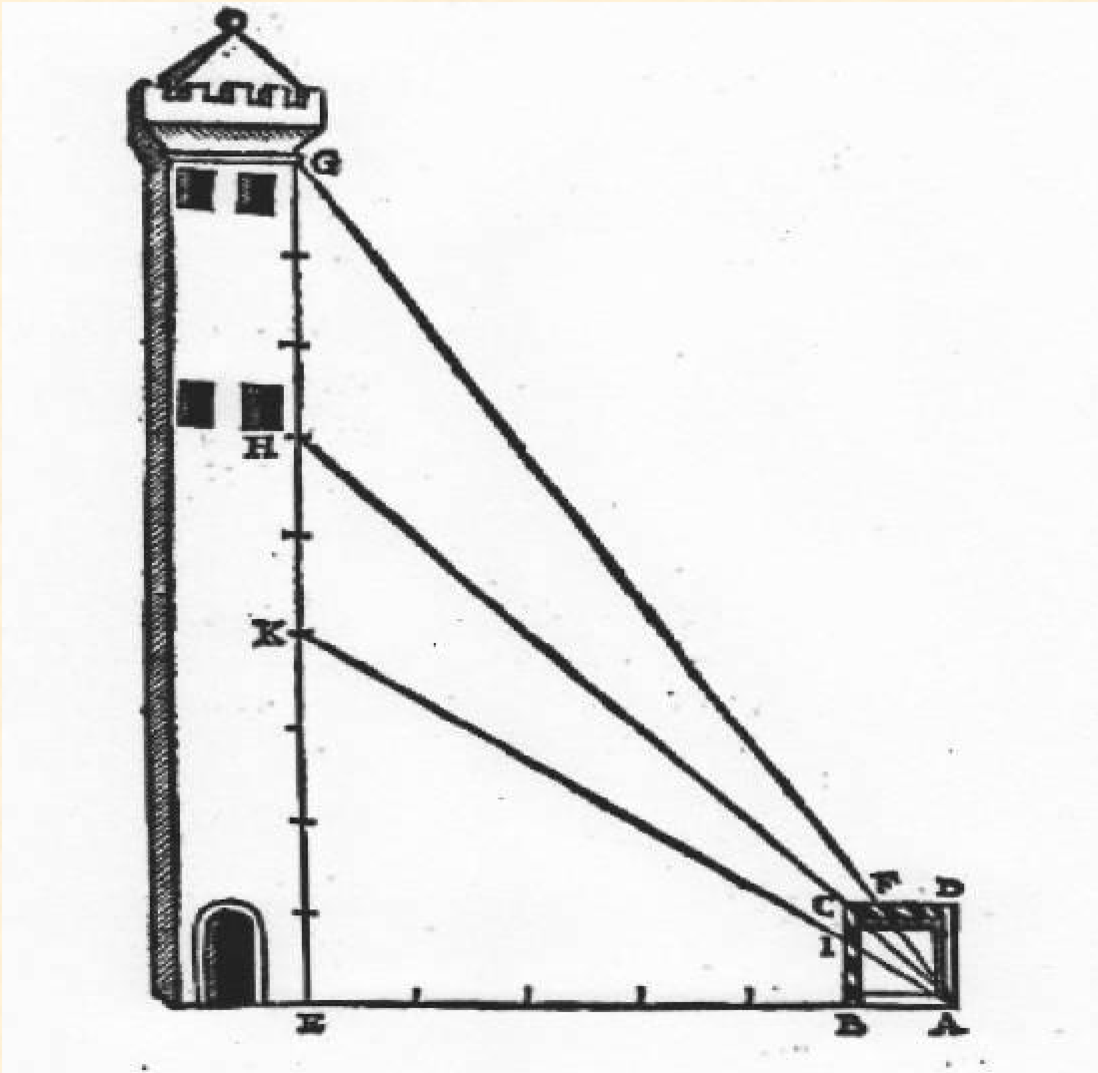
$\overline{EF}$



SCHEDA 3

“Come le linee rilevate ad angolo retto di sopra il piano del terreno si possino misurare con il quadrante geometrico”

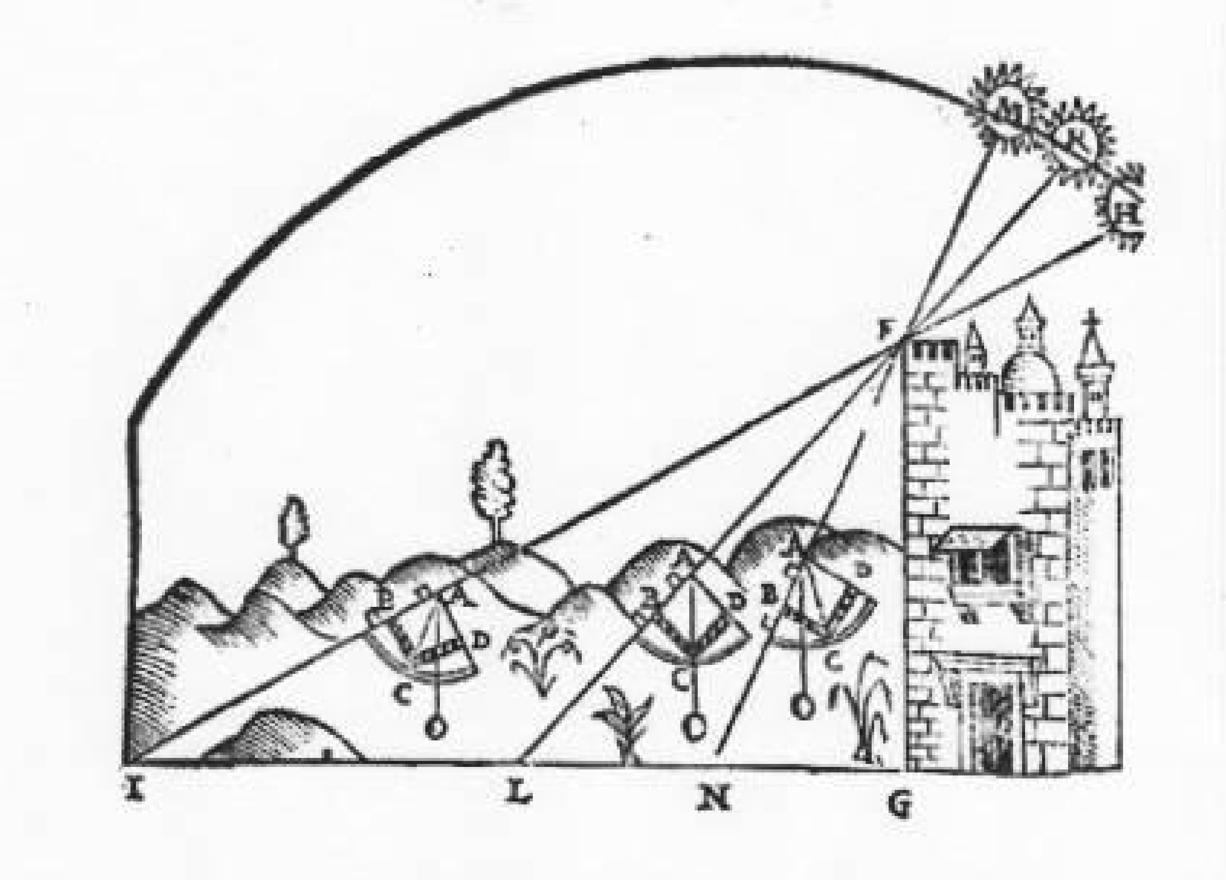
Osserva la seguente figura e spiega il procedimento descritto per la misura delle posizioni K,H,G della torre.



SCHEDA 4

Altezze delle torri, o edificij, con le ombre e con il quadrante di cerchio

Spiega il metodo descritto nel brano per misurare l’altezza della torre.



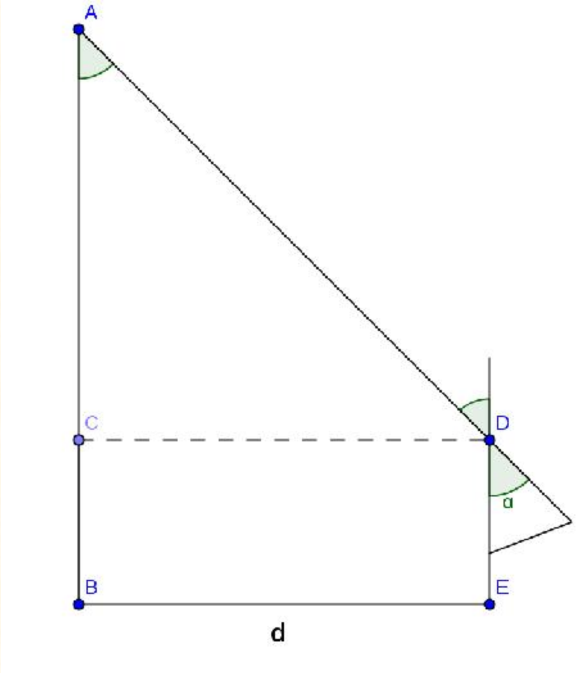
. . . Dirizzisi a raggi del Sole il lato sinistro di detto quadrante, & alzisi, o abbassisi il lato destro, oue sono le mire (lasciando sempre andare libero il piombo col filo doue ei vuole) tanto che il raggio del Sole passando per l'una, et l'altra mira ci dia il punto doue batte il filo.

. . . . Come se per modo di esempio il filo intraprendessi sei parti, & la propostaci altezza da misurarsi fusse G F, et la sua ombra terminata da raggi del Sole fusse G I. Conciosia che il 12. ha proportione di dupla al 6. cioè di l'un due, a corrispondenza l'ombra G I sarà per duoi uolte la propostaci altezza G F. Misurisi adunque l'ombra G I, la quale sia per modo di dire 20. passi, già sapremo tre cose manifeste, di modo che mediante la regola delle quattro proportionali, multiplicando la ombra per le parti comprese dal filo, et diuiso poi il multiplicato, per il lato del medesimo quadrante, la parte di detta diuisione ci darà la propostaci altezza; & lo esempio è, che si multiplichi li 20. passi della ombra per le sei parti comprese dal filo, & si parta poi il 120. che ce ne verrà per il 12. che sono le diuisioni di tutto il lato del quadrante, & ce ne uerrà 10. per ilche si dirà con verità, che la propostaci altezza G F sarà 10. passi.

Verifica di gruppo

Come verifica “di gruppo” si è chiesto di misurare effettivamente l’altezza del nostro edificio scolastico utilizzando gnomone, triquetrum e bastone di Giacobbe (confrontando i risultati ottenuti).

Misura dell’altezza del nostro edificio scolastico utilizzando il triquetrum



Se indichiamo con AB l’altezza del nostro edificio scolastico possiamo determinare con il triquetrum la corda dell’angolo α e poi risaliamo all’angolo utilizzando la tavola delle corde.

Quindi avremo: $AB = BC + d * \mathrm{cotg}\,\alpha$.

Risultati ottenuti

Gli studenti hanno dimostrato interesse nel ricercare i brani originali in cui veniva descritto uno strumento o un metodo per misurare distanze o altezze.

Sicuramente il lavoro di gruppo ha sviluppato capacità di organizzarsi e collaborare in particolar modo per quei gruppi che sono riusciti a costruire effettivamente uno strumento.

La parte più stimolante è stata la misurazione dell’altezza del nostro edificio scolastico con l’uso di gnomone, triquetrum e bastone di Giacobbe perché il “fare” concretamente la misura è risultato più istruttivo di qualsiasi spiegazione teorica.

Valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

La motivazione alla base della sperimentazione di questo percorso è stata quella di riprendere nel secondo biennio lo studio della trigonometria per mettere in risalto la sua evoluzione nel corso del tempo attraverso l’analisi degli strumenti utilizzati e per sottolineare come i concetti teorici si concretizzino negli strumenti ideati per compiere misurazioni.

A nostro parere il percorso è stato in questo senso efficace e ci proponiamo di ampliarlo anche allo studio degli strumenti che vengono attualmente utilizzati per i rilevamenti topografici.