LAUREARSI IN MATEMATICA AD UNIFE:
alcune tesi di laurea

Carissime ragazze, carissimi ragazzi,

in questo breve opuscolo vogliamo darvi un'idea di come un laureando in matematica possa essere in grado di applicare la matematica in vari campi del sapere.

Abbiamo raccolto alcune brevissime descrizioni di tesi di laurea, sia triennale che magistrale, scritte da laureandi del nostro Corso di Studi in questi ultimi anni. Tra le tante, abbiamo scelto quelle che ci parevano più adatte per essere descritte a grandi linee ad un pubblico di non (non ancora!) specialisti. Altre tesi, più teoriche ma non meno interessanti (ad esempio, di Algebra e Geometria), avrebbero richiesto qualche ulteriore conoscenza.

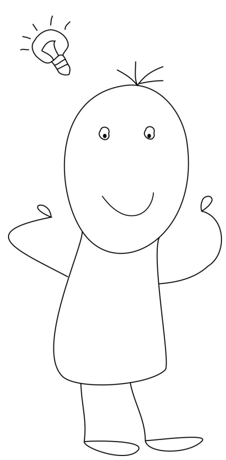
Non stupitevi troppo del fatto che la Matematica non sia solo pura astrazione... le questioni matematiche nascono sempre dal desiderio di spiegare cosa governi i fenomeni che vediamo ogni giorno sotto i nostri occhi. Ma non pensate che le tesi si esauriscano nelle "storielle" qui raccontate. Queste pagine sono scritte con l'intento di farvi assaporare come utilizzare la matematica nel mondo reale, ma se sfogliaste nel dettaglio le tesi originali ci trovereste dentro quel che vi aspettate: tanti conti, formuloni mostruosi, più lettere che numeri, tanta fatica spesa... ma anche tanta soddisfazione per il lavoro fatto!

La matematica, si sa, è tosta, ma proprio questo la rende ancora più bella: una volta affrontata seriamente (e digerita) ci mostra il suo fascino e la sua utilità.

Vi auguriamo una buona settimana presso il nostro Dipartimento, e vi raccomandiamo di sfruttare questa occasione per chiarirvi le idee sul vostro futuro. Se lo desiderate, saremo ben contenti di farne parte.

Ferrara, 5 giugno 2018

Alessia Ascanelli
e la Commissione Orientamento
del Corso di Studi in Matematica



Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2016/17

La modellizzazione matematica del sistema circolatorio venoso

Lucia Baron

Il sistema circolatorio umano è diventato, negli ultimi decenni, il centro di una serie di studi sia dal punto di vista della modellistica che dell'analisi matematica e numerica dei modelli. I modelli matematici per il sistema cardiovascolare sono ampiamente utilizzati per simulare il flusso del sangue nei vasi e per predire i modelli emodinamici in condizioni fisiologiche e patologiche. La maggior parte della letteratura sulla modellizzazione matematica del sistema circolatorio riguarda il suo lato arterioso, anche se le vene contengono circa il 70% del sangue totale nel sistema vascolare sistemico, e per questo motivo le mie ricerche si sono focalizzate sullo studio della modellizzazione matematica del sistema circolatorio venoso.

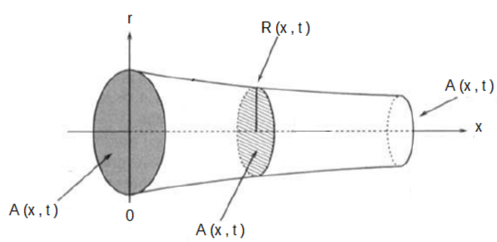
Il flusso sanguigno nei vasi è assai complesso da modellare in termini matematici in quanto, oltre alla necessità di descrivere il sangue con un opportuno modello fluido, si deve definire un adeguato sistema struttura per modellare il vaso sanguigno. Il sangue può essere considerato come un fluido omogeneo e incomprimibile, per lo meno in vasi di grosse dimensioni (raggio > 0.1 cm) e in situazioni non patologiche, che scorre in un dominio deformabile. Dunque può essere descritto con il seguente sistema di equazioni di *Navier-Stokes* per un fluido newtoniano incomprimibile:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u = \nu \Delta u - \nabla p + f \end{cases} \tag{1}$$

dove $p = P/\rho$ denota la pressione del fluido, u rappresenta la velocità del fluido, $\nu = \mu/\rho$ è chiamata viscosità cinematica, f è una possibile fonte di volume, ∂, ∇ e Δ sono operatori matematici che coinvolgono le derivate di u.

Per calcolare i valori di pressione e velocità del flusso sanguigno nei diversi punti della rete vascolare, bisogna tener conto della deformabilità delle pareti vascolari ed è per questo che il sistema (1) deve essere accoppiato con un modello che rappresenti la struttura delle pareti.

Nell'ambito della modellizzazione del sistema vascolare esistono diversi modelli che possono essere considerati a vari gradi di semplificazione: possiamo distinguerli in modelli tridimensionali (3D), monodimensionali (1D) e zero-dimensionali (0D). La loro distinzione è determinata dal numero di dimensioni con cui viene modellato lo spazio. Nel mio lavoro si presume che il flusso attraverso le vene sia monodimensionale e questa scelta si è rivelata essere un buon compromesso in termini di informazioni ottenibili, dettaglio della struttura e costo computazionale. La modellizzazione 1D è basata sull'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes sulla sezione del vaso che conduce ad un sistema di due equazioni in tre incognite, dunque non risolvibile.



Pertanto viene considerata una relazione che lega due delle tre incognite e adottando un profilo di velocità empirico, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite.

Attraverso tecniche di analisi matematica (il metodo delle caratteristiche) è possibile risolvere il sistema, anche se non è sempre possibile determinare in forma esplicita una soluzione analitica del problema. In questi casi si ricorre alla risoluzione con metodi numerici.

Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2015/16

Un modello matematico per la struttura finanziaria d'impresa con utili mean-reverting

Giulia Bolzonaro

Ho studiato come determinare la struttura finanziaria ottimale di un'impresa, utilizzando la tradizionale teoria del trade-off ma supponendo che gli utili dell'impresa siano *mean-reverting* (cioè che i guadagni, per tempi lunghi, abbiano tendenza a tornare al loro livello medio).
Le imprese si finanziano mediante emissione di *debito* D (obbligazioni) ed *equity* E, cioè capitale proprio (azioni). Secondo il modello del trade-off, per trovare un equilibrio tra gli interessi contrastanti degli azionisti e degli obbligazionisti, le imprese scelgono un rapporto ottimale di leva finanziaria

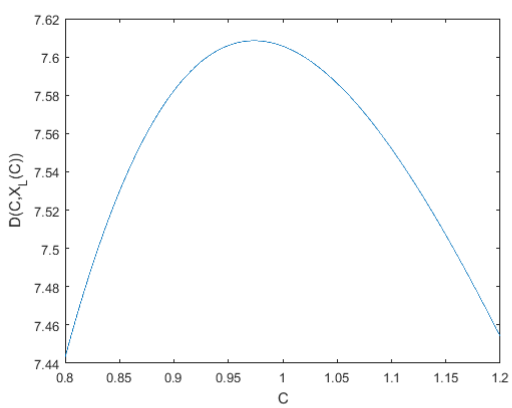
$$LF = \frac{D}{D+E},$$

ossia stabiliscono quantità ottimali di debito ed equity in modo tale da bilanciare benefici fiscali del debito (che spingono l'impresa ad indebitarsi sempre più) e costi di bancarotta (che invece fanno da deterrente all'eccessivo indebitamento). Lo scopo è massimizzare il valore totale dell'azienda $V_{tot} = D + E$ mediante un trade-off tra vantaggi e svantaggi e determinare una struttura ottimale del capitale (di quanto D e di quanto E debba essere composto il capitale).

Gli strumenti matematici che ho utilizzato nella tesi sono i processi stocastici (che studiano l'evoluzione nel tempo di fenomeni governati dal caso) e le equazioni differenziali (equazioni in cui l'incognita è una funzione); in particolare ho studiato l'equazione di Bellman che, in economia, governa l'andamento degli strumenti finanziari $F(X)$ dipendenti da un processo stocastico X.

Prendendo X = utili dell'impresa e risolvendo l'equazione di Bellman ho calcolato i valori del debito $D(X)$, dei benefici fiscali $T(X)$, dei costi di bancarotta $B(X)$, del capitale proprio $E(X)$ e il valore totale dell'impresa $V_{tot}(X)$.

Ho quindi determinato il livello di utili X_L al quale è ottimale per l'azienda innescare la bancarotta: finché gli utili saranno $X > X_L$, converrà all'azienda mantenersi in vita, mentre non appena $X = X_L$ è consigliabile dichiarare il fallimento. Il valore di X_L che ho trovato dipende dal coupon C (interesse pagato dall'azienda agli obbligazionisti), ed è negativo: l'impresa non deve preoccuparsi troppo se anche gli utili diventano negativi, perchè fino a che $X > X_L$ è ragionevole sperare nella ripresa (visto che gli utili a lungo termine ritorneranno alla media).



Ho poi analizzato il valore del debito: la Figura a lato mostra l'andamento di $D(X)$ in funzione di C; si vede l'esistenza di un coupon $\bar{C}$ cui corrisponde un massimo per la capacità di indebitamento dell'impresa.
Ho quindi dimostrato che sfruttare l'intera capacità di indebitamento (cioè scegliere $\bar{C}$) non è una scelta ottimale per l'impresa; la scelta ottimale è quella di scegliere il coupon C^* che massimizza V_{tot}, e quindi il livello di bancarotta $X_L(C^*)$ che massimizza E. Si stabilisce così la leva finanziaria ottimale: indebitandosi come suggerito da LF ottimale, l'impresa può aumentare notevolmente il suo valore.

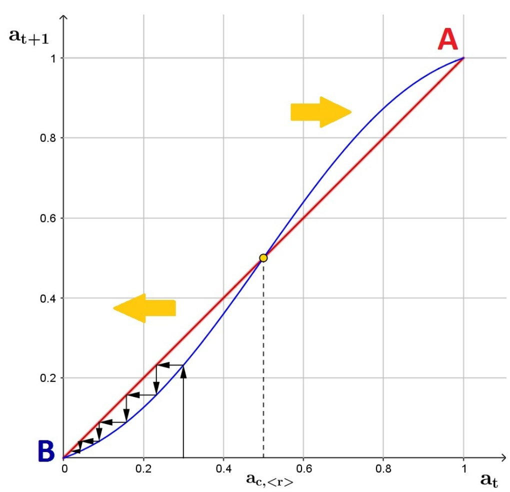
Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2015/16

Modelli matematici della dinamica di opinioni

Silvia Fogagnolo

Esiste un campo di ricerca scientifica, detto "sociofisica", che si basa sull'applicazione in ambito sociale di strumenti provenienti dal mondo fisico-matematico.
Essa riesce a descrivere diversi fenomeni relativi al comportamento umano, come il traffico veicolare, i movimenti delle folle e la diffusione di epidemie.
In particolare nella sociofisica spicca per importanza la "dinamica di opinioni", che indaga la formazione e l'evoluzione di idee all'interno di una popolazione.
Di fatto l'opinione pubblica risulta essenziale per l'attività politica: nella mia tesi ho analizzato il **modello a maggioranza locale di Galam**, che descrive appunto l'evoluzione di un'idea politica in seguito al dibattito pubblico.
Questo modello considera due opinioni A e B in competizione all'interno di una popolazione in cui ogni individuo è portato a supportare o l'una o l'altra idea. Ciò schematizza in modo realistico la situazione che si presenta in occasione di un referendum: ogni persona ha la possibilità di votare "sì" (che possiamo far coincidere con l'opinione A) oppure "no" (coincidente con B).
Le idee delle persone sono influenzate da una moltitudine di fattori psicologici, che non possiamo considerare tutti se vogliamo avere un modello effettivamente fruibile. Perciò supponiamo che le loro scelte siano dovute semplicemente all'interazione con gli altri individui: nella popolazione si creano piccoli gruppi all'interno dei quali avviene un ciclo di discussioni che termina con l'intero gruppo che sostiene una sola opinione, quella che inizialmente aveva la maggioranza (ad esempio un gruppo di 3 individui ABB diventa BBB). Rimescolando i gruppi e procedendo in questo modo, sopravvive alla fine una sola idea.

Possiamo scrivere il supporto a_{t+1} all'opinione A in funzione del suo sostegno a_t prima del ciclo di discussioni. Emerge così un valore soglia $a_{c,<r>}$ (dove c indica che il valore è una costante ed r è il numero di individui per gruppo) che determina la dinamica del processo: se $a_t > a_{c,<r>}$ è destinata alla vittoria l'opinione A, se invece $a_t < a_{c,<r>}$ l'opinione B. Quest'ultimo è il caso mostrato in figura, dove un sostegno iniziale ad A del 30% porta alla vittoria di B.



Il modello di Galam ha predetto correttamente l'esito di alcuni referendum e ciò fa sperare che la sociofisica possa fornire precisi strumenti predittivi per i fenomeni sociali.

Tesi di Laurea Triennale, A.A.2015/16

Stabilità e unicità del moto di un fluido attraverso un mezzo poroso

Davide Mari

Per mezzo poroso si intende ogni materiale solido che presenta dei vuoti nei quali si può muovere un fluido; si pensi, ad esempio, al terreno su cui camminiamo o ai tessuti biologici come le ossa e la pelle.
Lo studio del moto dei fluidi nei mezzi porosi è di notevole interesse in vari ambiti scientifici; serve, ad esempio, per capire come si diffondono i fluidi nel corpo umano. In quest'ottica ho cercato di capire ciò che avviene quando un fluido passa attraverso i buchi di un solido poroso.
Ho studiato alcuni modelli matematici, ossia equazioni che descrivono il moto del fluido attraverso il materiale poroso mettendo in relazione varie grandezze fisiche come velocità, densità, pressione del fluido e forze che agiscono su di esso. Tali equazioni permettono di conoscere ciò che avviene nel mezzo poroso, ossia di conoscere ad ogni istante di tempo la velocità e la pressione del fluido (le incognite del problema) e, quindi, di prevedere l'evoluzione del moto nel tempo.

In particolare ho studiato le equazioni di Navier-Stokes e di Brinkman, equazioni differenziali aventi come incognite due funzioni: la velocità V e la pressione P. Tali equazioni in generale hanno infinite soluzioni, ossia sono soddisfatte da infinite coppie (P, V), lasciando il problema indeterminato.
Ho dunque cercato di stabilire le condizioni per avere una sola soluzione (unicità del moto) e perché questo sia stabile (ossia si mantenga all'interno di un certo intervallo di valori). Risolvendo l'equazione di Brinkman si ottiene per la pressione l'espressione

$$P(x) = -\frac{C}{D}\,x + P_0$$

in cui x è la posizione del punto, P_0, C e D sono delle costanti.
In particolare la costante D è direttamente proporzionale alla quantità di vuoti nel mezzo poroso. Intuitivamente, quindi, ci si può aspettare che più buchi ci sono più il fluido è libero di scorrere senza ostacoli attraverso di esso (D grande, quindi P piccola, fluido poco ostacolato). Se invece i buchi diminuiscono, ci aspettiamo che il fluido faccia più fatica a scorrere e che, quindi, abbia una velocità minore (D piccolo, quindi P grande, fluido molto ostacolato).
Il modello matematico, tuttavia, dice che *se i buchi nel materiale poroso diminuiscono la velocità del fluido aumenta*. Infatti, anche se sembra strano, l'aumento di pressione (al calare dei buchi) genera un incremento della velocità del fluido. Ciò è un pò quello che avviene, ad esempio, quando, innaffiando piante e fiori, si riduce col dito l'apertura del tubo in cui scorre l'acqua: la pressione aumenta e questo determina un aumento della velocità del liquido.

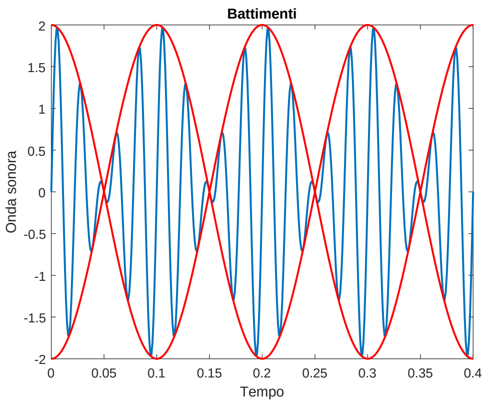
Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2016/17

L'odissea delle scale musicali

Applicazioni della Matematica alla Musica: dai cicli di quinte pitagoriche alla logica fuzzy.

Tatiana Menardo

Potremmo dire che la Matematica e la Musica sono due mondi distanti soltanto all'apparenza perché in realtà hanno molto da condividere: infatti tra queste due discipline vi è un legame profondo che chiama in causa aspetti talvolta complessi da un punto di vista sia matematico sia musicale.



Un collegamento immediato riguarda il *suono* che, in ambito musicale, può essere pensato come il mezzo che permette la trasmissione della musica mentre in termini matematici non è nient'altro che un'onda sinusoidale studiata attraverso l'analisi di Fourier. Per tale motivo, nella mia tesi, ho ripreso la teoria legata alle serie e alle trasformate di Fourier per poterla applicare in ambito musicale parlando dei **modi normali** di una corda vibrante (*armonici della corda*), analizzando i suoni prodotti quando essa viene pizzicata in punti diversi e studiando il curioso fenomeno dei **battimenti**.

Poi ho analizzato alcune delle numerose tipologie di scale musicali e temperamenti introdotti nel corso dei secoli cercando di studiarli come modelli matematici e di confrontarli tra loro in termini di consonanza degli intervalli (attraverso grafici e programmi di MATLAB). La più famosa tra tutte è la **scala pitagorica** di cui ho analizzato la generazione delle note attraverso un *ciclo di quinte ascendenti e discendenti*, noto anche come *spirale delle quinte* in quanto il ciclo non si chiude. Un'altra scala interessante è quella naturale che, rispetto a quella pitagorica, si propone di migliorare gli intervalli di terza, ma non fornisce alcuna soluzione per il problema di mancata chiusura del ciclo delle quinte. Quest'ultimo, infatti, è stato risolto soltanto con l'utilizzo del *temperamento equabile* a 12 note che prevede la divisione dell'ottava in 12 intervalli equispaziati.

Nella seconda parte della tesi, invece, vi sono alcune applicazioni in ambito algebrico: ho parlato di **sistemi di toni** come strutture algebriche definite tramite la nozione di *reti geometriche discrete* e ho studiato in particolare il sistema pitagorico cercando di stabilire un legame con le note del temperamento equabile attraverso degli isomorfismi e delle proiezioni.

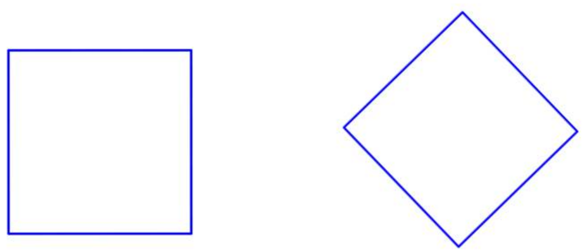
Infine, ho cercato dei criteri di confronto tra i sistemi di toni per stabilire un certo grado di "somiglianza" tra essi. Per fare ciò è risultato necesario presentare una matematizzazione dei sistemi di toni, ovvero ho cercato di esprimerli in termini matematici per poterli confrontare tra loro. Poi ho lavorato su due fronti: da un lato ho introdotto il concetto di δ-*similarità*, dall'altro ho parlato di numeri fuzzy per poter arrivare al concetto di nota musicale *fuzzy* e definire il grado di α-*compatibilità* tra sistemi di toni fuzzy. Quest'ultima parte risulta fondamentale per comprendere il significato del termine **fuzziness**: esiste, infatti, un certo margine di incertezza entro il quale siamo in grado di associare ad un determinato suono il nome di una specifica nota, anche se la frequenza con cui viene emesso tale suono non coincide esattamente con il valore teorico della frequenza della nota. Ad esempio, un suono con frequenza pari a 442 Hz viene associato alla nota *la* anche se il valore teorico della frequenza di questa nota è 440 Hz. Tali considerazioni ci permettono di creare un ulteriore collegamento tra Musica e Matematica nell'ambito della *granulazione dell'informazione*.

Tesi di Laurea Magistrale A.A.2014/15

Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali coinvolte: possibili effetti di un potenziamento con un software di geometria dinamica

Elisa Miragliotta

Nella mia tesi di laurea ho indagato il legame tra l'apprendimento della geometria e alcune abilità cognitive, chiamate *abilità visuo-spaziali*.
Per avere un'idea, guardiamo le seguenti figure: cosa rappresentano?



Le risposte possono essere diverse: "un quadrato e un rombo", "due quadrati", "un quadrato e un rombo che è anche un quadrato", ma ce ne possono essere altre.
La risposta dipende da almeno due fattori: le proprie abilità visuo-spaziali (capacità di ruotare mentalmente una figura per vederla poggiata su un suo lato, aderenza dell'immagine allo stereotipo di quadrilatero a cui stiamo pensando); il proprio controllo concettuale sulla figura (riconoscimento delle proprietà che definiscono particolari quadrilateri). Il secondo fattore sembra influenzare pesantemente il primo.
Da qui dunque la domanda: un maggiore controllo concettuale sulle figure può contribuire a supportare specifiche abilità cognitive?
Per rispondere si è realizzato, in una classe I Liceo, un intervento didattico di potenziamento di tali abilità riguardante i quadrilateri e le loro proprietà. Le attività sono state implementate nell'ambiente di geometria dinamica *GeoGebra*, cioè un software in cui le figure, generate attraverso costruzioni geometriche, non sono statiche, ma possono essere manipolate, mantenendo le proprietà geometriche decise dall'utente.
Al termine del percoso didattico abbiamo riscontrato un miglioramento delle prestazioni degli studenti sia dal punto di vista didattico che cognitivo. La ricerca è ancora in corso e speriamo che i risultati abbiano ricadute didattiche interessanti anche per studenti che manifestano disturbi specifici dell'apprendimento.
Le abilità visuo-spaziali non sono solo utili al proprio successo in matematica e nelle scienze, ma sono anche strattamente legate a molte attività dell'uomo: ad esempio, la lettura della mappa di una città, la navigazione e l'orientamento. Quello che è affascinante è vedere come la geometria, e la matematica in generale, possano davvero migliorare l'esperienza dell'uomo, spesso in modi inaspettati.

Tesi di Laurea Magistrale, A.A. 2016/17

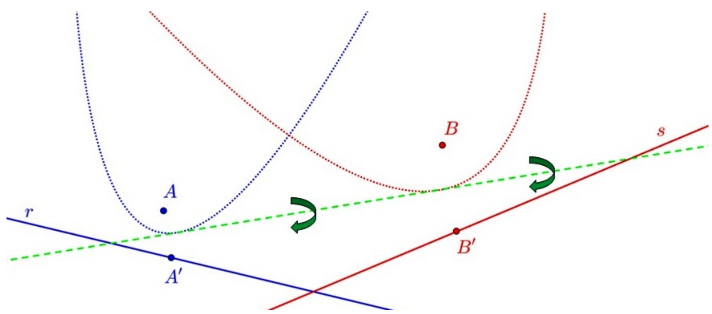
La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche

Rudy Salmi

Il rapporto fra origami e matematica è molto profondo. È sufficiente dispiegare un qualsiasi origami, anche il più semplice, per scoprire una complessa struttura geometrica: le piegature producono simmetrie assiali con angoli, rette e poligoni dalle proprietà particolari. Ne è nata una nuova geometria, la "geometria origami", con nuovi assiomi che possono sostituire gli assiomi tradizionali di Euclide. Se nella geometria euclidea classica è consentito l'uso esclusivo della riga e del compasso, nella geometria origami è consentito soltanto l'uso del foglio di carta sul quale possiamo intervenire con una serie di piegature.

Alle origini della geometria origami si trova l'opera del matematico indiano T. Sundara Row (1853-?), intitolata *Geometric Exercises in Paper Folding* (1893), in cui le costruzioni basilari della geometria euclidea sono reinterpretate in termini di ripiegamenti della carta. Quest'opera fu oggetto di studio di Margherita Beloch (1879-1976), professore ordinario di geometria all'Università di Ferrara dal 1927 al 1954, che diede un contributo di originalità alla geometria del *paper-folding*: in una sua nota del 1936 dimostrò come risolvere un'equazione cubica mediante il ripiegamento della carta.

La Beloch introdusse un nuovo tipo di piegatura che consisteva nel portare simultaneamente due punti assegnati A e B su due rette distinte r e s del foglio, operazione che equivale a determinare le tangenti comuni a due parabole che hanno per fuochi e direttrici i punti e le rette assegnate nel piano.



A differenza dei movimenti già introdotti da Row, la piega Beloch non poteva essere riprodotta con l'uso esclusivo della riga e del compasso: da qui *la possibilità di risolvere via origami problemi di grado superiore al secondo*, come la risoluzione di una generica cubica. Questa nuova procedura consentiva di risolvere ogni problema del terzo ordine, tra cui i problemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, dimostrando di fatto la superiorità del metodo rispetto alle costruzioni con riga e compasso.

A partire dagli anni Settanta, diversi studiosi cominciarono ad enumerare sistematicamente le possibili combinazioni di pieghe e a studiare quali tipi di operazioni geometriche fossero costruibili via origami. La prima sistemazione assiomatica della geometria origami fu data dai matematici giapponesi H. Huzita e K. Hatori. Essi individuarono un insieme di sette piegature fondamentali che stanno alla base di ogni costruzione origami *one-fold*: la sesta corrisponde proprio alla piega Beloch. Tuttavia è stato dimostrato che con questo sistema assiomatico non è possibile risolvere problemi di grado superiore al quarto.

Le recenti ricerche condotte da R. C. Alperin e da R. Lang sono orientate allo studio di geometrie origami *multi-folds*, in cui è possibile ottenere sulla carta più piegature senza dispiegare ad ogni passaggio il foglio. Queste tecniche sono piuttosto complesse da mettere in atto, ma permettono di risolvere equazioni di grado superiore al quarto, riadattando il metodo Beloch. Il passaggio dalla geometria origami *one-fold* a quella *multi-folds* consente la risoluzione di molti altri problemi algebrici e geometrici, come la quintisezione dell'angolo, la ricerca di tangenti comuni a più coniche e la costruzione di poligoni regolari di n lati.

Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2012/13

Apprendere la matematica attraverso il Cooperative Learning: una esperienza didattica in una scuola della Tanzania

Alessandro Spagnuolo

Il mio lavoro di tesi è nato dalla collaborazione tra un gruppo di docenti e studenti delle Università di Ferrara e Bologna e l'associazione AKAP, una Onlus di Rimini che si prefigge obiettivi di sviluppo e cooperazione a livello internazionale. La tesi riguarda l'utilizzo della metodologia didattica del *Cooperative Learning* per l'apprendimento della matematica, alla luce del soggiorno di un mese da me trascorso presso la scuola secondaria di Daudi (Tanzania).

Il Cooperative Learning si basa sulla suddivisione della classe in gruppi di lavoro in cui gli studenti sono direttamente responsabili del proprio apprendimento. Una corretta attuazione di questa metodologia è in grado di apportare benefici sul rendimento scolastico, la motivazione allo studio e il benessere psicologico. Partendo dall'analisi dei documenti ministeriali tanzaniani e attraverso la raccolta di testimonianze di docenti e studenti della scuola di Daudi, abbiamo rilevato alcuni degli aspetti formativi che potrebbero influire sugli esiti negativi degli studenti in matematica.
In particolare, i metodi d'insegnamento osservati si basano principalmente sulla lezione frontale nella sua accezione più estremizzata: il sapere è qualcosa che può essere trasmesso semplicemente riportando alla lavagna quanto è scritto sul libro di riferimento, gli studenti copiano le nozioni sul quaderno, e ciò è sufficiente per avere la certezza di aver trasferito loro conoscenza.
Il nostro intervento ha quindi mirato a fornire stimoli e proposte innovative per un miglioramento della didattica. La carenza di insegnanti qualificati, le difficoltà linguistiche (l'inglese è la lingua veicolare dell'istruzione) e il sovraffollamento delle classi ci hanno suggerito l'idea che il Cooperative Learning potesse risultare più efficace all'interno di questo contesto. Sono state pertanto pianificate delle unità didattiche da sperimentare in una classe del FORM 3 (studenti di 16-17 anni) su alcuni argomenti di geometria analitica.
I risultati raggiunti hanno confermato le nostre ipotesi iniziali: la suddivisione in gruppi, l'organizzazione premeditata di ruoli di gestione e l'utilizzo di appropriate schede di lavoro hanno permesso di arginare il problema dell'alta affluenza e hanno comportato un superamento delle barriere linguistiche, permettendo ad ogni studente di poter sviluppare capacità di ragionamento e critica.

Tesi di Laurea Triennale, A.A.2016/17

Il modello Lotka-Volterra: analisi di dinamiche preda-predatore attraverso la teoria dei sistemi autonomi

Valentina Veronesi

Dopo la Prima Guerra Mondiale si verificò un notevole aumento della percentuale di squali e razze nel Mar Mediterraneo, mentre quella del pesce commestibile era molto diminuita. La domanda chiave è:

perché se **non** si pesca i pesci diminuiscono?

Fu il matematico Volterra ad occuparsi di questo problema. Cercò di semplificare al massimo il quesito biologico per poterlo tradurre in linguaggio matematico; inizialmente si concentrò solo sulle prede (pesce commestibile) e sui predatori (squali), considerandoli come gli unici abitanti del mare. L'obiettivo di Volterra era quello di ottenere due *equazioni differenziali* che descrivessero come le popolazioni di prede e predatori variassero nel tempo.

Il numero di prede aumenta quando ci sono nuovi nati, in particolare il tasso di natalità, cioè la velocità alla quale la popolazione cresce, dipende contemporaneamente dalla fertilità e dalla mortalità (dovuta a cause naturali) degli individui. Al contrario, la popolazione diminuisce quando i sui componenti vengono mangiati dai predatori. Invece, il numero dei predatori aumenta tutte le volte che uno squalo incontra un pesce, infatti in questo modello semplificato si segue il principio secondo cui *ad ogni preda mangiata corrisponde un nuovo predatore nato.* Infine, la morte naturale dei predatori causa un decremento del loro numero.

Studiando il modello, cui si giunge costruendo le equazioni differenziali usando le ipotesi sopra descritte, si arriva dire che:

le due specie tendono ad aumentare e diminuire ciclicamente nel tempo.

Molte prede implicano la nascita di molti predatori, ma quando il numero di questi ultimi diventa insostenibile rispetto alla disponibilità di cibo, i predatori iniziano a morire di fame. Meno predatori ci sono più le prede hanno probabilità di sopravvivere e riprodursi, quindi tornano ad aumentare di numero. Da qui il ciclo ricomincia.

Dopo aver visto come si comportavano prede e predatori se lasciati soli, Volterra introdusse la pesca nel modello, la quale rappresenta un agente esterno che rimuove prede dall'ambiente. Studiando questo nuovo sistema si ricava il **Principio di Volterra**, che risponde alla nostra domanda:

un moderato aumento della pesca provoca, in media, un aumento della quantità di pesce commestibile e un decremento del numero di selaci.

Volterra si fermò qui, ma modificando ancora le equazioni trovate si può studiare il caso in cui le prede competano tra loro per il cibo, oppure il caso in cui le prede crescano in base alle risorse dell'ambiente (e quindi i risultati dipendono dal singolo ecosistema), o ancora il caso in cui ci siano più prede e più predatori. Un ultimo esempio è quello della morra cinese: è possibile costruire un modello che lo descriva, considerando sasso, carta e forbice come tre specie in competizione tra loro.

Nel tempo sono stati creati sistemi preda-predatore sempre più realistici, che hanno permesso di indagare fenomeni legati alla sociologia, alla chimica, all'economia e alla teoria dei giochi.

Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2011/12

Metodi variazionali per la segmentazione di immagini: il modello Blake-Zisserman

Massimo Zanetti

I modelli variazionali per la *segmentazione* permettono di studiare in ambito puramente matematico alcuni problemi di cruciale importanza come la segmentazione di segnali e immagini, il riconoscimento automatico, o lo studio delle fratture dei materiali.

Le immagini, così come acquisite dalla fotocamera, sono molto complesse dal punto dei vista dei dettagli che le compongono. Lo scopo principale della segmentazione è quello di fornire una rappresentazione *più semplice* (contenente meno dettagli) di una immagine, dove però il soggetto ed alcuni particolari di interesse sono ancora ben riconoscibili e determinati oggetti sono identificati e separati dal contesto. Per farsi un'idea di come possa risultare un'immagine semplificata, pensate ai cartoni animati. Essi non sono vere immagini, ma cosa rappresentano lo si capisce molto chiaramente.

I vantaggi di avere immagini semplificate (segmentate) sono molteplici. Uno di questi è la possibilità di rimuovere difetti. Nella mia tesi ho considerato un modello per la segmentazione di immagini nel quale un'immagine è rappresentata tramite una funzione, che chiamiamo g; tale g è considerata come un parametro in un modello funzionale che dipende da una funzione incognita u, la quale dovrà essere una approssimazione *semplificata* ma *fedele* di g. Il calcolo di u è un problema molto complesso di analisi numerica.
Nella tesi ho sviluppato un algoritmo che permette, data un'immagine di partenza, di ottenere delle sue segmentazioni. Questo algoritmo è stato poi applicato per risolvere vari problemi nel campo dell'elaborazione di immagini. Un esempio fra questi è il restauro di antichi dipinti a olio, gravemente danneggiati dagli effetti del tempo. La figura mostra il risultato del restauro del noto dipinto *La ragazza con l'orecchino di perla* di J. Vermeer. Nel riquadro a sinistra si può vedere una porzione del dipinto originale, visibilmente degradato dalla presenza di crepe e fratture Nel riquadro a sinistra si vede una ricostruzione del dipinto ottenuta tramite la rimozione delle linee dovute alle crepe ottenute tramite il calcolo numerico della soluzione.

(a) immagine di partenza g (b) immagine corretta (segmentazione) u

Tesi di Laurea Magistrale, A.A.2013/14

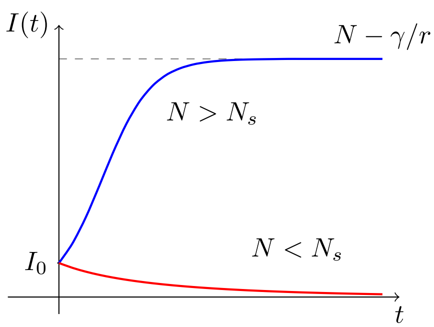
Modelli matematici deterministici e stocastici di tipo SIS e SIR per la diffusione di infezioni

Giulia Zanirato

Ho studiato alcuni modelli matematici utilizzati per descrivere la diffusione di malattie infettive: sono partita da quelli più semplici di tipo deterministico per passare poi ad alcuni modelli probabilistici, più coerenti con la realtà in quanto tengono conto anche di una componente casuale; difatti, il modo più naturale di trattare un'infezione reale è quello di parlare di *probabilità* che un individuo venga contagiato: la malattia può trasmettersi o meno a seguito di un contatto.
Il piu semplice tra tali modelli è il modello SIS (Suscettibile-Infetto-Suscettibile) usato per descrivere malattie né mortali né immunizzanti come raffreddore o tubercolosi. In questo tipo di malattie i malati, una volta guariti, tornano ad essere immediatamente suscettibili: detto r il tasso di infezione e γ quello di guarigione, la situazione si può così schematizzare:

$$S \xrightarrow{r} I \xrightarrow{\gamma} S.$$

Il modello è costituito da un sistema di equazioni differenziali che descrivono la variazione nel tempo (cioè la derivata!) delle funzioni $I(t)$ =numero di malati al tempo t ed $S(t)$ = numero di suscettibili al tempo t. Risolvere il sistema significa riuscire ad esplicitare le funzioni $I(t)$ ed $S(t)$, e quindi conoscere l'evoluzione temporale della malattia e poter rispondere a domande del tipo: quando la diffusione della malattia raggiunge l'apice? Quanti saranno al massimo gli individui infettati? Sarà necessario procedere con una campagna di vaccinazioni che possa limitare l'incidenza nella popolazione? La malattia si svilupperà rapidamente per poi estinguersi (epidemia) o rimmarrà costantemente presente nella popolazione (endemia)?



Il grafico mostra che esiste un *valore di soglia* N_s (dipendente da r e γ) tale che, detto N = numero di individui della popolazione:

- se $N < N_s$ la malattia tende ad estinguersi,
- se $N > N_s$ l'epidemia diviene endemica, ovvero non si estingue più (ancora oggi, molte malattie come la malaria e la sifilide non sono state debellate).